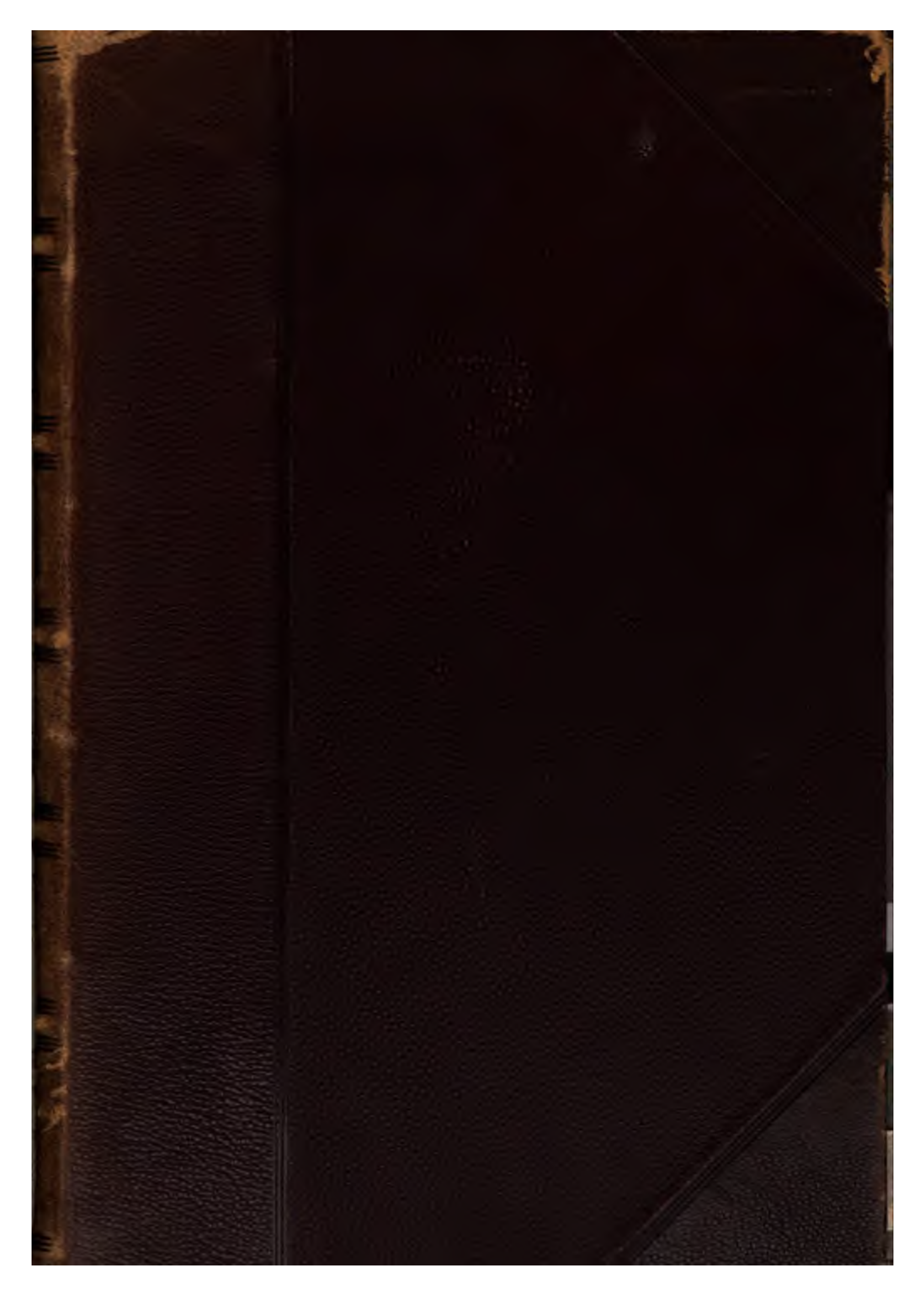
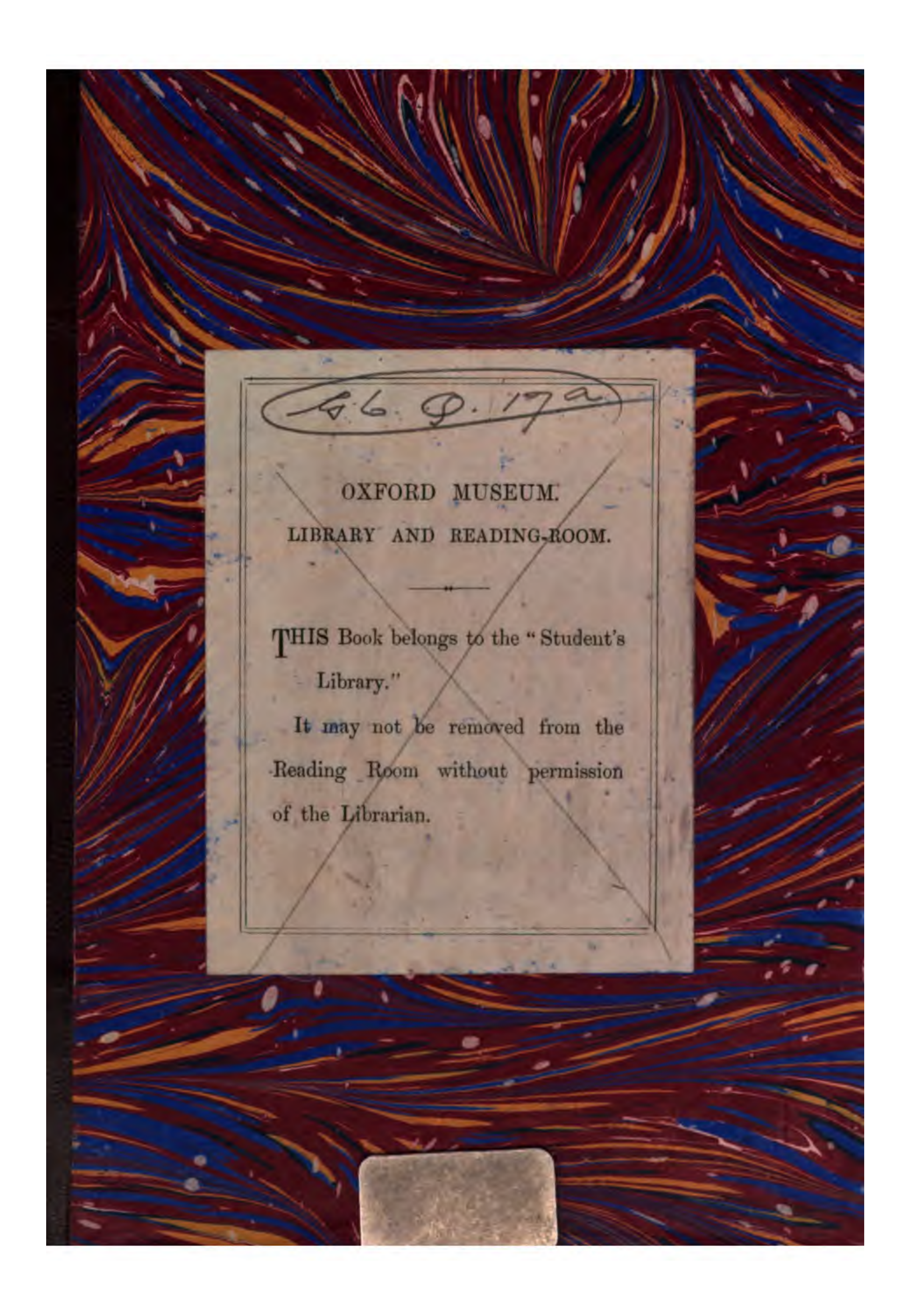




G.6. Q. 17a
OXFORD MUSEUM.
LIBRARY AND READING-ROOM.
THIS Book belongs to the "Student's Library."
It may not be removed from the Reading Room without permission of the Librarian.





VORLESUNGEN

ÜBER

MATHEMATISCHE PHYSIK

VON

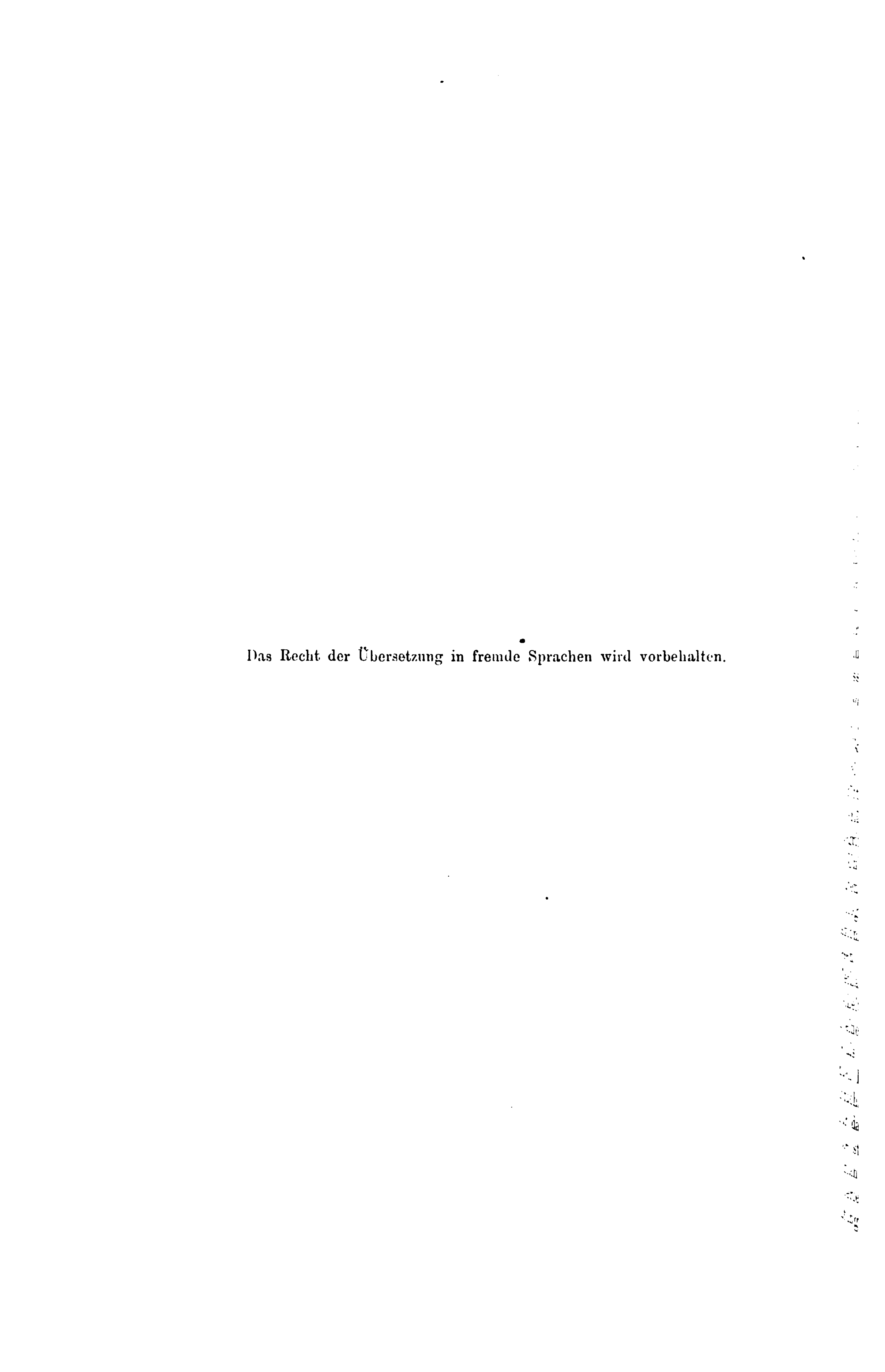
DR. GUSTAV KIRCHHOFF,
PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT ZU BERLIN.

MECHANIK.

DRITTE AUFLAGE.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1883.



Vorrede.

Die Vorlesungen, die ich hiermit der Oeffentlichkeit übergebe, behandeln insofern das ganze Gebiet der *reinen Mechanik*, d. h. der Lehre von denjenigen Erscheinungen, bei welchen ausschliesslich *Bewegungen* ins Auge zu fassen sind, als sie sich mit der Bewegung materieller Punkte, starrer, flüssiger und elastischer fester Körper beschäftigen. Es ist aber bei ihnen die Annahme festgehalten, dass die Materie stetig den Raum erfüllt, wie sie es zu thun scheint; die Theorieen, die auf der Annahme von Molekülen beruhen, sind in ihnen nicht berührt.

Der Ausgangspunkt der Darstellung, den ich gewählt habe, ist von dem gewöhnlichen verschieden. Man pflegt die Mechanik als die Wissenschaft von den *Kräften* zu definiren, und die Kräfte als *die Ursachen*, welche Bewegungen hervorbringen oder hervorzubringen *streben*. Gewiss ist diese Definition bei der Entwicklung der Mechanik von dem grössten Nutzen gewesen, und sie ist es auch noch bei dem Erlernen dieser Wissenschaft, wenn sie durch Beispiele von Kräften, die der Erfahrung des gewöhnlichen Lebens entnommen sind, erläutert wird. Aber ihr haftet die Unklarheit an, von der die Begriffe der Ursache und des Strebens sich nicht befreien lassen. Diese Unklarheit hat sich z. B. gezeigt in der Verschiedenheit der Ansichten darüber, ob der Satz von der Trägheit und der Satz vom Parallelogramm der Kräfte anzusehen sind als Resultate der Erfahrung, als Axiome oder als Sätze, die logisch bewiesen werden können und bewiesen werden müssen. Bei der Schärfe, welche die Schlüsse in der Mechanik sonst gestatten, scheint es mir wünschenswerth, solche Dunkelheiten aus ihr zu entfernen, auch wenn das nur möglich ist durch eine Einschränkung ihrer Aufgabe. Aus diesem Grunde stelle ich es als die Aufgabe der Mechanik hin, die in der Natur vor sich gehenden Bewegungen zu *beschreiben*, und zwar vollständig und auf die einfachste Weise zu beschreiben. Ich will damit sagen, dass es sich nur darum handeln soll, anzugeben, *welches* die Erscheinungen sind, die stattfinden, nicht aber darum, ihre *Ursachen* zu ermitteln. Wenn man hiervon ausgeht und die Vorstellungen von Raum, Zeit und Materie voraussetzt, so gelangt man durch rein mathematische Betrachtungen zu den allgemeinen Gleichungen der Mechanik. Man

hat auch auf diesem Wege es mit dem Begriffe der Kraft zu thun und ist nicht im Stande, eine vollständige Definition desselben zu geben. Die Unvollständigkeit dieser Definition hat hier aber keine Unklarheit zur Folge, da die Einführung der Kräfte hier nur ein Mittel bildet, um die Ausdrucksweise zu vereinfachen, um nämlich in kurzen Worten Gleichungen auszudrücken, die ohne Hülfe dieses Namens nur schwerfällig durch Worte sich würden wiedergeben lassen. Hier reicht es aus, um jede Dunkelheit zu entfernen, die Kräfte soweit zu definiren, dass jeder Satz der Mechanik, in dem von Kräften die Rede ist, in Gleichungen übersetzt werden kann; und das geschieht auf dem eingeschlagenen Wege.

Bei dem grossen Umfange des Stoffes, der in verhältnissmässig kleinem Raume behandelt worden ist, kann eine Erschöpfung des Gegenstandes nicht erwartet werden; möge die getroffene Auswahl als eine zweckmässige befunden werden!

Berlin, im Januar 1876.

Der Verfasser.

Die zweite Auflage meiner Vorlesungen über Mechanik, welche in verhältnissmässig kurzer Zeit nach dem Erscheinen der ersten nöthig geworden ist, ist im Wesentlichen ein unveränderter Abdruck dieser; nur einige, glücklicher Weise nicht erhebliche, Versehen, die in der ersten Auflage sich finden, und die zum Theil von wissenschaftlichen Freunden mir bezeichnet worden sind, habe ich hier zu verbessern gesucht.

Berlin, im November 1876.

Der Verfasser.

Auch die dritte Auflage dieses Buches ist ein fast ungeänderter Abdruck der früheren, bei dem ich mich nur bemüht habe, kleine Fehler und Mängel zu verbessern, die dort sich vorfinden.

Berlin, im September 1883.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniss.

Erste Vorlesung.

(Aufgabe der Mechanik. Definition eines materiellen Punktes. Geschwindigkeit. Beschleunigung oder beschleunigende Kraft. Bewegung eines schweren Punktes. Bewegung eines Planeten um die Sonne. Satz vom Parallelogramm der Kräfte. Differentialgleichungen des Problems der drei Körper.)

§ 1.

Die Mechanik ist die Wissenschaft von der Bewegung; als ihre Aufgabe bezeichnen wir: die in der Natur vor sich gehenden Bewegungen *vollständig* und *auf die einfachste Weise* zu beschreiben.

Bewegung ist Aenderung des Ortes mit der Zeit; was sich bewegt, ist die Materie. Zur Auffassung einer Bewegung sind die Vorstellungen von Raum, Zeit und Materie nöthig, aber auch hinreichend. Mit diesen Mitteln muss die Mechanik suchen, ihr Ziel zu erreichen, und mit ihnen muss sie die Hülfsbegriffe construiren, die sie dabei nöthig hat, z. B. die Begriffe der Kraft und der Masse.

Es soll die Beschreibung der Bewegungen eine *vollständige* sein. Die Bedeutung dieser Forderung ist vollkommen klar: es soll eben keine Frage, die in Betreff der Bewegungen gestellt werden kann, unbeantwortet bleiben. Nicht so klar ist die Bedeutung der zweiten Forderung, dass die Beschreibung die *einfachste* sei. Es ist von vorn herein sehr wohl denkbar, dass Zweifel darüber bestehen können, ob eine oder eine andere Beschreibung gewisser Erscheinungen die einfachere ist; es ist auch denkbar, dass eine Beschreibung gewisser Erscheinungen, die heute unzweifelhaft die einfachste ist, die man geben kann, später, bei weiterer Entwickelung der Wissenschaft, durch eine noch einfachere ersetzt wird. Dass Aehnliches stattgefunden hat, dafür bietet die Geschichte der Mechanik mannigfaltige Beispiele dar.

§ 2.

Die Bewegung eines Körpers, d. h. eines Theiles der Materie, ist, genau ins Auge gefasst, immer eine sehr complicirte Erscheinung. Ein fester Stab, der fortgeschleudert ist, dreht sich während seines Fortschreitens bald in diesem, bald in jenem Sinne; eine Flüssigkeit, die aus einem Gefässe ausgegossen ist, ändert, während sie fällt, in der verwickeltsten Art ihre Gestalt. Solche Drehungen und Gestalts-

änderungen kommen in weniger auffallender Weise bei jeder Bewegung eines Körpers vor. Wir werden — mit dem Einfacheren beginnend — zunächst den Fall betrachten, dass alle Dimensionen des Körpers *unendlich klein* sind; einen solchen Körper nennt man einen *materiellen Punkt*. Auch ein materieller Punkt wird im Allgemeinen bei seiner Bewegung sich drehen und seine Gestalt ändern; dabei wird aber, eben weil er unendlich klein ist, sein Ort in jedem Augenblicke durch einen geometrischen Punkt angegeben werden können. Wir werden uns darauf beschränken die Aenderungen seines Ortes zu untersuchen und nicht in Betracht ziehen, wie er sich dreht und seine Gestalt ändert.

Wir werden x, y, z die Coordinaten des materiellen Punktes, um dessen Bewegung es sich handelt, in Bezug auf ein beliebiges, festes, rechtwinkliges Coordinatensystem zur Zeit t nennen. Dann sind x, y, z Functionen von t, und zwar Functionen, die einwerthig und stetig sind für das ganze Intervall von t, welches der Dauer der Bewegung entspricht. Werden sie angegeben, so wird dadurch die Bewegung, so weit wir sie in Betracht ziehen wollen, vollständig beschrieben. Sie sind abhängig von dem gewählten Coordinatensystem. Führt man ein anderes, gleichfalls rechtwinkliges und festes Coordinatensystem ein und nennt x', y', z' die Coordinaten in ihm des Punktes, dessen Coordinaten im früheren x, y, z sind, so ist bekanntlich

$$\begin{aligned} x' &= a + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \\ y' &= b + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z \\ z' &= c + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z, \end{aligned} \qquad 1).$$

wo a, b, c und die Grössen α, β, γ Constanten sind, die von der relativen Lage der beiden Coordinatensysteme abhängen; es sind a, b, c die Werthe, die x', y', z' für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ haben, und es ist

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos(x'x), & \alpha_2 &= \cos(x'y), & \alpha_3 &= \cos(x'z) \\ \beta_1 &= \cos(y'x), & \beta_2 &= \cos(y'y), & \beta_3 &= \cos(y'z) \\ \gamma_1 &= \cos(z'x), & \gamma_2 &= \cos(z'y), & \gamma_3 &= \cos(z'z), \end{aligned} \qquad 2)$$

wo $(x'x)$ ein beliebiger von den beiden zu 2π sich ergänzenden Winkeln ist, die die Richtungen der x-Achse und x'-Achse mit einander bilden, und die Bedeutung der ähnlichen, eingeführten Zeichen die analoge ist.

§ 3.

Die Bewegung eines Punktes lässt sich auch auf andere Weisen beschreiben, die weniger direct, aber oft einfacher sind, als die besprochene. Der Zweck ist erreicht, wenn die Werthe angegeben sind, die x, y, z für *einen* Werth von t, z. B. für $t = 0$, besitzen, und die Werthe, welche $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ für *alle* Werthe von t haben. Dabei

können diese Differentialquotienten als Functionen von t, oder als Functionen von x, y, z oder — und das ist der allgemeinste Fall, den wir in Betracht ziehen — als Functionen von x, y, z und t gegeben sein; jedenfalls aber müssen diese einwerthig sein für alle Werthsysteme ihrer Argumente, welche bei der Bewegung vorkommen. Ist für $t = 0$:

$$x = x_0, \ y = y_0, \ z = z_0$$

und allgemein:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w, \tag{3}$$

wo x_0, y_0, z_0 gegebene Constanten, u, v, w gegebene Functionen der bezeichneten Art von x, y, z und t bedeuten, so sind x, y, z für jeden Werth von t im Allgemeinen eindeutig bestimmt, wie aus der Theorie der Differentialgleichungen folgt. Um x, y, z zu finden, hat man die Differentialgleichungen 3) zu integriren und die dabei auftretenden 3 willkürlichen Constanten aus den für $t = 0$ geltenden Bedingungen zu bestimmen.

Die durch die Gleichungen 3) definirten Grössen u, v, w nennt man die *Componenten der Geschwindigkeit* des Punktes zur Zeit t nach den Achsen der x, y, z. Der Geschwindigkeit selbst kommt eine gewisse Grösse und eine gewisse Richtung zu. Um diese zu finden, betrachte man u, v, w als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes in Bezug auf ein Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt beliebig ist, dessen Achsen aber den Achsen der x, y, z resp. parallel sind; die Richtung der Geschwindigkeit ist die Richtung der geraden Linie, die von dem Anfangspunkte der u, v, w nach dem Punkte (u, v, w) geht, die Grösse der Geschwindigkeit ist die Länge dieser Linie. Diese Definitionen sind gleichbedeutend mit den folgenden: die Grösse der Geschwindigkeit ist die positiv zu nehmende Wurzel

$$\sqrt{u^2 + v^2 + w^2},$$

ihre Richtung die Richtung einer Linie, die mit den Coordinatenachsen Winkel bildet, deren Cosinus

$$\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}, \quad \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}, \quad \frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} \tag{4}$$

sind.

Es ist leicht ersichtlich, dass hiernach die Geschwindigkeit eines Punktes allein von seiner Bewegung abhängt und nicht von dem Coordinatensysteme, das man zur Untersuchung dieser Bewegung gewählt hat. Man erkennt die Richtigkeit dieser Behauptung, wenn man dieselbe Bewegung einmal auf ein, dann auf ein anderes Coordinatensystem bezieht und beide Male nach der aufgestellten Definition die Geschwindigkeit aufsucht. Es seien wieder x', y', z' die Coordinaten in einem neuen Systeme des Punktes, dessen Coordinaten in dem alten x, y, z sind; es bestehen zwischen diesen Grössen dann

die Gleichungen 1). Differentiirt man diese Gleichungen und benutzt die Gleichungen 3), sowie die diesen entsprechenden:

$$\frac{dx'}{dt} = u', \quad \frac{dy'}{dt} = v', \quad \frac{dz'}{dt} = w',$$

in denen u', v', w' die Componenten der Geschwindigkeit des Punktes zur Zeit t nach den Achsen der x', y', z' bedeuten, so erhält man:

$$\begin{aligned} u' &= \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w \\ v' &= \beta_1 u + \beta_2 v + \beta_3 w \\ w' &= \gamma_1 u + \gamma_2 v + \gamma_3 w. \end{aligned}$$

In Folge der in den Gleichungen 2) angegebenen Bedeutung der Grössen α, β, γ drücken diese Gleichungen aus, dass u, v, w und u', v', w' die Coordinaten *eines* Punktes in zwei Systemen sind, die einen gemeinschaftlichen Anfangspunkt haben und von denen die Achsen des einen denen der x, y, z, die Achsen des anderen denen der x', y', z' parallel sind. Die gerade Linie, die nach *diesem* Punkte von dem gemeinsamen Anfangspunkt gezogen ist, bestimmt der Grösse und Richtung nach die Geschwindigkeit, um die es sich handelt, mag man das Coordinatensystem der x, y, z oder das der x', y', z' benutzen.

Nennt man ds die unendlich kleine Strecke, welche der Punkt in dem Zeitelement dt zurücklegt, so ist

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = ds$$

und daher

$$\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \frac{ds}{dt};$$

d. h. die Grösse der Geschwindigkeit ist gleich der unendlich kleinen Strecke, welche der Punkt in einem Zeitelement zurücklegt, dividirt durch dieses Zeitelement. Die in 4) angegebenen Cosinus der Winkel, welche die Richtung der Geschwindigkeit mit den Coordinatenachsen bildet, werden durch Einführung von ds

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds};$$

es sind dieses die Cosinus der Winkel, welche mit den Achsen die Tangente bildet, die im Punkte (x, y, z) im Sinne der Bewegung des Punktes an die Bahn desselben gelegt werden kann. Die Richtung dieser Tangente ist also die Richtung der Geschwindigkeit.

Der einfachste Fall der Bewegung ist derjenige, in dem u, v, w Constanten sind. In ihm ergiebt die Integration der Differentialgleichungen 3):

$$x = x_0 + ut, \quad y = y_0 + vt, \quad z = z_0 + wt.$$

Die Bahn ist hiernach die gerade Linie, deren Gleichungen

$$\frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v} = \frac{z - z_0}{w}$$

sind, d. h. die gerade Linie, die in der Richtung der constant bleibenden Geschwindigkeit durch den Punkt (x_0, y_0, z_0) gezogen ist. Eine solche Bewegung eines Punktes nennt man eine gleichförmige.

§ 4.

Die Bewegung eines materiellen Punktes ist ebenfalls im Allgemeinen vollkommen bestimmt, wenn für $t = 0$ Ort und Geschwindigkeit und für jeden Werth von t die Werthe von $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ gegeben sind. Es sei für $t = 0$:

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0,$$

$$\frac{dx}{dt} = u_0, \quad \frac{dy}{dt} = v_0, \quad \frac{dz}{dt} = w_0,$$

und allgemein

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z, \tag{5}$$

wo die mit dem Index $_0$ versehenen Zeichen gegebene Constanten, X, Y, Z gegebene Functionen von x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, t bedeuten, die für alle vorkommenden Werthsysteme ihrer Argumente einwerthig sind. Integrirt man die Differentialgleichungen 5) und verfügt über die 6 dabei auftretenden willkürlichen Constanten so, dass den für $t = 0$ geltenden Bedingungen genügt wird, so bestimmt man x, y, z als Functionen von t.

Die durch die Gleichungen 5) definirten Grössen X, Y, Z nennt man die *Componenten* nach den Coordinatenachsen der *Beschleunigung*, die der Punkt hat, oder der *beschleunigenden Kraft*, die auf den Punkt wirkt. Die Ausdrücke: Beschleunigung und beschleunigende Kraft werden wir zunächst als ganz gleichbedeutend ansehen und nach Willkür bald den einen, bald den andern gebrauchen. Der Kürze wegen wollen wir dabei das Beiwort *beschleunigend* fortlassen, aber stets hinzudenken, bis wir zur Einführung der sogenannten *bewegenden* Kräfte kommen. Der Beschleunigung kommt eine gewisse Grösse und eine gewisse Richtung zu; ihre Grösse ist

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

ihre Richtung diejenige, die mit den Coordinatenachsen Winkel bildet, deren Cosinus

$$\frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \quad \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \quad \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

sind. Mit andern Worten: betrachtet man X, Y, Z als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes in einem Coordinatensysteme, dessen Achsen den Achsen der x, y, z parallel sind, so ist die Länge der von dem Anfangspunkte nach diesem Punkte gezogenen Linie die Grösse, und ihre Richtung die Richtung der Beschleunigung.

Diese Definition der Beschleunigung ist ganz entsprechend derjenigen, die im vorigen § von der Geschwindigkeit gegeben ist; an sie lassen sich ganz ähnliche Betrachtungen knüpfen, wie sie dort entwickelt sind. Führt man, wie es dort geschehen ist, neben dem Coordinatensystem der x, y, z ein zweites ein, auf welches man die gestrichenen Buchstaben bezieht und differentiirt die Gleichungen 1), die dann wieder gelten, zweimal, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d^2x'}{dt^2} &= \alpha_1 \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha_2 \frac{d^2y}{dt^2} + \alpha_3 \frac{d^2z}{dt^2} \\ \frac{d^2y'}{dt^2} &= \beta_1 \frac{d^2x}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2y}{dt^2} + \beta_3 \frac{d^2z}{dt^2} \\ \frac{d^2z'}{dt^2} &= \gamma_1 \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2y}{dt^2} + \gamma_3 \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned} \tag{6}$$

oder bei Rücksicht auf die Gleichungen 5) und die diesen entsprechenden, welche die gestrichenen Buchstaben enthalten:

$$\begin{aligned} X' &= \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z \\ Y' &= \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z \\ Z' &= \gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z; \end{aligned} \tag{7}$$

und hieraus folgt, dass die Grösse und Richtung der Beschleunigung ebenso, wie die Grösse und Richtung der Geschwindigkeit, unabhängig sind von dem Coordinatensysteme, auf welches man die Bewegung bezieht.

Wie im vorigen und in diesem § die ersten und zweiten Differentialquotienten der Coordinaten des bewegten Punktes nach der Zeit eingeführt sind, so könnten auch die dritten und noch höheren eingeführt werden. Die in der Natur vorkommenden Bewegungen sind aber erfahrungsmässig der Art, dass dadurch die Einfachheit ihrer Darstellung nicht gewinnen, sondern im Gegentheil verlieren würde. Es hat das darin seinen Grund, dass, wie aus der Erfahrung hat geschlossen werden können, bei allen Bewegungen, die in der Natur vor sich gehen, die zweiten Differentialquotienten der Coordinaten der materiellen Punkte nach der Zeit Functionen der Coordinaten selbst sind.

§ 5.

Nach den gegebenen Definitionen sind wir schon im Stande eine Klasse von Bewegungserscheinungen, die auf der Erde vorkommen, in sehr einfacher Weise und mit einem hohen Grade von Genauigkeit zu beschreiben, die Bewegung fallender und geworfener Körper nämlich in so weit, als diese als materielle Punkte angesehen werden können, die Dimensionen ihrer Bahnen unendlich klein gegen die Dimensionen der Erde sind und der Einfluss der Luft, so wie der Bewegung der Erde unmerklich ist. Unter diesen Voraussetzungen

ist die genannte Bewegung beschrieben durch den Ausspruch, dass auf die Körper in vertical abwärts gekehrter Richtung eine constante Kraft wirkt, eine Kraft, welche die *Schwere* genannt wird.

Nimmt man die z-Achse vertical abwärts gekehrt an und bezeichnet die Schwere mit g, so ist dieser Ausspruch gleichbedeutend mit den Differentialgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = g.$$

Die Integrale derselben sind:

$$\begin{aligned} x &= a + a't \\ y &= b + b't \\ z &= c + c't + \frac{g}{2}t^2, \end{aligned}$$

wo a, b, c und a', b', c' 6 willkürliche Constanten bedeuten, von denen die 3 ersten die Coordinaten des Ortes, die 3 letzten die Componenten der Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ angeben.

Zwischen x und y kann man durch Elimination von t eine lineare Gleichung bilden; d. h. der Körper bewegt sich in einer verticalen Ebene. Nimmt man diese zur yz-Ebene, so wird $x = 0$, und, eliminirt man aus den Gleichungen für y und z die Zeit, so erhält man zwischen y und z eine Gleichung, die y in den beiden ersten Potenzen, z in der ersten Potenz enthält. Hiernach ist die Bahn eine Parabel, deren Achse der z-Achse parallel, also vertical ist. Ist noch $b' = 0$, so geht die Parabel in eine verticale gerade Linie über.

§ 6.

Ein anderes Beispiel, welches zeigt, welche Vereinfachung die Beschreibung natürlicher Bewegungen durch die Einführung des Begriffs der Kraft erfährt, ist die Bewegung der Planeten um die Sonne. Es ist diese mit einem gewissen Grade der Genauigkeit beschrieben durch die sogenannten Kepler'schen Gesetze; es wird uns gelingen diese zusammen zu fassen in einen Satz von grosser Einfachheit.

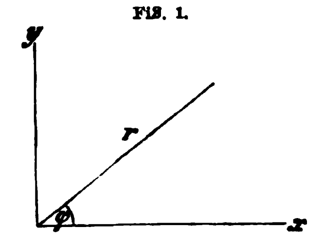
Nach dem ersten Kepler'schen Gesetze bewegt ein Planet sich so, dass sein von der Sonne gezogener radius vector in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume beschreibt; nach dem zweiten ist die Bahn eines Planeten eine Ellipse, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht.

Wir nehmen die Ebene der Bahn zur xy-Ebene; dann ist $z = 0$ und daher, wenn wir X, Y, Z die Componenten der auf den Planeten wirkenden Kraft nennen, $Z = 0$; d. h. die Kraft ist der Ebene der Bahn parallel. Wir legen ferner den Anfangspunkt der Coordinaten in die Sonne und setzen

$$x = r \cos \varphi, \qquad y = r \sin \varphi \tag{8}$$

mit der näheren Bestimmung, dass r positiv sei. Es ist dann r die Länge des von der Sonne nach dem Planeten zur Zeit t gezogenen radius vector und φ ist der Winkel, den dieser mit der x-Achse bildet und den er beschreibt, wenn er aus der Lage, bei der er mit der x-Achse zusammenfällt, in die Lage, die er zur Zeit t hat, in *dem* Sinne gedreht wird, in dem die x-Achse gedreht werden muss, um nach einer Drehung von einem rechten Winkel in die y-Achse zu fallen. Die Achsen der x und y denken wir uns so gewählt, dass φ mit der Zeit wächst.

Fig. 1.



Die doppelte Fläche eines Dreiecks ist gleich dem Product zweier Seiten und des Sinus des eingeschlossenen Winkels. Ist dieser Winkel unendlich klein, so kann er selbst für seinen Sinus gesetzt werden, vorausgesetzt, dass Einheit des Winkels der Winkel von

$$\frac{180^0}{\pi}$$

ist. Diese Einheit führen wir ein für alle mal ein. Die doppelte Fläche des Dreiecks, welches der radius vector des Planeten in dem Zeitelement dt beschreibt, ist dann $r^2 d\varphi$; wir setzen

$$r^2 d\varphi = c\,dt; \tag{9}$$

nach dem ersten Kepler'schen Gesetze ist dann c eine Constante, und nach der Annahme, die wir über die Lage der Coordinatenachsen gemacht haben, eine positive. Differentiirt man die Gleichungen 8), so erhält man

$$dx = \cos\varphi\, dr - r \sin\varphi\, d\varphi$$
$$dy = \sin\varphi\, dr + r \cos\varphi\, d\varphi;$$

multiplicirt man diese in geeigneter Weise mit den Gleichungen 8) und subtrahirt sie von einander, so ergiebt sich

$$x\,dy - y\,dx = r^2 d\varphi.$$

Nach 9) ist daher:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c, \tag{10}$$

und durch Differentiation dieser Gleichung erhält man

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Bei Rücksicht auf die Gleichungen 5) hat man daher

$$X : Y = x : y.$$

Diese Proportion spricht aus, dass die auf den Planeten wirkende Kraft nach der Sonne gerichtet ist oder die entgegengesetzte Richtung

hat, dass, wie man dieses ausdrückt, die Kraft eine von der Sonne ausgehende Anziehungs- oder Abstossungs-Kraft ist. Ihr zufolge kann man setzen

$$X = -R\frac{x}{r},\quad Y = -R\frac{y}{r};$$

dabei ist dann der absolute Werth von R die Grösse der Kraft, und es ist diese eine anziehende, wenn R positiv, eine abstossende, wenn R negativ ist. Multiplicirt man diese Gleichungen mit dx, dy und addirt sie, so ergiebt sich bei Rücksicht darauf, dass

$$x^2 + y^2 = r^2$$

also

$$x\,dx + y\,dy = r\,dr \tag{11)}$$

ist:

$$X\,dx + Y\,dy = -R\,dr.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber nach 5)

$$\tfrac{1}{2}d\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right) \text{ oder } \tfrac{1}{2}d\,(v^2),$$

wenn man v die Geschwindigkeit des Planeten nennt.

Ferner erhält man aus den Gleichungen 10) und 11), wenn man diese, nachdem die erste mit dt multiplicirt ist, quadrirt und addirt,

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2}.$$

Daraus folgt:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{c^2}{r^3} - R. \tag{12)}$$

Diese Gleichung verbinden wir mit einer, die aus dem *zweiten* Kepler'schen Gesetze sich ergiebt. Es sei a die Hälfte der grossen Achse, e die Excentricität der elliptischen Bahn, wobei dann a und e positive Grössen sind und e kleiner als 1 ist. Die x-Achse sei die grosse Achse und nach dem Perihel gerichtet, dem Punkte der Bahn, der der Sonne am nächsten ist. Die Gleichung der Bahn ist dann:

$$(x + ea)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = a^2$$

oder

$$(x + ea)^2 + \frac{r^2 - x^2}{1-e^2} = a^2$$

oder

$$r^2 = (a(1-e^2) - ex)^2.$$

Zieht man die Wurzel und berücksichtigt, dass r stets positiv ist, so erhält man hieraus

$$r = a(1-e^2) - ex. \tag{13)}$$

Daraus folgt

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -e\frac{d^2x}{dt^2} = -eX = R\frac{ex}{r},$$

oder nach 13)

$$\frac{d^2r}{dt^2} = R\left(\frac{a(1-e^2)}{r} - 1\right),$$

und mit Hülfe von 12)

$$R = \frac{c^2}{a(1-e^2)} \frac{1}{r^2}. \qquad 14)$$

Dieser Ausdruck von R ist positiv; daher ist die auf den Planeten wirkende Kraft eine von der Sonne ausgehende Anziehungskraft. Dieselbe ist ferner dem Quadrate der Entfernung von der Sonne umgekehrt proportional.

Wir wollen den für diese Kraft gefundenen Ausdruck dadurch umformen, dass wir in ihn die Umlaufszeit des Planeten einführen. Wir bezeichnen dieselbe durch T. Da $c\,dt$ nach 9) das Doppelte der Fläche ist, welche der radius vector des Planeten in dem Zeitelement dt beschreibt, so ist $c\,T$ das Doppelte der Fläche, welche von der elliptischen Bahn begrenzt wird; d. h. es ist

$$c\,T = a^2 \sqrt{1-e^2}\, 2\pi$$

und daher nach 14)

$$R = 4\pi^2 \frac{a^3}{T_2} \frac{1}{r^2}.$$

Nach dem *dritten* Kepler'schen Gesetze hat aber das Verhältniss $a^3 : T^2$ für alle Planeten denselben Werth; es folgt daraus, dass für irgend einen Planeten

$$R = \frac{M}{r^2}$$

ist, wo M für alle Planeten denselben constanten Werth hat, oder in Worten: dass die Sonne alle Planeten mit Kräften anzieht, die den Quadraten der Entfernungen von ihr umgekehrt proportional sind.

Dieser Satz rührt von Newton her. Von ihm ausgehend kann man durch eine Rechnung, die den umgekehrten Weg nimmt, als diejenige, die wir durchgeführt haben, die Kepler'schen Gesetze ableiten. Er ist daher nur ein anderer Ausdruck für dieselbe Sache, als diese es sind, aber ein einfacherer. Die grössere Einfachheit bildet indessen nicht den einzigen und auch nicht den wichtigsten Vorzug, welchen der Newton'sche Satz vor den Kepler'schen Gesetzen voraus hat; es liegt dieser darin, dass der Newton'sche Satz seinen Entdecker zu einem Gesetze leiten konnte, welches allgemeiner und genauer ist, als er selbst und die Kepler'schen Gesetze; einem Gesetze, welches die Bewegung *aller* Himmelskörper in so weit, als diese als materielle Punkte angesehen werden können und unsere Kenntnisse reichen, *genau* darstellt.

§ 7.

Um dieses Newton'sche Gesetz aussprechen zu können, müssen wir den Begriff der Kraft allgemeiner fassen, als wir es bis jetzt gethan haben. Die Ausdrücke *Kraft* und *Beschleunigung* haben wir bis jetzt als ganz gleichbedeutend gebraucht; nach der Verallgemeinerung des Begriffs der Kraft, die wir nun eintreten lassen wollen, werden

wir das nicht mehr dürfen. Bis jetzt mussten wir sagen: es wirkt auf einen Punkt immer *eine* Kraft; jetzt werden wir uns des Ausdrucks bedienen: es wirken auf einen Punkt gleichzeitig *mehrere* Kräfte, oder es wirkt auf ihn ein *System* von Kräften. Wir werden dabei eine jede Kraft, gerade wie bisher, durch ihre Componenten nach den Coordinatenachsen bestimmen; so dass, wenn X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, . . . die Componenten von Kräften sind, die zusammen auf den Punkt (x, y, z) wirken, diese Kräfte der Grösse und Richtung nach übereinstimmen mit den Linien, die vom Anfangspunkte der Coordinaten nach *den* Punkten gezogen sind, welche die Coordinaten X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, . . . haben. Der Ausspruch, dass das bezeichnete System von Kräften auf den genannten Punkt wirkt, soll gleichbedeutend mit dem Ausspruche sein, dass die Bewegung des letzteren den Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= X_1 + X_2 + \cdots \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y_1 + Y_2 + \cdots \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= Z_1 + Z_2 + \cdots \end{aligned} \qquad 15)$$

gemäss geschieht.

Ein System von Kräften, welche auf einen Punkt wirken, ist immer gleichwerthig mit einer einfachen Kraft, die man die *Resultante* des Systemes nennt. Sind X, Y, Z die Componenten nach den Coordinatenachsen der Resultante des bezeichneten Systemes, so hat man nach 15) und 5):

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \cdots \\ Y &= Y_1 + Y_2 + \cdots \\ Z &= Z_1 + Z_2 + \cdots \end{aligned}$$

Es sind dieses die Gleichungen, welche, wenn das System nur aus zwei Kräften besteht, den analytischen Ausdruck des sogenannten *Satzes vom Parallelogramm der Kräfte* bilden.

Es ist einleuchtend, dass, wenn man eine bestimmte Bewegung eines Punktes als bedingt durch mehrere Kräfte ansieht, diese nicht einzeln bestimmt sind; nur die Resultante ist bestimmt; alle Einzelkräfte bis auf *eine* können beliebig angenommen und diese eine kann dann immer so gewählt werden, dass die Resultante der Beschleunigung gleich wird. Aus der Bewegung allein kann die Mechanik nach unserer Auffassung die Definitionen der Begriffe schöpfen, mit denen sie es zu thun hat. Es folgt daraus, dass nach Einführung von Kräftesystemen an Stelle einfacher Kräfte die Mechanik ausser Stande ist, eine vollständige Definition des Begriffs der Kraft zu geben. Trotzdem ist diese Einführung von der höchsten Wichtigkeit. Es beruht das darauf, dass, wie die Erfahrung gezeigt hat, bei den natür-

lichen Bewegungen sich immer solche Systeme finden lassen, deren Einzelkräfte leichter angegeben werden können, als ihre Resultanten.

§ 8.

Ein Beispiel hierfür bietet die Bewegung der Himmelskörper. Es seien 1, 2, . . die in Betracht kommenden Körper, m_1, m_2, . . Constanten, welche sich auf dieselben beziehen, r_{12}, r_{13}, . . die Entfernungen je zweier zur Zeit t; ihre Bewegungen sind dann so, dass sie angesehen werden können als bedingt durch Kräfte, mit denen jeder auf alle übrigen wirkt, der Art, dass der Körper 1 den Körper 2 mit einer Kraft anzieht, die

$$= \frac{m_1}{r_{12}^2}$$

ist. Dieser Satz ist das Newton'sche Gesetz.

Wären nur 3 Himmelskörper vorhanden und kennzeichnen wir die Coordinaten derselben durch die Indices 1, 2, 3, so wären hiernach die Differentialgleichungen ihrer Bewegung diese:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = m_2 \frac{x_2 - x_1}{r_{12}^3} + m_3 \frac{x_3 - x_1}{r_{13}^3}$$

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = m_2 \frac{y_2 - y_1}{r_{12}^3} + m_3 \frac{y_3 - y_1}{r_{13}^3}$$

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} = m_2 \frac{z_2 - z_1}{r_{12}^3} + m_3 \frac{z_3 - z_1}{r_{13}^3}$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = m_3 \frac{x_3 - x_2}{r_{23}^3} + m_1 \frac{x_1 - x_2}{r_{21}^3}$$

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} = m_3 \frac{y_3 - y_2}{r_{23}^3} + m_1 \frac{y_1 - y_2}{r_{21}^3}$$

$$\frac{d^2 z_2}{dt^2} = m_3 \frac{z_3 - z_2}{r_{23}^3} + m_1 \frac{z_1 - z_2}{r_{21}^3}$$

$$\frac{d^2 x_3}{dt^2} = m_1 \frac{x_1 - x_3}{r_{31}^3} + m_2 \frac{x_2 - x_3}{r_{32}^3}$$

$$\frac{d^2 y_3}{dt^2} = m_1 \frac{y_1 - y_3}{r_{31}^3} + m_2 \frac{y_2 - y_3}{r_{32}^3}$$

$$\frac{d^2 z_3}{dt^2} = m_1 \frac{z_1 - z_3}{r_{31}^3} + m_2 \frac{z_2 - z_3}{r_{32}^3}.$$

Die Aufgabe, diese Differentialgleichungen zu integriren, wird das *Problem der drei Körper* genannt. Sie ist mit Strenge bis jetzt nicht gelöst. Unser Planetensystem bildet ein noch schwierigeres Problem dar, da die Zahl der Körper in ihm grösser als 3 ist. Durch Benutzung des Umstandes, dass bei jedem Planeten die von der Sonne ausgehende Kraft, bei jedem Trabanten die von seinem Planeten ausgehende die andern auf ihn wirkenden Kräfte weit überwiegt, haben die Astronomen trotzdem sich überzeugen können, dass die Bewegungen in unserm Planetensystem sehr genau dem Newton'schen Gesetze entsprechen.

Zweite Vorlesung.

(Bewegung eines Punktes, der nicht frei ist. Einfaches Pendel. Bewegung eines Systemes von Punkten, für welches Bedingungsgleichungen gelten. Masse eines materiellen Punktes. Bewegende Kraft. Lagrange's Grundgleichungen der Mechanik.)

§ 1.

Einen wesentlichen Nutzen leistet die Einführung eines *Systemes* von Kräften, die auf einen materiellen Punkt wirken, an Stelle *einer* Kraft auch in dem Falle, den wir nun betrachten wollen. Der Fall ist der, dass man von vorn herein eine Gleichung zwischen den Coordinaten des Punktes, oder eine zwischen diesen und der Zeit kennt. Das findet z. B. statt, wenn der Punkt in eine Schale von bekannter Gestalt gelegt ist und in ihr so sich bewegt, dass er mit ihr in Berührung bleibt. Ruht die Schale, so ist die Gleichung ihrer Oberfläche eine Gleichung zwischen den Coordinaten des Punktes; wird die Schale in bekannter Weise bewegt, so hat man eine Gleichung zwischen diesen Coordinaten und der Zeit. Wir schreiben die gedachte Gleichung

$$\varphi(x, y, z, t) = c, \qquad 1)$$

oder kürzer $\varphi = c$, indem wir durch c eine Constante bezeichnen. Dem Sprachgebrauche folgend, nennen wir sie eine *Bedingungsgleichung* und sagen: Der Punkt ist *nicht frei*, sondern *gezwungen*, dieser Bedingung gemäss sich zu bewegen; wir verbinden mit diesen Ausdrücken aber keine andere Vorstellung als die, dass die Gleichung 1) *thatsächlich* besteht.

In dem genannten Falle stellen wir die Bewegung des Punktes als durch zwei Kräfte bedingt dar; wir setzen nämlich

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= X + X_1 \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y + Y_1 \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + Z_1. \end{aligned} \qquad 2)$$

Die Componenten der ersten Kraft, X, Y, Z, sollen vollständig angegeben, für die Componenten der zweiten, X_1, Y_1, Z_1, aber nur Ausdrücke aufgestellt werden, die noch eine unbekannte Grösse, die wir λ nennen wollen, enthalten. Durch die Bedingungsgleichung

lässt sich diese bestimmen. Aus derselben folgt nämlich, dass für jeden Werth von t

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \text{ d. h. } \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

und auch

$$\begin{aligned}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0 \text{ d. h. } 0 = & \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{d^2z}{dt^2} \\ & + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \\ & + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}\frac{dy}{dt}\frac{dz}{dt} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}\frac{dz}{dt}\frac{dx}{dt} \\ & + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}\frac{dx}{dt} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial t}\frac{dy}{dt} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial t}\frac{dz}{dt}\end{aligned} \qquad 3)$$

ist. Substituirt man in die letzte Gleichung für $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ ihre Werthe aus 2), so erhält man eine Gleichung, welche λ durch $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ und t auszudrücken erlaubt. Jede von den Componenten X_1, Y_1, Z_1 werden wir gleich λ, multiplicirt mit einem von λ unabhängigen Factor, setzen; die Gleichung für λ wird dann linear, es wird λ und es werden X_1, Y_1, Z_1, also auch $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ eindeutig und als endliche Grössen bestimmt, vorausgesetzt, dass der Coefficient von λ in der genannten Gleichung nicht verschwindet. Die ganze Bewegung ist daher vollständig bestimmt, wenn noch die Anfangswerthe der Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten angegeben sind. Diesen Schlüssen liegt die Voraussetzung mit zu Grunde, welche im § 4. der ersten Vorlesung über die Componenten einer Kraft ausgesprochen ist und die ausnahmslos beibehalten werden wird, die Voraussetzung, dass diese Componenten im allgemeinsten Falle eindeutige Functionen von $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t$ sind. Als solche Functionen sollen X, Y, Z, und die Factoren von λ in X_1, Y_1, Z_1 angegeben werden.

Im Uebrigen können die zuletzt genannten Factoren ganz beliebig gewählt werden; immer ist die Beschreibung der Bewegung eine vollständige. Wir wollen aber eine ganz specielle Wahl treffen, nämlich

$$X_1 = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad Y_1 = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad Z_1 = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

setzen, wodurch die Gleichungen 2) werden:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= X + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}.\end{aligned} \qquad 4)$$

Die Zweckmässigkeit dieser Wahl beruht auf zwei Eigenschaften, die die Gleichungen 4) besitzen. Die erste von diesen ist die, dass die Gleichungen ihre Form behalten, wenn das Coordinatensystem geändert wird. Um das einzusehen, bezeichne man durch φ' die Function von x', y', z', t, in welche φ übergeht, wenn man hier x, y, z mit Hülfe der Gleichungen 1) der ersten Vorlesung durch x', y', z' ausdrückt, so dass

$$\varphi' = \varphi$$

eine mit Rücksicht auf diese Gleichungen identische Gleichung ist. Da aus der Auflösung dieser Gleichungen sich ergiebt:

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \alpha_1 \quad \frac{\partial y}{\partial x'} = \alpha_2 \quad \frac{\partial z}{\partial x'} = \alpha_3$$

$$\frac{\partial x}{\partial y'} = \beta_1 \quad \frac{\partial y}{\partial y'} = \beta_2 \quad \frac{\partial z}{\partial y'} = \beta_3$$

$$\frac{\partial x}{\partial z'} = \gamma_1 \quad \frac{\partial y}{\partial z'} = \gamma_2 \quad \frac{\partial z}{\partial z'} = \gamma_3,$$

so folgt hieraus

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}\alpha_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\alpha_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\alpha_3 \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial y'} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}\beta_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\beta^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\beta_3 \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial z'} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}\gamma_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\gamma_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\gamma_3. \end{aligned} \tag{5}$$

Multiplicirt man die Gleichungen 4) mit α_1, α_2, α_3 oder β_1, β_2, β_3 oder γ_1, γ_2, γ_3 und addirt sie jedesmal, so erhält man daher und, weil bei den gemachten Festsetzungen die Gleichungen 6) und 7) der ersten Vorlesung gelten:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x'}{dt^2} &= X' + \lambda \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} \\ \frac{d^2y'}{dt^2} &= Y' + \lambda \frac{\partial \varphi'}{\partial y'} \\ \frac{d^2z'}{dt^2} &= Z' + \lambda \frac{\partial \varphi'}{\partial z'}. \end{aligned}$$

Die zweite Eigenschaft, welche die Gleichungen 4) auszeichnet, ist die, dass sie ihre Gültigkeit behalten, wenn man die *Form* der Bedingungsgleichung beliebig ändert, d. h. wenn man die Gleichung $\varphi = c$ ersetzt durch die Gleichung

$$F = C,$$

wo F eine beliebige Function von φ, und C den Werth bedeutet, den diese für $\varphi = c$ annimmt. Statt der Gleichungen 4) erhält man dann

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= X + L\frac{\partial F}{\partial x} \\
\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + L\frac{\partial F}{\partial y} \\
\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + L\frac{\partial F}{\partial z},
\end{aligned} \tag{6}
$$

wo L eine neue unbekannte Grösse bedeutet, die aus der Gleichung $F = C$ oder, was dasselbe ist, aus der Gleichung $\varphi = c$ zu bestimmen ist. Da aber

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{dF}{d\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{dF}{d\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{dF}{d\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

so werden die Gleichungen 6) identisch mit den Gleichungen 4), wenn man

$$L\frac{dF}{d\varphi} = \lambda$$

macht.

Um die Gleichungen 4) und die Gleichung $\varphi = c$ in Worte zu übersetzen, werden wir sagen: *auf den betrachteten materiellen Punkt wirkt die Kraft, deren Componenten X, Y, Z sind, während seine Bewegung der Bedingung $\varphi = c$ unterworfen ist.*

Die Kraft, deren Componenten $\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ sind, bezeichnen wir dem Sprachgebrauche gemäss als eine Folge davon, dass der Punkt gezwungen ist, der Bedingung $\varphi = c$ entsprechend sich zu bewegen. Ihre Richtung ist senkrecht auf der Fläche, die bei *dem* Werthe, den t in dem betrachteten Augenblicke hat, durch die Gleichung

$$\varphi = c$$

dargestellt ist; denn, wenn n eine Normale dieser Fläche bezeichnet, die durch den Punkt (x, y, z) geht, so ist bekanntlich

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \cos(nx) : \cos(ny) : \cos(nz);$$

ihre Grösse ist der absolute Werth von

$$\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}.$$

Nicht unerwähnt möge bleiben, dass die Gleichungen 4) nicht die einzigen sind, welche die beiden Eigenschaften haben, die für sie nachgewiesen sind: zu gelten für jedes Coordinatensystem und jede Form der Bedingungsgleichung. Dieselben Eigenschaften haben die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= X + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + h\frac{dx}{dt}\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}\right) \\
\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + h\frac{dy}{dt}\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}\right)
\end{aligned} \tag{7}
$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + h \frac{dz}{dt} \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}\right),$$

wenn h eine Constante oder eine beliebig gegebene Function von $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$ bedeutet. Diese Gleichungen sind, wenn sie an Stelle der Gleichungen 4) gesetzt werden, wirklich wohl geeignet zur Beschreibung gewisser Bewegungen, solcher Bewegungen nämlich, bei denen, wie man sagt, eine *Reibung* sich merklich macht. Wir halten indessen die Gleichungen 4) fest wegen ihrer grösseren Einfachheit.

§ 2.

Die im vorigen § besprochene Methode wollen wir zur Beschreibung der Bewegung eines *einfachen Pendels* benutzen. Es besteht ein solches aus einem Körper, der als ein materieller Punkt betrachtet wird und der an einem festen Punkte mit Hülfe eines Fadens aufgehängt ist. Der Faden wird als unausdehnbar angenommen, sein Einfluss im Uebrigen vernachlässigt. Wird der Körper in geeigneter Weise in Bewegung gesetzt, so bewegt er sich so, dass er auf der Kugelfläche bleibt, die mit der Länge des Fadens um den Aufhängungspunkt beschrieben ist. Eine solche Bewegung wird vorausgesetzt. Sind ferner noch die Annahmen erfüllt, die bei der Untersuchung eines freien, geworfenen Körpers im § 5 der ersten Vorlesung ausgesprochen sind, so ist die Bewegung des Pendelkörpers durch die Aussage beschrieben, dass auf ihn die Schwere wirkt, während er gezwungen ist auf der genannten Kugelfläche zu bleiben.

Führt man ein Coordinatensystem ein, dessen Anfangspunkt der Aufhängepunkt, dessen z-Achse vertical abwärts gerichtet ist, und nennt l die Länge des Fadens, so ist diese Behauptung durch die folgenden Gleichungen ausgesprochen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \lambda x \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \lambda y \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= g + \lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 &= l^2. \end{aligned} \qquad 8)$$

Aus der letzten von diesen folgt

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$

und daher aus den 3 ersten, indem man sie mit dx, dy, dz multiplicirt, addirt und integrirt:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (2gz + h)\,dt^2, \qquad 9)$$

wo h eine willkürliche Constante bedeutet.

Multiplicirt man die beiden ersten der Gleichungen 8) mit $-y$ und $+x$, addirt sie und integrirt, so erhält man

$$x\,dy - y\,dx = c\,dt, \tag{10}$$

wo c eine zweite willkürliche Constante ist.

Nun führe man statt der rechtwinkligen Coordinaten Polarcoordinaten ein; man setze:

$$\begin{aligned} x &= l \sin\vartheta \cos w \\ y &= l \sin\vartheta \sin w \\ z &= l \cos\vartheta, \end{aligned} \tag{11}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} dx &= l \cos\vartheta \cos w\, d\vartheta - l \sin\vartheta \sin w\, dw \\ dy &= l \cos\vartheta \sin w\, d\vartheta + l \sin\vartheta \cos w\, dw \\ dz &= - l \sin\vartheta\, d\vartheta. \end{aligned}$$

Man hat daher

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 &= l^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, dw^2) \\ x\,dy - y\,dx &= l^2 \sin^2\vartheta\, dw, \end{aligned}$$

und die Gleichungen 9) und 10) werden:

$$\begin{aligned} l^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, dw^2) &= (2gl \cos\vartheta + h)\, dt^2 \\ l^2 \sin^2\vartheta\, dw &= c\,dt. \end{aligned} \tag{12}$$

Hieraus folgt

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2\,\frac{g}{l} \cos\vartheta + \frac{h}{l^2} - \frac{c^2}{l^4 \sin^2\vartheta}\cdot$$

Durch Integration dieser Gleichung kann man ϑ als elliptische Function von t ausdrücken. Hat man ϑ gefunden, so ergiebt sich w durch nochmalige Integration aus der zweiten der Gleichungen 12).

Ist $c = 0$, so folgt aus der zweiten der Gleichungen 12) $w = \text{const.}$, nach 11) geschieht die Bewegung dann in einer verticalen Ebene und nach der ersten der Gleichungen 12) ist

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2\,\frac{g}{l} \cos\vartheta + \frac{h}{l^2}\cdot \tag{13}$$

Je nach dem Werthe von h ist die durch diese Gleichung dargestellte Bewegung der Art, dass der absolute Werth von ϑ mit der Zeit unbegrenzt wächst, oder der Art, dass ϑ zwischen einem Minimum und einem Maximum hin und her geht. Wir wollen nur den zweiten Fall verfolgen, den Fall, dass das Pendel *Schwingungen* ausführt. Bezeichnen wir die *Amplitude* der Schwingungen, d. h. den grössten Werth von ϑ, durch α, so ist $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$ für $\vartheta = \alpha$, also nach 13):

$$0 = 2\,\frac{g}{l} \cos\alpha + \frac{h}{l^2}\cdot$$

Zieht man diese Gleichung von 13) ab, so erhält man

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2\,\frac{g}{l}\,(\cos\vartheta - \cos\alpha)$$

$$= 4\,\frac{g}{l}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right).$$

Setzt man

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\,\sin\psi,$$

so ergiebt sich hieraus

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{d\psi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\,\sin^2\psi}}.$$

Ist T die Dauer einer einfachen Schwingung, so findet man T, indem man diese Gleichung von $\vartheta = -\alpha$ bis $\vartheta = +\alpha$, d. h. von $\psi = -\frac{\pi}{2}$ bis $\psi = +\frac{\pi}{2}$ integrirt; es ist also

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}}\,2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\,\sin^2\psi}}.$$

Ist α nur klein, so ist bei Vernachlässigung seiner vierten Potenz

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\,\sin^2\psi}} = 1 + \tfrac{1}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\,\sin^2\psi;$$

da ferner

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\psi\,d\psi = \frac{\pi}{4},$$

so wird dann

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \tfrac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

oder auch

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right).$$

Ist α unendlich klein, so wird

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Der Fall unendlich kleiner Schwingungen lässt sich auch ohne die Voraussetzung, dass sie ebene sind, leicht vollständig behandeln. Wenn die Schwingungen, d. h. wenn x und y unendlich klein sind, so ist es auch $l - z$; und zwar ist dieses von der zweiten Ordnung, wenn jene von der ersten Ordnung unendlich klein sind, wie aus der vierten der Gleichungen 8) hervorgeht. Die dritte dieser Gleichungen spricht daher aus, dass bis auf Grössen der zweiten Ordnung

$$\lambda = -\frac{g}{l}$$

ist, und die beiden ersten geben:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{g}{l}y.$$

Die allgemeinen Integrale dieser Differentialgleichungen sind:

$$x = a \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + a' \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$$

$$y = b \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + b' \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t,$$

wo a, b, a', b' willkürliche Constanten bedeuten. Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen t, indem man die in ihnen vorkommenden Sinus und Cosinus berechnet und die Summe der Quadrate der gefundenen Werthe $= 1$ setzt, so findet man als Gleichung der Bahn des schweren Punktes die Gleichung einer Ellipse. Die Dauer eines Umlaufs ist, wie sich aus den Ausdrücken von x und y ergiebt,

$$= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

§ 3.

Wir fassen jetzt den allgemeinsten Fall ins Auge, der in der Mechanik materieller Punkte zu betrachten ist. Es handle sich um ein System materieller Punkte, die wir 1, 2, . . . nennen wollen. Die Buchstaben x, y, z mit den Indices 1, 2, . . . mögen ihre Coordinaten zur Zeit t bezeichnen. Zwischen diesen und der Zeit sollen von vorn herein n von einander unabhängige Gleichungen bekannt sein, die wir

$$\varphi = c, \quad \psi = e, \ldots \tag{14}$$

schreiben, indem wir unter φ, ψ, . . Functionen der sämmtlichen Coordinaten und der Zeit, unter c, e, . . Constanten verstehen. Den Differentialgleichungen der Bewegung der Punkte wollen wir eine Form geben, die der Form entspricht, in der wir im § 1 die Differentialgleichungen der Bewegung *eines* Punktes, der *einer* Bedingung unterworfen ist, aufgestellt haben. Die Bewegung eines jeden Punktes stellen wir als durch $n + 1$ Kräfte bedingt dar; von den sämmtlichen in Betracht kommenden Kräften soll für jeden Punkt *eine* vollständig angegeben, für die übrigen sollen Ausdrücke aufgestellt werden, die zusammen n unbekannte Grössen enthalten. Wir setzen nämlich

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = X_1 + \frac{\lambda}{m_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\mu}{m_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \cdots$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = Y_1 + \frac{\lambda}{m_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + \frac{\mu}{m_1}\frac{\partial\psi}{\partial y_1} + \cdots$$

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} = Z_1 + \frac{\lambda}{m_1}\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} + \frac{\mu}{m_1}\frac{\partial \psi}{\partial z_1} + \cdot\cdot \tag{15}$$
$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = X_2 + \frac{\lambda}{m_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\mu}{m_2}\frac{\partial \psi}{\partial y_2} + \cdot\cdot$$
$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} = Y_2 + \frac{\lambda}{m_2}\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} + \frac{\mu}{m_2}\frac{\partial \psi}{\partial y_2} + \cdot\cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, . . sind hier die Componenten der Kräfte, die in jedem Falle, auf den die Gleichungen angewendet werden, vollständig angegeben werden sollen als Functionen der Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten der Punkte und der Zeit; m_1, m_2, . . positive Constanten, die gleichfalls angegeben werden sollen; λ, μ, . . die n Unbekannten, die ihre eindeutige Bestimmung finden durch die n, in Bezug auf sie linearen, Gleichungen

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\psi}{dt^2} = 0, \ldots,$$

die nach dem Muster der Gleichung 3) zu entwickeln sind.

Die Gleichungen 15) gelten für jedes rechtwinklige Coordinatensystem. Der Beweis hierfür ist in derselben Weise zu führen, wie die entsprechende Thatsache in § 1 bewiesen ist, dadurch, dass die Gleichungen, die auf jeden Punkt des Systems sich beziehen, mit α_1, α_2, α_3 oder β_1, β_2, β_3 oder γ_1, γ_2, γ_3 multiplicirt und jedesmal addirt werden.

Die Gleichungen 15) gelten auch für jede *Form* der Bedingungsgleichungen, mit welchem Namen wir wieder die Gleichungen 14) belegen; d. h. sie gelten auch, wenn man diese ersetzt durch die Gleichungen

$$F = C, \quad G = E, \ldots$$

wo F, G, . . n von einander unabhängige Functionen von φ, ψ, . ., und C, E, . . die constanten Werthe bedeuten, die sie annehmen für $\varphi = c$, $\psi = e$, . . . Für die Grössen λ, μ, . . hat man dann nur andere zu setzen, die L, M, . . genannt werden mögen und die aus den Gleichungen

$$\lambda = L\frac{\partial F}{\partial \varphi} + M\frac{\partial G}{\partial \varphi} + \cdots$$
$$\mu = L\frac{\partial F}{\partial \psi} + M\frac{\partial G}{\partial \psi} + \cdots \tag{16}$$

zu bestimmen sind. Die Richtigkeit dieser Behauptung leuchtet ein, wenn man erwägt, dass, wenn x irgend eine der Grössen x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, . . . bedeutet,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \cdots$$
$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \cdots$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

also, wenn die Gleichungen 16) erfüllt sind:

$$L\frac{\partial F}{\partial x} + M\frac{\partial G}{\partial x} + \cdots = \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu\frac{\partial \psi}{\partial x} + \cdots$$

ist.

Wir bemerken, dass die Geltung der Gleichungen 15) für jedes Coordinatensystem oder für jede Form der Bedingungsgleichungen aufhören würde, wenn statt des gleichen Factors $\frac{1}{m_1}$, der in den auf den ersten Punkt bezüglichen Gleichungen vorkommt, verschiedene Factoren in einer Verticalreihe oder in einer Horizontalreihe gewählt wären. Auf der Hand liegt übrigens, dass die Gleichungen 15) nicht die einzigen sind, die die eben bewiesenen Eigenschaften besitzen; nach dem Muster der Gleichungen 7) kann man leicht solche bilden, die sie auch haben; und die Gleichungen 15) verlieren sie auch nicht, wenn man die Grössen $m_1, m_2, \ldots$ nicht als constant, sondern als beliebig veränderlich annimmt. Durch eine solche Verallgemeinerung der in Rede stehenden Gleichungen würde man aber, der Erfahrung zufolge, für die Einfachheit der Beschreibung der natürlichen Bewegungen nichts gewinnen.

Die Grössen $m_1, m_2, \ldots$ nennen wir die *Massen* der materiellen Punkte 1, 2, . .

Mit der Form der Gleichungen 15) und der Bezeichnung nehmen wir noch eine Veränderung vor. Durch Multiplication mit $m_1, m_2, \ldots$ schaffen wir die in ihnen vorkommenden Nenner fort; es treten dann die Producte $m_1 X_1$, $m_1 Y_1$, $m_1 Z_1$, $m_2 X_2$, $m_2 Y_2, \ldots$ auf; diese Producte sollen *nun* durch $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, \ldots$ selbst bezeichnet und die Componenten nach den Coordinatenachsen der *bewegenden Kräfte* genannt werden, die auf die Massen $m_1, m_2, \ldots$ oder die materiellen Punkte 1, 2, . . wirken. Ueber den Begriff einer bewegenden Kraft, den wir hiermit einführen, können wir Folgendes sagen: Eine bewegende Kraft entspricht immer einer beschleunigenden; ihr kommt wie dieser eine gewisse Grösse und eine gewisse Richtung zu; die Richtungen beider stimmen überein; die Grösse der bewegenden Kraft ist gleich der Grösse der beschleunigenden, multiplicirt mit der Masse, auf die sie wirkt; bewegende Kräfte, die gleichzeitig auf einen Punkt wirken, setzen sich gerade so zusammen, wie beschleunigende. Es ist bisher ausschliesslich von beschleunigenden Kräften die Rede gewesen; es wird von jetzt an ausschliesslich von bewegenden Kräften die Rede sein und der Kürze wegen das Beiwort *bewegend* fortgelassen werden.

Wenn wir sagen, *dass auf ein System von Punkten, deren Massen* $m_1, m_2, \ldots$ *sind, und für welche die Bedingungen* $\varphi = c$, $\psi = e, \ldots$ *bestehen, Kräfte wirken, deren Componenten* $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, \ldots$ *sind*, so soll dadurch hiernach ausgedrückt sein, dass die Bewegung

der Punkte den folgenden Gleichungen gemäss geschieht:

$$
\begin{aligned}
m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= X_1 + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \cdot \\
m_1 \frac{d^2 y_1}{dt_2} &= Y_1 + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y_1} + \cdot \\
m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= Z_1 + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial z_1} + \cdot \\
m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= X_2 + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \cdot \\
m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} &= Y_2 + \lambda \frac{\partial \varphi}{d y_2} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y_2} + \cdot \\
\cdot \quad & \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\
\varphi = c, \quad & \psi = e, \ldots
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Es sind dieses die Grundgleichungen der Mechanik materieller Punkte, die zuerst von Lagrange in seiner analytischen Mechanik aufgestellt sind.

Die Grössen $\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$, $\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}$, $\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z_1}$ sind die Componenten einer Kraft, die auf den Punkt 1 wirkt; man bezeichnet sie als eine Folge davon, dass der Punkt 1 gezwungen ist, sich der Bedingung $\varphi = c$ gemäss zu bewegen. Es sei, um ein naheliegendes Beispiel zu betrachten,

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2\right),$$

wodurch ausgedrückt ist, dass die Punkte 1 und 2 mit einander fest verbunden sind. In Folge dieser Verbindung wirken dann, wie man sagt, auf die Punkte 1 und 2 Kräfte, deren Componenten

$$\lambda (x_1 - x_2), \quad \lambda (y_1 - y_2), \quad \lambda (z_1 - z_2)$$

und

$$\lambda (x_2 - x_1), \quad \lambda (y_2 - y_1), \quad \lambda (z_2 - z_1)$$

sind, Kräfte also, die dieselbe Grösse haben, und deren Richtungen die beiden Richtungen der Verbindungslinie von 1 und 2 sind.

Dritte Vorlesung.

(Das d'Alembert'sche Princip. Arbeit. Das Hamilton'sche Princip. Potential oder Kräftefunction. Gleichgewicht. Das Princip der virtuellen Verrückungen.)

§ 1.

Die in der vorigen Vorlesung für die Bewegung eines Systemes materieller Punkte aufgestellten Differentialgleichungen 17) setzen die Einführung eines rechtwinkligen Coordinatensystemes, welches beliebig gewählt sein kann, voraus. Dieselben lassen sich, wie nun gezeigt werden soll, auf eine Form bringen, bei welcher eine Beziehung auf ein solches Coordinatensystem gar nicht vorkommt.

Wir fassen die Lage der Punkte ins Auge, die einem bestimmten Werthe von t entspricht, und denken uns die Punkte aus dieser unendlich wenig verschoben. Dabei mögen die Coordinaten $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, \ldots$ resp. um $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x_2, \delta y_2, \ldots$ wachsen. Diese *Componenten der Verrückungen* sollen, ausser dem dass sie unendlich klein sind, nur *der* Bedingung genügen, dass sie mit den Bedingungsgleichungen $\varphi = c$, $\psi = e, \ldots$ vereinbar sind; damit ist gemeint, dass sie den Gleichungen

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta x = 0, \quad \sum \frac{\partial \psi}{\partial x} \delta x = 0, \ldots \qquad 1)$$

genügen, in denen x irgend eine der Grössen $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, \ldots$ bedeutet, und das Zeichen Σ andeutet, dass die Summe in Bezug auf alle diese zu nehmen ist. Solche Verrückungen nennt man *virtuelle* im Gegensatze zu den wirklichen, actuellen, die in einem Zeitelemente dt stattfinden. Es möge hervorgehoben werden, dass hierbei keineswegs der Fall ausgeschlossen ist, dass die Zeit in den Bedingungsgleichungen $\varphi = c$, $\psi = e, \ldots$ vorkommt, in welchem Falle der Ausdruck *die Verrückungen sollen mit diesen Gleichungen vereinbar sein* an sich keine bestimmte Bedeutung hat; seine Bedeutung wird dann erst festgesetzt durch die Gleichungen 1). Virtuelle Verrückungen sind dann solche, welche den Bedingungsgleichungen gemäss sind, wenn die Zeit in diesen als constant betrachtet wird. Ist z. B. ein Punkt gezwungen auf einer Kugelfläche zu bleiben, die mit gegebener Geschwindigkeit fortschreitet, so ist eine virtuelle Verrückung des Punktes eine solche, die ihn auf der *ruhenden* Kugel fortführen würde.

Multiplicirt man die Differentialgleichungen 17) der vorigen Vorlesung mit $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x_2, \delta y_2, \ldots$ und addirt sie, so erhält man bei Rücksicht auf die Gleichungen 1):

$$0 = \sum (m \frac{d^2 x}{dt^2} - X)\,\delta x + (m \frac{d^2 y}{dt^2} - Y)\,\delta y + (m \frac{d^2 z}{dt^2} - Z)\,\delta z, \quad 2)$$

wo die Summe in Bezug auf alle Punkte zu nehmen ist. Diese Gleichung ist, wenn man hinzufügt, dass sie für *alle* virtuellen Verrückungen gelten soll, ganz gleichbedeutend mit jenen Differentialgleichungen 17). Wir haben sie aus jenen hergeleitet, es lassen sich auch jene aus ihr herleiten, d. h. es lässt sich zeigen, dass es Grössen $\lambda, \mu, \ldots$ giebt, die die Gleichungen 17) erfüllen, wenn die Gleichung 2) für alle Werthe der δx besteht, die den Gleichungen 1) genügen. Es geschieht das durch eine Betrachtung, die der Theorie der linearen Functionen angehört.

Der durch die Gleichung 2) ausgesprochene Satz heisst das *d'Alembert'sche Princip.*

§ 2.

Wir wollen die Gleichung 2) noch umgestalten.

Den Werth von

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$$

nennt man die *Arbeit* der Kraft (X, Y, Z) für die Verrückung $(\delta x, \delta y, \delta z)$ ihres Angriffspunktes; dieselbe ist, wie man sieht, wenn man die Grösse der Kraft und die Grösse der Verrückung einführt, gleich dem Producte dieser beiden und dem Cosinus des Winkels, den die Richtungen beider mit einander bilden. Sie ist unabhängig von dem Coordinatensystem und ist positiv oder negativ, je nach dem Vorzeichen des genannten Cosinus. Hat man ein System von Kräften, die auf verschiedene Punkte wirken oder denselben Angriffspunkt haben, so nennt man die in Bezug auf sie genommene Summe

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$$

die *Arbeit des Systemes* für die gedachten Verrückungen. Haben die Kräfte denselben Angriffspunkt, so ist ihre Arbeit gleich der Arbeit ihrer Resultante, da die Componenten nach den Coordinatenachsen der Resultante gleich den Summen der entsprechenden Componenten der Einzelkräfte sind.

§ 3.

In der Gleichung 2) wollen wir

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = U' \quad 3)$$

setzen, also mit U' die Arbeit der Kräfte (X, Y, Z) für die gedachten Verrückungen bezeichnen.

Die Grössen x, y, z sind Functionen der Zeit; auch die Grössen $\delta x, \delta y, \delta z$ können und wollen wir als Functionen der Zeit ansehen, die nur unendlich klein sein und den Bedingungen 1) genügen müssen. Man hat dann

$$\frac{d^2 x}{dt^2}\,\delta x = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\,\delta x\right) - \frac{dx}{dt}\,\frac{d\delta x}{dt}. \tag{4}$$

Wenn bei gleich bleibendem Werthe von t sich x um δx ändert, so ändert sich auch $\frac{dx}{dt}$; wir werden den Zuwachs, den es erfährt, durch $\delta\frac{dx}{dt}$ bezeichnen. Aus dieser Definition folgt

$$\delta\frac{dx}{dt} = \frac{d(x+\delta x)}{dt} - \frac{dx}{dt} = \frac{d\delta x}{dt}.$$

Es ist daher

$$\frac{dx}{dt}\,\frac{d\delta x}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\delta\frac{dx}{dt} \text{ oder auch } = \tfrac{1}{2}\,\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

wenn allgemein durch Vorsetzen des Zeichens δ die Aenderung bezeichnet wird, die der dahinter stehende Ausdruck dadurch erleidet, dass x, y, z um $\delta x, \delta y, \delta z$ geändert werden. Die Gleichung 4) ist hiernach:

$$\frac{d^2 x}{dt^2}\,\delta x = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\,\delta x\right) - \tfrac{1}{2}\,\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

Für x kann hier auch y oder z gesetzt werden. Da ferner, wenn man die durch das Zeichen δ bezeichneten Aenderungen *Variationen* nennt, die Variation einer Summe gleich der Summe der Variationen ihrer Theile ist, so folgt hieraus

$$\begin{aligned}&\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right)\\ &= \frac{d}{dt}\sum m\left(\frac{dx}{dt}\,\delta x + \frac{dy}{dt}\,\delta y + \frac{dz}{dt}\,\delta z\right) - \delta\sum\frac{m}{2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d}\right)^2\right).\end{aligned} \tag{5}$$

Die in dem letzten Gliede dieser Gleichung vorkommende Summe nennen wir die *lebendige Kraft* des Systems und bezeichnen sie durch T; es ist dann

$$T = \tfrac{1}{2}\,\Sigma m v^2, \tag{6}$$

wenn v die Geschwindigkeit bedeutet. Hiernach und nach der Gleichung 3) wird die Gleichung 2):

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(\frac{dx}{dt}\,\delta x + \frac{dy}{dt}\,\delta y + \frac{dz}{dt}\,\delta z\right) = \delta T + U'. \tag{7}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung enthält keine Beziehung auf ein Coordinatensystem und auch die linke enthält eine solche nur scheinbar, da

$$\frac{dx}{dt}\,\delta x + \frac{dy}{dt}\,\delta y + \frac{dz}{dt}\,\delta z$$

das Product aus der Geschwindigkeit v in die Verrückung $(\delta x, \delta y, \delta z)$ und den Cosinus des Winkels ist, den die Richtungen beider mit einander bilden.

Mit der Gleichung 7) nehmen wir endlich nun noch die Aenderung vor, dass wir sie mit dt multipliciren und integriren zwischen 2 beliebig zu wählenden Werthen von t, die wir t_0 und t_1 nennen wollen. Wir erhalten dann

$$\left[\sum m \left(\frac{dx}{dt}\,\delta x + \frac{dy}{dt}\,\delta y + \frac{dz}{dt}\,\delta z\right)\right]_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} dt\,(\delta T + U'), \qquad 8)$$

wo das Zeichen auf der linken Seite des Gleichheitszeichens die Differenz der Werthe bedeutet, die der in den eckigen Klammern stehende Ausdruck für $t = t_1$ und $t = t_0$ annimmt. Nun wollen wir den Variationen δx, δy, δz die neue Beschränkung auflegen, dass sie sämmtlich für $t = t_1$ und $t = t_0$ verschwinden; dann wird

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} dt\,(\delta T + U'). \qquad 9)$$

Der Satz, dass diese Gleichung gelten muss für alle unendlich kleinen Variationen der Oerter der Punkte, welche mit den Bedingungen verträglich sind, denen die Bewegung unterworfen ist, und welche für $t = t_0$ und $t = t_1$ verschwinden, heisst das *Hamilton'sche Princip.* Wir haben dasselbe aus dem d'Alembert'schen Principe, d. h. aus der Gleichung 2) abgeleitet; überzeugen wir uns nun, dass auch das Umgekehrte möglich ist.

Bei Benutzung der in 3) und 6) gegebenen Definitionen und der identischen Gleichung 5) wird die Gleichung 9):

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum \left(m\,\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\delta x + \left(m\,\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\delta y + \left(m\,\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\delta z.$$

Erwägt man nun, dass die Werthe der δx, δy, δz für alle Zeitelemente bis auf eines, die in dem Intervall von $t = t_0$ bis $t = t_1$ liegen, $= 0$ angenommen, in diesem einen aber beliebigen virtuellen Verrückungen gleichgesetzt werden können, so sieht man ein, dass für dieses eine Zeitelement die Gleichung 2) bestehen muss; sie muss immer bestehen, da dieses Zeitelement beliebig gewählt werden kann.

Das Hamilton'sche Princip, das d'Alembert'sche und die Lagrangeschen Differentialgleichungen (die Gleichungen 17) der vorigen Vorlesung) sind daher vollkommen gleichbedeutend.

§ 4.

Der grosse Nutzen, den das Hamilton'sche Princip gewährt, beruht darauf, dass man mit seiner Hülfe in die Differentialgleichungen der Bewegung eines Systemes materieller Punkte statt der recht-

winkligen Coordinaten andere Variable verhältnissmässig leicht einführen kann.

Es seien $p_1, p_2, \ldots$ irgend welche Grössen, die die Oerter der Punkte bestimmen; durch welche, mit andern Worten, die sämmtlichen x, y, z ohne Hinzuziehung anderer Variabeln ausdrückbar sind. Ist x eine der rechtwinkligen Coordinaten eines der Punkte, so ist dann

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial x}{\partial p_2}\frac{dp_2}{dt} + \cdot$$

und

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial p_1}\delta p_1 + \frac{\partial x}{\partial p_2}\delta p_2 + \cdot,$$

wo die Differentialquotienten $\frac{\partial x}{\partial p_1}, \frac{\partial x}{\partial p_2}, \cdots$ als Functionen von $p_1, p_2, \cdots$ zu denken sind. Die Kraftcomponenten X, Y, Z, die in dem in 3) für U' gegebenen Ausdrucke vorkommen und im Allgemeinen Functionen der Grössen x, $\frac{dx}{dt}$ und t sind, werden daher, bei Einführung der p, Functionen der Grössen p, $\frac{dp}{dt}$ und t; U' selbst also eine lineare homogene Function der δp, deren Coefficienten von den p, $\frac{dp}{dt}$ und t abhängen. Ferner wird T eine homogene Function zweiten Grades der $\frac{dp}{dt}$, deren Coefficienten von den p abhängen; δT also eine homogene lineare Function der Grössen δp und $\delta \frac{dp}{dt}$ (oder, was dasselbe ist, $\frac{d\delta p}{dt}$), deren Coefficienten die Grössen p und $\frac{dp}{dt}$ enthalten. Es ist hiernach $\delta T + U'$ von der Form

$$\sum \left(P\delta p + Q\frac{d\delta p}{dt}\right), \tag{10)}$$

wo die Summe in Bezug auf alle δp zu nehmen ist, und wo P und Q abhängig sind von den Grössen p, $\frac{dp}{dt}$ und t.

Die Grössen p brauchen nicht unabhängig von einander zu sein; es können zwischen ihnen und der Zeit Bedingungsgleichungen bestehen. Die Gleichung 9) soll dann nur erfüllt werden für virtuelle Variationen δp, d. h. für solche, die diesen Bedingungsgleichungen entsprechen, wenn in ihnen die Zeit als constant betrachtet wird. Diese δp lassen sich darstellen als lineare homogene Functionen von voneinander unabhängigen, unendlich kleinen Grössen, die $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ genannt werden mögen, und deren Anzahl gleich ist der Differenz der Anzahl der Grössen p und der Anzahl der zwischen diesen bestehenden Bedingungsgleichungen; die Coefficienten der Grössen ε in diesen Functionen hängen ab von den Grössen p und der Zeit. Differentiirt man die Gleichungen, welche die Grössen δp in der gedachten Weise darstellen, nach t, so erhält man für die Grössen $\frac{d\delta p}{dt}$

lineare homogene Functionen der Grössen ε und $\frac{d\varepsilon}{dt}$, deren Coefficienten die p, $\frac{dp}{dt}$ und t enthalten. Die Folge davon ist, dass der in 10) für $\delta T + U'$ aufgestellte Ausdruck

$$=\sum\left(R\varepsilon + S\frac{d\varepsilon}{dt}\right)$$

wird, wo die Summe in Bezug auf alle ε zu nehmen ist und die Grössen R und S von den p, $\frac{dp}{dt}$ und von t abhängen. Nach 9) muss daher

$$0=\int_{t_0}^{t_1} dt\sum\left(R\varepsilon + S\frac{d\varepsilon}{dt}\right) \tag{11}$$

für beliebige unendlich kleine ε sein, die nur der Bedingung genügen, für $t = t_0$ und $= t_1$ zu verschwinden. Es ist aber

$$S\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d}{dt}(S\varepsilon) - \frac{dS}{dt}\varepsilon$$

und daher die Gleichung 11)

$$0=\int_{t_0}^{t_1} dt\sum\left(R - \frac{dS}{dt}\right)\varepsilon.$$

Da nun die Grössen ε ganz beliebig gewählt werden können, abgesehen davon, dass sie für die Grenzen des Integrales verschwinden sollen, so folgt hieraus durch eine Schlussweise, wie sie bei der Ableitung des d'Alembert'schen Principes aus dem Hamilton'schen angewandt wurde, dass der Coefficient eines jeden ε verschwinden muss, dass also die Differentialgleichungen der Bewegung die Gleichungen

$$\frac{dS}{dt} = R$$

sind.

§ 5.

In einem Falle, der oft sich der Betrachtung darbietet, lässt die Gleichung 9), die das Hamilton'sche Princip ausspricht, sich noch auf eine etwas einfachere Form bringen. Der Fall ist der, dass die durch die Gleichung 3) definirte Arbeit U' gleich der, der gedachten Verrückung entsprechenden Variation einer Function der Grössen, welche die Lagen der Punkte bestimmen, und der Zeit ist. Eine solche Function, wenn sie existirt, heisst das *Potential* der Kräfte oder auch die *Kräftefunction*. Bezeichnen wir sie mit U, so ist also

$$U' = \delta U \tag{12}$$

und die Gleichung 9) lässt sich schreiben

$$0 = \delta \int_{t_0}^{t_1} dt\,(T + U). \tag{13}$$

Nennt man das Integral, dessen Variation hiernach verschwinden soll, Ω, so ist diese Gleichung eine nothwendige Bedingung dafür, dass Ω ein Maximum oder ein Minimum ist. Ist x eine der rechtwinkligen Coordinaten eines der Punkte, und wäre $\delta\Omega$ nicht Null für ein System virtueller Variationen δx, so erhielte man aus diesem durch Umkehrung aller Vorzeichen ein zweites System virtueller Variationen, und zwar eines, für welches $\delta\Omega$ den dem früheren entgegengesetzten Werth hätte. Durch Variation der Grössen x könnte daher Ω sowohl vergrössert als verkleinert werden, wäre also weder ein Maximum noch ein Minimum. Es ist aber die Gleichung 13) nicht die hinreichende Bedingung dafür, dass Ω ein Maximum oder ein Minimum ist.

Ist wiederum x eine der Coordinaten eines der Punkte, und X die entsprechende Componente der auf diesen wirkenden Kraft, so ist nach 12) und 3)

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}. \tag{14}$$

Es ist hieraus ersichtlich, dass, wenn ein Potential existirt, die Kräfte nur von den Coordinaten und der Zeit, wie das Potential selbst, abhängen können, nicht aber von den Geschwindigkeiten.

Aus 14) folgt auch, dass, wenn zwei Systeme von Kräften, von denen einem jeden ein Potential zukommt, zusammen wirken, auch ein Potential existirt, und zwar eines, das die Summe der Potentiale ist, die den einzelnen Systemen entsprechen.

Sind die Kräfte vollständig und als einwerthige Functionen der Coordinaten und der Zeit gegeben, so findet man das Potential, wenn ein solches existirt, durch Integration nach den Coordinaten; dabei tritt eine willkürliche, additive Constante auf; es wird das Potential also nur bis auf eine additive, von den Coordinaten unabhängige Grösse, die aber willkürlich gewählt werden kann, bekannt. Dabei kann auch der Fall eintreten, dass das Potential als eine mehrwerthige Function sich ergiebt.

Beispiele, in denen ein Potential vorhanden ist, haben wir einige schon zu betrachten gehabt.

Bei einem Punkte, auf den die Schwere g wirkt, und dessen Masse m ist, ist, wenn die z-Achse vertical abwärts gekehrt ist,

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = mg.$$

Diese Gleichungen lassen sich zusammenfassen in die eine

$$U = mgz.$$

Bei einem Planeten ist für die Kraft, mit der die Sonne ihn anzieht,

$$X = -mM\frac{x}{r^3}, \quad Y = -mM\frac{y}{r^3}, \quad Z = -mM\frac{z}{r^3},$$

wenn

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

ist, m die Masse des Planeten, M die Masse der Sonne bei passend gewählter Einheit der Masse bedeutet, und der Anfangspunkt der Coordinaten in der als ruhend gedachten Sonne liegt. Hier kann man setzen

$$U = \frac{mM}{r}.$$

Bei einer beliebigen Zahl von Himmelskörpern, die nach dem Newton'schen Gesetze auf einander wirken, gilt bei einer Bezeichnungsweise, wie sie schon am Ende der ersten Vorlesung benutzt ist, die Gleichung

$$U = \sum \frac{m_1 m_2}{r_{12}},$$

wo die Summe in Bezug auf alle Combinationen zu je zweien der Massen $m_1, \ldots m_2$ zu nehmen ist.

§ 6.

Die Ruhe ist ein specieller Fall der Bewegung. Den Theil der Mechanik, der sich mit ihm beschäftigt, hat man *Statik* genannt, den anderen *Dynamik*. Um auf den Fall der Ruhe zu kommen, müssen wir annehmen, dass die Anfangsgeschwindigkeiten Null sind, dass in den Bedingungen $\varphi = c$, $\psi = e, \ldots$ die Zeit nicht vorkommt, und dass die wirkenden Kräfte der Art sind, dass die Beschleunigungen, die sie ergeben, verschwinden. Von Kräften dieser Art sagt man, dass sie mit einander im *Gleichgewichte* stehen. Als Bedingung des Gleichgewichts folgen aus den Lagrange'schen Gleichungen 17) der zweiten Vorlesung die Gleichungen

$$\begin{aligned}
0 &= X_1 + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \cdot \\
0 &= Y_1 + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial y_1} + \cdot \\
0 &= Z_1 + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z_1} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial z_1} + \cdot \\
0 &= X_2 + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \cdot \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\varphi &= c, \quad \psi = e, \ldots \quad .
\end{aligned}$$

Nach dem d'Alembert'schen Principe, also der Gleichung 2), ist dieselbe Bedingung die, dass für alle virtuellen Verrückungen

$$0 = \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$$

ist, d. h. die Arbeit der sämmtlichen Kräfte verschwindet. Der Satz, dass dieses die Bedingung für das Gleichgewicht ist, führt den Namen des *Princips der virtuellen Verrückungen* (oder auch *Geschwindigkeiten*). Haben die Kräfte ein Potential U, so ist die Bedingung für ihr Gleichgewicht die, dass für jede virtuelle Verrückung der Punkte

$$0 = \delta U$$

ist; eine Gleichung, die erfüllt sein muss, wenn U ein Maximum oder ein Minimum ist, die aber nicht immer ein solches Maximum oder Minimum zur Folge hat.

Vierte Vorlesung.

(Satz von der lebendigen Kraft. Stabilität eines Gleichgewichts. Sätze von der Bewegung des Schwerpunktes. Bewegung eines Systemes um seinen Schwerpunkt. Flächensätze. Drehungsmomente.)

§ 1.

Aus den allgemeinen Gleichungen für die Bewegung eines Systemes materieller Punkte, die wir in den beiden letzten Vorlesungen aufgestellt haben, wollen wir nun unter gewissen Voraussetzungen, die die Bedingungen betreffen, welchen die Bewegung unterworfen ist, einige Schlüsse ziehen.

Die erste Voraussetzung, die wir verfolgen, ist die, dass die Bedingungen die Zeit nicht enthalten. Dann sind die Verrückungen, welche die Punkte bei ihrer Bewegung in einem Zeitelement dt erleiden, virtuelle Verrückungen, wie aus der Definition hervorgeht, die von diesen in den Gleichungen 1) der dritten Vorlesung gegeben ist. In den dort ausgeführten Rechnungen kann man daher überall statt des Zeichens δ das Zeichen d setzen, welches sich auf die Veränderungen bezieht, die bei der betrachteten Bewegung in dem Zeitelemente dt stattfinden. Thut man das in der Gleichung 2) und integrirt dieselbe, so findet man

$$T_1 - T_0 = \int_{t_0}^{t_1} \sum (X dx + Y dy + Z dz), \qquad 1)$$

wenn T_0 und T_1 die Werthe der lebendigen Kraft zu den beliebig gewählten Zeiten t_0 und t_1 bedeuten. Es ist der Begriff der Arbeit, durch die Gleichung 3) der dritten Vorlesung, bisher nur für unendlich kleine Verrückungen definirt; wir verallgemeinern diesen Begriff jetzt; wir wollen auch von der Arbeit von Kräften für *endliche* Verschiebungen ihrer Angriffspunkte sprechen und darunter verstehen die Summe der Werthe, die die Arbeit für die unendlich kleinen Verschiebungen hat, aus welchen die endlichen zusammengesetzt werden können. Die Gleichung 1) lässt sich dann dahin aussprechen, dass der Zuwachs, den die lebendige Kraft des Systemes in irgend einem Zeitintervall erleidet, gleich der Arbeit der wirkenden Kräfte für die Verschiebungen ist, die die Punkte in diesem Zeitintervall

erfahren. Dieser Satz wird der *Satz von der lebendigen Kraft* genannt.

Haben die wirkenden Kräfte ein Potential, U, und enthält dieses die Zeit nicht, so ist die rechte Seite der Gleichung 1) die Differenz der Werthe, die U für $t = t_1$ und $t = t_0$ hat; die Gleichung lässt sich daher schreiben

$$T = U + h, \tag{2}$$

wo h eine Constante bedeutet. Ist U eine einwerthige Function, so folgt hieraus, dass, wenn alle Punkte des Systemes in Lagen zurückgekehrt sind, die sie schon früher einmal hatten, auch die lebendige Kraft den Werth wieder angenommen hat, den sie damals besass. Dieser Satz ist unter dem Namen des Satzes *von der Erhaltung der lebendigen Kraft* bekannt.

Wirken keine Kräfte oder stehen die wirkenden Kräfte immer im Gleichgewicht, so ist die lebendige Kraft constant.

§ 2.

Von der Gleichung 2) wollen wir nun auf die Lehre vom Gleichgewicht eine Anwendung machen, die von Dirichlet angegeben ist (Crelle's Journal, Bd. 32, p. 85). Bei der in der vorigen Vorlesung gegebenen Definition des Gleichgewichts ist bereits angeführt, dass von einem solchen nur die Rede ist, wenn die Bedingungen von der Zeit unabhängig sind, die Voraussetzung also erfüllt ist, die den Betrachtungen des vorigen § zu Grunde liegt. Um die Gleichung 2) anwenden zu können, nehmen wir ferner an, dass die wirkenden Kräfte ein Potential, U, haben, das die Zeit nicht enthält. Nach einer am Schlusse der vorigen Vorlesung gemachten Bemerkung findet dann ein Gleichgewicht zwischen den Kräften für eine Lage des Systemes statt, für welche U ein Maximum ist. Für eine solche Lage hat das Gleichgewicht eine ausgezeichnete Eigenschaft, die ihm fehlt, wenn U statt eines Maximums ein Minimum oder weder das eine noch das andere ist, eine Eigenschaft, in Folge deren es ein *stabiles* genannt wird. Um diese Eigenschaft zu erkennen, denken wir uns das System zur Zeit $t = 0$ in einer Lage, die unendlich wenig von der gedachten Gleichgewichtslage abweicht, und nehmen an, dass alle Punkte unendlich kleine Geschwindigkeiten besitzen. Es sei U_m der Maximumswerth von U, der also der Gleichgewichtslage entspricht. Nach der Gleichung 2) ist dann

$$T + (U_m - U)$$

eine Constante, und zwar eine unendlich kleine Constante, da für $t = 0$ sowohl T als $U_m - U$ unendlich klein sind. Beachtet man nun, dass T eine positive Grösse ist, so kann man hieraus schliessen, dass

$U_m - U$ im Laufe der Zeit nie einen positiven endlichen Werth annehmen kann. Führt man aber das System aus der Gleichgewichtslage, oder einer dieser unendlich nahen, über in irgend eine um etwas Endliches verschiedene Lage, so durchläuft, wie aus dem Begriffe des Maximums sich ergiebt, $U_m - U$ endliche positive Werthe. Daraus folgt, dass bei den gemachten Annahmen das System sich nur unendlich wenig von der Gleichgewichtslage entfernt. Dabei bleibt auch T, mithin die Geschwindigkeit eines jeden Punktes unendlich klein.

§ 3.

Wir wollen nun annehmen, dass die Bedingungen, denen die Bewegung der Punkte unterworfen ist, der Art sind, dass sie eine Verschiebung dieser in der Richtung der x-Achse ohne Aenderung ihrer relativen Lage gestatten. Auf eine solche Verschiebung, deren Grösse u' genannt werden möge, wollen wir die Gleichung 2) der dritten Vorlesung, welche das d'Alembert'sche Princip ausspricht, anwenden. Wir haben dann in dieser

$$\delta x = u', \quad \delta y = 0, \quad \delta z = 0$$

zu setzen; dadurch erhalten wir bei Fortlassung des Factors u':

$$\sum m \frac{d^2 x}{dt^2} = \Sigma X. \tag{3}$$

Wir merken an, dass die Arbeit der wirkenden Kräfte für die gedachte Verrückung

$$= u' \Sigma X \tag{4}$$

ist.

Ist eine Verschiebung des Systemes ohne Aenderung der relativen Lage der Punkte auch in der Richtung der y-Achse und der z-Achse möglich, so findet man ebenso:

$$\sum m \frac{d^2 y}{dt^2} = \Sigma Y \quad \text{und} \quad \sum m \frac{d^2 z}{dt^2} = \Sigma Z. \tag{5}$$

Wir nehmen mit diesen Gleichungen noch eine Veränderung durch die Einführung einiger neuer Zeichen vor. Wir setzen:

$$M = \Sigma m,$$
$$M\xi = \Sigma m x, \quad M\eta = \Sigma m y, \quad M\zeta = \Sigma m z; \tag{6}$$

man nennt dann M die *Masse des Systemes*, ξ, η, ζ die Coordinaten seines *Schwerpunktes*. Es ist einleuchtend, dass nach dieser Definition der Schwerpunkt eines Systemes unabhängig von dem Coordinatensysteme ist, das man zu seiner Bestimmung benutzt; denn führt man neben dem System der x, y, z ein zweites, das der x', y', z' ein, wie wir es schon mehrmals gethan haben, multiplicirt die Gleichungen 1) der ersten Vorlesung, die dann gelten, mit m, summirt in Bezug auf

alle Punkte des Systemes und setzt dann, entsprechend den Gleichungen 6):

$$M\xi' = \Sigma mx', \quad M\eta' = \Sigma my', \quad M\zeta' = \Sigma mz',$$

so erhält man durch Division mit M:

$$\begin{aligned} \xi' &= a + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta \\ \eta' &= b + \beta_1\xi + \beta_2\eta + \beta_3\zeta \\ \zeta' &= c + \gamma_1\xi + \gamma_2\eta + \gamma_3\zeta, \end{aligned}$$

also diejenigen Gleichungen, welche ausdrücken, dass ξ', η', ζ' und ξ, η, ζ die Coordinaten *desselben* Punktes in den beiden benutzten Systemen sind.

Da die Massen positive Grössen sind, so ist der Schwerpunkt eines Systemes von Punkten ein gewisser *mittlerer* Punkt; d. h. jede Coordinate desselben liegt zwischen der kleinsten und der grössten der entsprechenden Coordinaten der einzelnen Punkte.

Es ist nützlich zu bemerken, dass bei der Berechnung der Lage des Schwerpunktes gegebener Massen beliebige Gruppen dieser in ihren Schwerpunkten concentrirt gedacht werden können; und dass der Schwerpunkt von Massen, die auf einer Geraden liegen, auf derselben Geraden sich befindet. Die Richtigkeit der ersten Behauptung folgt unmittelbar aus der in den Gleichungen 6) enthaltenen Definition; die der zweiten ergiebt sich, wenn man hinzunimmt, dass die Gerade, auf der die Massen liegen sollen, zur x-Achse genommen werden kann, wobei dann $y = 0$, $z = 0$, also auch $\eta = 0$ und $\zeta = 0$ wird.

Bei Benutzung der nun definirten Zeichen werden die Gleichungen 3) und 5):

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma X, \quad M\frac{d^2\eta}{dt^2} = \Sigma Y, \quad M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \Sigma Z; \qquad 7)$$

es sind hierdurch die sogenannten *Sätze von der Bewegung des Schwerpunkts* ausgesprochen. Man kann diese in den einen Satz zusammenziehen, dass der Schwerpunkt eines Systemes von Massen so sich bewegt, als ob in ihm alle Massen vereinigt wären und auf ihn alle Kräfte wirkten. Beliebigen Bedingungen kann dabei die Bewegung des Systemes unterworfen sein; nur müssen sie Verschiebungen in 3 auf einander senkrechten Richtungen ohne Aenderung der relativen Lage der Punkte gestatten.

Sind die wirkenden Kräfte der Art, dass ihre Arbeit für eine der x-Achse parallele Verschiebung gleich Null ist, so ist nach 4) $\Sigma X = 0$; diese Gleichung und die beiden entsprechenden, die sich auf die y-Achse und die z-Achse beziehen, sind erfüllt, wenn die Kräfte ein Potential haben, das nur von der relativen Lage der Punkte abhängt; in der That ändert sich das Potential dann nicht,

wenn alle entsprechenden Coordinaten der Punkte um dieselbe Grösse verändert werden. Es ist das z. B. der Fall bei unserm Planetensystem, wenn man von der Einwirkung der Fixsterne absieht. Die Gleichungen 7) geben dann

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0;$$

d. h. der Schwerpunkt bewegt sich in gerader Linie mit gleichbleibender Geschwindigkeit. Man nennt diesen Satz den *Satz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts.*

Wirkt auf die Punkte des Systemes die Schwere und keine andere Kraft, so werden die Gleichungen 7), wenn man die z-Achse vertical abwärts gekehrt annimmt,

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = g, \qquad 8)$$

d. h. der Schwerpunkt bewegt sich auf einer Parabel, wie ein einzelner schwerer materieller Punkt. Ein Beispiel hierfür bietet ein starrer, schwerer Körper, der angesehen werden kann als ein System fest mit einander verbundener materieller Punkte; dass die Zahl dieser eine unendlich grosse ist, ist unwesentlich.

§ 4.

Die angeführten Beispiele zeigen, dass bisweilen die Bewegung des Schwerpunktes eines Systemes materieller Punkte sich in besonders einfacher Weise angeben lässt. Es empfiehlt sich dann die Bewegung der Punkte nicht zu beziehen auf ein im Raume festes Coordinatensystem, sondern auf eines, dessen Anfangspunkt der bewegte Schwerpunkt ist, und dessen Achsen unveränderliche Richtungen haben. Auf ein solches Coordinatensystem sind aber nicht unmittelbar die allgemeinen Gleichungen, die wir für ein festes aufgestellt haben, anwendbar.

Führen wir neben dem im Raume festen Coordinatensystem der x, y, z ein zweites bewegtes, das der x', y', z', ein, der Art, dass für jeden Punkt

$$x = \xi + x', \quad y = \eta + y', \quad z = \zeta + z'$$

ist, wo ξ, η, ζ gegebene Functionen der Zeit sind. In den neuen Coordinaten lautet dann die Gleichung 2) der dritten Vorlesung, die das d'Alembert'sche Princip ausspricht:

$$\begin{aligned} 0 = \sum \Big(m \frac{d^2x'}{dt^2} + m \frac{d^2\xi}{dt^2} - X\Big)\,\delta x' \\ + \Big(m \frac{d^2y'}{dt^2} + m \frac{d^2\eta}{dt^2} - Y\Big)\,\delta y' \\ + \Big(m \frac{d^2z'}{dt^2} + m \frac{d^2\zeta}{dt^2} - Z\Big)\,\delta z', \end{aligned}$$

und diese Gleichung muss für alle virtuellen Variationen $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ bestehen; d. h. es kann das d'Alembert'sche Princip in derselben Form auf das bewegte, wie auf ein ruhendes Coordinatensystem angewandt werden, falls man zu jeder Kraft (X, Y, Z) die Kraft hinzufügt, deren Componenten $-m\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $-m\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $-m\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ sind.

Ist der Punkt (ξ, η, ζ) der Schwerpunkt eines Systemes von Massen, für welche der Satz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts gilt, z. B. der Schwerpunkt unseres Planetensystems, so sind die bezeichneten Zusatzkräfte gleich Null; um den Schwerpunkt bewegen sich die Massen dann also gerade so, als ob dieser ruhte.

Ist (ξ, η, ζ) der Schwerpunkt eines Systemes materieller Punkte, auf welche die Schwere und keine andere Kraft wirkt, und welche so mit einander verbunden sind, dass in den Richtungen der Coordinatenachsen Verschiebungen ohne Aenderung ihrer relativen Lage möglich sind, so gelten, wenn die z-Achse wieder vertical abwärts gerichtet angenommen wird, die Gleichungen 8); zugleich ist aber

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = mg;$$

daraus folgt dann, dass die Punkte um ihren Schwerpunkt so sich bewegen, als ob gar keine Kräfte auf sie wirkten und ihr Schwerpunkt in Ruhe wäre. Einen speciellen, hierher gehörigen Fall bildet die Bewegung eines starren, schweren Körpers.

§ 5.

Nehmen wir endlich an, dass die Verbindungen der Punkte des Systemes so beschaffen sind, dass sie eine Drehung um die z-Achse ohne Aenderung der relativen Lage der Punkte gestatten. Setzen wir

$$x = \varrho \cos \vartheta, \quad y = \varrho \sin \vartheta,$$

so entspricht einer unendlich kleinen Drehung um die z-Achse eine Vergrösserung der sämmtlichen, auf die einzelnen Punkte des Systemes bezogenen Winkel ϑ um dieselbe unendlich kleine Grösse, die r' genannt werden soll. Für eine solche Drehung ist daher

$$\begin{aligned} \delta x &= -\varrho \sin \vartheta \cdot r', & \delta \eta &= \varrho \cos \vartheta \cdot r', & \delta z &= 0, \\ &= -yr', & &= xr'; \end{aligned}$$

diese Werthe können also bei der gemachten Annahme als virtuelle Variationen in die Gleichung 2) der dritten Vorlesung gesetzt werden. Bei Fortlassung des Factors r' erhält man dadurch

$$\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \sum (xY - yX). \tag{9}$$

Wir merken an, dass die Arbeit der wirkenden Kräfte für die gedachte Drehung

$$= r' \sum (xY - yX) \tag{10}$$

ist; den Factor von r'' in diesem Ausdrucke, also die rechte Seite der Gleichung 9) nennt man das *Drehungsmoment* der wirkenden Kräfte in Bezug auf die z-Achse.

Nun ist, wie wir schon bei der Erörterung des ersten Kepler-schen Gesetzes in der ersten Vorlesung gesehen haben,

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\varrho^2 \frac{d\vartheta}{dt}\right)$$

und $\varrho^2 \, d\vartheta$ ist das Doppelte der Fläche, welche der radius vector ϱ in dem Sinne, in dem ϑ wächst, während des Zeitelements dt beschreibt. Es lässt sich hiernach die Gleichung 9) in die Form bringen:

$$\frac{d}{dt} \sum m \varrho^2 \frac{d\vartheta}{dt} = \sum (x Y - y X). \qquad 11)$$

Sie spricht den sogenannten *Flächensatz* für die xy-Ebene aus.

Ist das Drehungsmoment der Kräfte in Bezug auf die z-Achse $= 0$, so wird die Gleichung 11) integrabel und giebt:

$$\sum m \varrho^2 \frac{d\vartheta}{dt} = \text{Const.}$$

Den hierdurch ausgedrückten Satz nennt man den auf die xy-Ebene bezüglichen *Satz von der Erhaltung der Flächen.*

Die Betrachtungen, die wir für die z-Achse durchgeführt haben, gelten auch für die x- und die y-Achse, wenn man die Zeichen passend vertauscht.

Haben die Kräfte ein Potential, welches nur von der relativen Lage der Punkte abhängt, so ändert sich dieses nicht bei einer Drehung des Systemes um irgend eine der Coordinatenachsen; das Drehungsmoment der Kräfte in Bezug auf jede der Coordinatenachsen ist daher $= 0$; gestatten die Verbindungen der Punkte eine Drehung um jede Coordinatenachse, so gilt daher der Satz von der Erhaltung der Flächen für jede Coordinatenebene. Ein Beispiel hierfür bietet unser Planetensystem.

Fünfte Vorlesung.

(Bestimmung der Lage eines starren Körpers. Unendlich kleine Verrückung eines solchen. Schraubenbewegung. Abhängigkeit der Drehungsmomente eines Kräftesystems von den Coordinatenachsen. Hauptdrehungsmoment.)

§ 1.

Wir haben in der vorigen Vorlesung, um aus dem d'Alembertschen Principe Folgerungen zu ziehen, gewisse unendlich kleine Verrückungen betrachtet, welche ein System materieller Punkte, die fest mit einander verbunden sind, erleiden kann; nämlich eine Verschiebung in einer gewissen Richtung und eine Drehung um eine gewisse Achse. Wir wollen jetzt die allgemeinste unendlich kleine Verrückung ins Auge fassen, die bei einem solchen Systeme möglich ist.

Wir führen zwei rechtwinklige Coordinatensysteme ein, von denen das eine mit dem gedachten Systeme, oder mit dem *Körper*, wie wir dieses nennen wollen, fest verbunden, das andere im Raume fest ist; x, y, z seien die Coordinaten eines Punktes des Körpers im ersten, ξ, η, ζ die desselben Punktes im zweiten Systeme. Es ist dann

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \\ \eta &= \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z \\ \zeta &= \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z, \end{aligned} \qquad 1)$$

wo die 12 Grössen α, β, γ von der relativen Lage der Coordinatensysteme, also von der Lage des beweglichen Körpers abhängen. Die Grössen α, β, γ ohne Index sind die Werthe, die ξ, η, ζ für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ haben; die 9 übrigen sind die Cosinus der Winkel, welche die Achsen der x, y, z mit den Achsen der ξ, η, ζ bilden. Aus dieser geometrischen Bedeutung der genannten Grössen folgt, dass umgekehrt

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 (\xi - \alpha) + \beta_1 (\eta - \beta) + \gamma_1 (\zeta - \gamma) \\ y &= \alpha_2 (\xi - \alpha) + \beta_2 (\eta - \beta) + \gamma_2 (\zeta - \gamma) \\ z &= \alpha_3 (\xi - \alpha) + \beta_3 (\eta - \beta) + \gamma_3 (\zeta - \gamma) \end{aligned} \qquad 2)$$

ist. Sowohl durch die Gleichungen 1), als durch die Gleichungen 2) muss die Gleichung

$$(\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2 + (\zeta - \gamma)^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

zu einer identischen werden. Daraus ergiebt sich:

$$\begin{array}{ll} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1 & \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1 & \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 = 0 \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1 & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0 \end{array} \qquad 3)$$

und

$$\begin{array}{ll} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 & \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0 \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1 & \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 = 0 \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 & \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0. \end{array} \qquad 4)$$

Es sind dieses 6 von einander unabhängige Relationen zwischen den 9 genannten Cosinus in zwei verschiedenen Formen. Es fliessen aus ihnen noch andere, die wir gebrauchen werden. Löst man die Gleichungen 1) nach x, y, z auf, so erhält man Gleichungen, welche mit den Gleichungen 2) identisch sein müssen. Hieraus folgt, wenn man

$$\Delta = \alpha_1(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) + \beta_1(\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2) + \gamma_1(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) \qquad 5)$$

setzt,

$$\alpha_1 = \frac{\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2}{\Delta}$$

$$\beta_1 = \frac{\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2}{\Delta}$$

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2}{\Delta}.$$

Quadrirt und addirt man diese Gleichungen, so erhält man bei Rücksicht auf die Gleichungen 3)

$$\Delta^2 = 1,$$

da nach diesen

$$(\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2)(\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2) - (\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3)^2 = 1$$

d. h.

$$(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2)^2 + (\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2)^2 + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)^2 = 1$$

ist. Der Werth von Δ kann $+1$ oder -1 sein, kann aber nicht bei der Bewegung des Körpers sich sprungweise ändern. Wir denken uns den Körper in der Lage, bei der die x-Achse mit der ξ-Achse, die y-Achse mit der η-Achse dieselbe Richtung hat; dann ist $\alpha_1 = 1$, $\beta_2 = 1$, $\gamma_3 = +1$ oder $= -1$, während die 6 andern Cosinus verschwinden, wie aus den Gleichungen 3) und 4) mit Leichtigkeit abzuleiten ist; d. h. die z-Achse hat dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung als die ζ-Achse. Im ersten Falle ist, wie 5) zeigt, $\Delta = +1$, im zweiten $= -1$. Es sollen die Coordinatensysteme der x, y, z und der ξ, η, ζ so gewählt sein, dass der erste Fall stattfindet, dass sie, wie man sagt, *congruent* sind, wenn die x-Achse der ξ-Achse, die y-Achse der η-Achse, die z-Achse der ζ-Achse entsprechend angenommen wird. Dann ist also

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2\\ \beta_1 &= \gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2\\ \gamma_1 &= \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2.\end{aligned} \tag{6)}$$

Die Gleichungen 1) bleiben ungeändert, wenn man in ihnen die Indices 1, 2, 3 und gleichzeitig die Buchstaben x, y, z cyklisch vertauscht; bei einer solchen Vertauschung bleibt auch Δ ungeändert, wie die Gleichung 5) zeigt; man darf sie daher auch in den Gleichungen 6) vornehmen und erhält dadurch:

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3 & \alpha_3 &= \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1\\ \beta_2 &= \gamma_3\alpha_1 - \gamma_1\alpha_3 & \beta_3 &= \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1\\ \gamma_2 &= \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 & \gamma_3 &= \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1.\end{aligned} \tag{7)}$$

Zwischen den 9 Cosinus α, β, γ bestehen 6 von einander unabhängige Relationen; sie müssen sich also durch 3 von einander unabhängige Grössen ausdrücken lassen. Wir wollen sie jetzt so ausdrücken.

Zwischen α_3, β_3, γ_3 besteht die eine Gleichung

$$\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1;$$

wir können diese Grössen durch 2 von einander unabhängige Grössen ϑ und φ ausdrücken, indem wir setzen

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= \cos\varphi \sin\vartheta\\ \beta_3 &= \sin\varphi\sin\vartheta\\ \gamma_3 &= \cos\vartheta,\end{aligned}$$

wodurch jene Gleichung erfüllt wird. Durch ϑ und φ sind α_3, β_3, γ_3 eindeutig bestimmt; das Umgekehrte findet aber nicht statt. Ausserdem, dass ϑ und φ um beliebige Vielfache von 2π vermehrt werden können, kann das Vorzeichen von ϑ beliebig gewählt werden, wenn α_3, β_3, γ_3 gegeben sind. Wechselt man das Vorzeichen von ϑ, so hat man φ um π zu vermehren. Bei einer speciellen Lage des Körpers sollen nach Willkür, so weit sie nach dem eben Angeführten gestattet ist, die Werthe von ϑ und φ gewählt werden; für jede Lage, die stetig aus jener hervorgeht, wird dann jede Unbestimmtheit in den Werthen von ϑ und φ durch die Festsetzung gehoben, dass diese stetig mit der Lage des Körpers sich ändern; vorausgesetzt, dass diejenigen Lagen vermieden werden, in denen ϑ Null oder ein Vielfaches von π und daher φ unbestimmt ist. Es haben ϑ und φ einfache geometrische Bedeutungen; ϑ ist ein Winkel, den die z-Achse und die ζ-Achse mit einander bilden; φ ein Winkel, den eine durch die ζ-Achse gehende Ebene beschreibt, wenn sie aus einer Lage, bei der sie der ξ-Achse parallel ist, in eine Lage, bei der sie der z-Achse parallel ist, in *dem* Sinne gedreht wird, in dem sie um einen rechten Winkel gedreht werden muss, um der η-Achse parallel zu werden.

Es sind ϑ und φ Polarcoordinaten auf einer Kugelfläche des Punktes, der der Richtung der z-Achse entspricht, deren Pol der Richtung der ζ-Achse entsprechend ist; der Winkel φ wird von dem grössten Kreise, der die $\zeta\xi$-Ebene darstellt, ab gezählt.

Zwischen den Cosinus γ_1, γ_2, γ_3 besteht die Relation

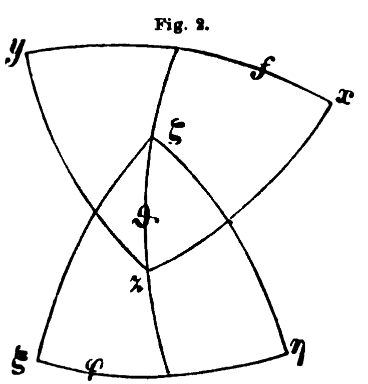
$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1;$$

wir erfüllen sie, wenn wir setzen:

$$\gamma_1 = \cos f \sin \vartheta, \quad \gamma_2 = \sin f \sin \vartheta, \quad \gamma_3 = \cos \vartheta.$$

Sind γ_1, γ_2, γ_3 gegeben, so ist hierdurch f bis auf ein hinzuzufügendes Vielfaches von 2π bestimmt, da ϑ bereits bestimmt ist. Es hat f eine ähnliche geometrische Bedeutung wie φ; es ist ein Winkel, den eine durch die z-Achse gehende Ebene beschreibt, wenn sie aus einer Lage, bei der sie der x-Achse parallel ist, in eine Lage, bei der sie der ζ-Achse parallel ist, in *dem* Sinne gedreht wird, in dem sie um einen rechten Winkel gedreht werden muss, um der y-Achse parallel zu werden. Es sind ϑ und f Polarcoordinaten auf einer Kugelfläche des Punktes, der die Richtung der ζ-Achse angiebt, deren Pol durch die Richtung der z-Achse bestimmt ist, während der grösste Kreis, von dem aus der Winkel f gerechnet wird, der zx-Ebene parallel ist.

Fig. 2.



Aus den 5 Grössen α_3, β_3, γ_3, γ_1, γ_2 lassen sich nun die 4 anderen α_1, α_2, β_1, β_2 mit Hülfe der Gleichungen 6) und 7) eindeutig berechnen; diejenigen von diesen Gleichungen, welche α_1 und β_2 ausdrücken, geben

$$\alpha_1 (1 - \gamma_3^2) = -\alpha_3 \gamma_1 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2$$
$$\beta_2 (1 - \gamma_3^2) = -\alpha_3 \gamma_1 - \beta_3 \gamma_2 \gamma_3;$$

diejenigen, welche α_2 und β_1 ausdrücken,

$$\alpha_2 (1 - \gamma_3^2) = -\alpha_3 \gamma_2 \gamma_3 + \beta_3 \gamma_1$$
$$\beta_1 (1 - \gamma_3^2) = \alpha_3 \gamma_2 - \beta_3 \gamma_1 \gamma_3.$$

Substituirt man hier für α_3, β_3, γ_3, γ_1, γ_2 ihre Werthe, so hebt sich der Factor $1 - \gamma_3^2$ d. h. $\sin^2 \vartheta$ fort; man hat daher:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -\cos\varphi \cos f \cos\vartheta - \sin\varphi \sin f \\
\beta_1 &= -\sin\varphi \cos f \cos\vartheta + \cos\varphi \sin f \\
\gamma_1 &= \cos f \sin\vartheta \\
\alpha_2 &= -\cos\varphi \sin f \cos\vartheta + \sin\varphi \cos f \\
\beta_2 &= -\sin\varphi \sin f \cos\vartheta - \cos\varphi \cos f
\end{aligned} \qquad 8)$$

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= \sin f \sin \vartheta \\ \alpha_3 &= \cos \varphi \sin \vartheta \\ \beta_3 &= \sin \varphi \sin \vartheta \\ \gamma_3 &= \cos \vartheta.\end{aligned}$$

§ 2.

Wir untersuchen nun eine unendlich kleine Verrückung, die der Körper, und mit ihm das Coordinatensystem der x, y, z erleidet. Die Veränderung, die irgend eine der in Betracht kommenden Grössen dabei erfährt, bezeichnen wir durch ein vorgesetztes δ. Nach den Gleichungen 1) ist dann:

$$\begin{aligned}\delta\xi &= \delta\alpha + x\delta\alpha_1 + y\delta\alpha_2 + z\delta\alpha_3 \\ \delta\eta &= \delta\beta + x\delta\beta_1 + y\delta\beta_2 + z\delta\beta_3 \\ \delta\zeta &= \delta\gamma + x\delta\gamma_1 + y\delta\gamma_2 + z\delta\gamma_3.\end{aligned} \tag{9}$$

Die 3 Grössen $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ können beliebig gewählt werden, nicht aber die 9 Grössen $\delta\alpha_1$, $\delta\beta_1$, . .; diese sind durch 3 unabhängige Grössen, etwa durch $\delta\vartheta$, $\delta\varphi$, δf mit Hülfe der Gleichungen 8) ausdrückbar. Statt $\delta\vartheta$, $\delta\varphi$, δf wählen wir aber, um die Symmetrie der Formeln zu wahren, 3 andere unendlich kleine Grössen, die wir π', χ', ϱ' nennen und durch die folgenden Gleichungen definiren:

$$\begin{aligned}\pi' &= \beta_1\delta\gamma_1 + \beta_2\delta\gamma_2 + \beta_3\delta\gamma_3 \\ \chi' &= \gamma_1\delta\alpha_1 + \gamma_2\delta\alpha_2 + \gamma_3\delta\alpha_3 \\ \varrho' &= \alpha_1\delta\beta_1 + \alpha_2\delta\beta_2 + \alpha_3\delta\beta_3.\end{aligned} \tag{10}$$

Verbindet man diese Gleichungen mit denen, die durch Variation der Gleichungen 4) sich ergeben, nämlich mit

$$\begin{aligned}0 &= \alpha_1\delta\alpha_1 + \alpha_2\delta\alpha_2 + \alpha_3\delta\alpha_3 \\ 0 &= \beta_1\delta\beta_1 + \beta_2\delta\beta_2 + \beta_3\delta\beta_3 \\ 0 &= \gamma_1\delta\gamma_1 + \gamma_2\delta\gamma_2 + \gamma_3\vartheta\gamma_3 \\ -\pi' &= \gamma_1\delta\beta_1 + \gamma_2\delta\beta_2 + \gamma_3\delta\beta_3 \\ -\chi' &= \alpha_1\delta\gamma_1 + \alpha_2\delta\gamma_2 + \alpha_3\delta\gamma_3 \\ -\varrho' &= \beta_1\delta\alpha_1 + \beta_2\delta\alpha_2 + \beta_3\delta\alpha_3,\end{aligned}$$

so kann man die 9 Grössen $\delta\alpha_1$, $\delta\beta_1$ . . durch π', χ', ϱ' ausdrücken. Man findet so bei Rücksicht auf die Gleichungen 3):

$$\begin{aligned}\delta\alpha_1 &= \gamma_1\chi' - \beta_1\varrho' & \delta\beta_1 &= \alpha_1\varrho' - \gamma_1\pi' & \delta\gamma_1 &= \beta_1\pi' - \alpha_1\chi' \\ \delta\alpha_2 &= \gamma_2\chi' - \beta_2\varrho' & \delta\beta_2 &= \alpha_2\varrho' - \gamma_2\pi' & \delta\gamma_2 &= \beta_2\pi' - \alpha_2\chi' \\ \delta\alpha_3 &= \gamma_3\chi' - \beta_3\varrho' & \delta\beta_3 &= \alpha_3\varrho' - \gamma_3\pi' & \delta\gamma_3 &= \beta_3\pi' - \alpha_3\chi'.\end{aligned} \tag{11}$$

Die Gleichungen 9) werden hiernach bei Benutzung der Gleichungen 1):

$$\begin{aligned}\delta\xi &= \delta\alpha + (\zeta-\gamma)\chi' - (\eta-\beta)\varrho'\\ \delta\eta &= \delta\beta + (\xi-\alpha)\varrho' - (\zeta-\gamma)\pi'\\ \delta\zeta &= \delta\gamma + (\eta-\beta)\pi' - (\xi-\alpha)\chi'\end{aligned} \qquad 12)$$

oder auch

$$\begin{aligned}\delta\xi &= \delta\alpha - \gamma\chi' + \beta\varrho' + \zeta\chi' - \eta\varrho'\\ \delta\eta &= \delta\beta - \alpha\varrho' + \gamma\pi' + \xi\varrho' - \zeta\pi'\\ \delta\zeta &= \delta\gamma - \beta\pi' + \alpha\chi' + \eta\pi' - \xi\chi'.\end{aligned} \qquad 13)$$

Wir definiren nun einen Ausdruck, den wir gebrauchen wollen. Wir nennen eine unendlich kleine Verrückung irgend eines Systemes materieller Punkte *zusammengesetzt* aus mehreren unendlich kleinen Verrückungen des Systemes, wenn die Aenderungen der Coordinaten eines jeden Punktes bei jener gleich sind den Summen der Aenderungen der entsprechenden Coordinaten bei diesen. Diese Definition bezieht sich auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, das eingeführt sein muss; aber die Formeln der Verwandlung rechtwinkliger Coordinaten, von denen wir schon mehrfachen Gebrauch gemacht haben, zeigen unmittelbar, dass eine Verrückung, die mit Bezug auf *ein* Coordinatensystem aus mehreren andern zusammengesetzt genannt werden kann, auch so genannt werden kann mit Bezug auf jedes andere. Sie zeigen auch leicht, dass zwei Verrückungen eines Punktes sich gerade so zusammensetzen, wie zwei Kräfte, die auf einen Punkt wirken, nämlich nach dem Satze vom Parallelogramm.

Die durch die Gleichungen 12) dargestellte Verrückung unseres Körpers lässt sich hiernach bezeichnen als zusammengesetzt aus 6 Verrückungen, aus denjenigen nämlich, die stattfinden, wenn nur je eine der 6 Grössen $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, π', χ', ϱ' von Null verschieden ist.

Ist nur $\delta\gamma$ von Null verschieden, so ist $\delta\xi = 0$, $\delta\eta = 0$, $\delta\zeta = \delta\gamma$; d. h. der Körper erleidet in der Richtung der ζ-Achse eine Verschiebung, bei der alle seine Linien sich selbst parallel bleiben, und die $= \delta\gamma$ ist. Ist nur $\delta\alpha$ oder nur $\delta\beta$ von Null verschieden, so erleidet der Körper eine eben solche Verschiebung in der Richtung der ξ-Achse um $\delta\alpha$ oder in der Richtung der η-Achse um $\delta\beta$. Ist $\pi' = 0$, $\chi' = 0$, $\varrho' = 0$, so erfährt der Körper eine ähnliche Verschiebung in der Richtung und um die Länge der Linie, deren Projectionen auf die Achsen der ξ, η, ζ sind: $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$.

Ist nur ϱ' von Null verschieden, so werden die Gleichungen 12)

$$\delta\xi = -(\eta-\beta)\varrho', \quad \delta\eta = (\xi-\alpha)\varrho', \quad \delta\zeta = 0.$$

Bei der hierdurch bestimmten Bewegung bleiben die Punkte der Linie $\xi = \alpha$, $\eta = \beta$ an ihren Orten; eine solche Bewegung nennt man eine *Drehung* um die genannte Linie als Achse. Ein Punkt ausserhalb der Achse beschreibt bei ihr eine Strecke, die

$$= \sqrt{\delta\xi^2 + \delta\eta^2}\,, \text{ d. h.} = \varrho'\sqrt{(\xi-\alpha)^2 + (\eta-\beta)^2}\,,$$

oder vielmehr = dem absoluten Werthe dieses Ausdrucks ist. Dieselbe wird gleich dem absoluten Werthe von ϱ', wenn $(\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2 = 1$ ist; es ist daher der absolute Werth von ϱ' der *Drehungswinkel*. Wenn ϱ' positiv ist, so ist für Punkte des Körpers, für die $\xi - \alpha$ positiv ist, $\delta\eta$ positiv; d. h. es hat die Drehung des Körpers dann in *dem* Sinne stattgefunden, in dem eine Linie um einen rechten Winkel gedreht werden muss, damit sie aus einer Lage, in der sie der ξ-Achse parallel ist, in eine komme, in der sie parallel der η-Achse ist. Ist ϱ' negativ, so hat die Drehung im entgegengesetzten Sinne stattgefunden.

Ist nur π' oder χ' von Null verschieden, so ist der Körper um die Linie $\eta = \beta$, $\zeta = \gamma$ oder die Linie $\zeta = \gamma$, $\xi = \alpha$ um den absoluten Werth von π' oder χ' gedreht; den Sinn der Drehung findet man aus dem eben ausgesprochenen Satze, wenn man in ihm die Buchstaben ξ, η, ζ und zugleich π', χ', ϱ' cyklisch vertauscht.

Sehen wir nun zu, wie die 3 eben besprochenen Drehungen sich zusammensetzen, wenn sie zusammenbestehen. Die Gleichungen 12) geben dann

$$\begin{aligned}\delta\xi &= (\zeta - \gamma)\,\chi' - (\eta - \beta)\,\varrho' \\ \delta\eta &= (\xi - \alpha)\,\varrho' - (\zeta - \gamma)\,\pi' \\ \delta\zeta &= (\eta - \beta)\,\pi' - (\xi - \alpha)\,\chi'.\end{aligned}$$

Fassen wir Punkte des Körpers ins Auge, für welche

$$\xi - \alpha : \eta - \beta : \zeta - \gamma = \pi' : \chi' : \varrho' \qquad 14)$$

ist, so ist hiernach für diese

$$\delta\xi = 0, \quad \delta\eta = 0, \quad \delta\zeta = 0;$$

d. h. die in Rede stehende Bewegung ist eine Drehung, deren Achse die Gleichungen 14) hat. Das Quadrat der Strecke, welche irgend ein Punkt durchlaufen hat, d. h. $\delta\xi^2 + \delta\eta^2 + \delta\zeta^2$, lässt sich leicht auf die Form bringen

$$\begin{aligned}(\pi'^2 + \chi'^2 + \varrho'^2)\,[(\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2 + (\zeta - \gamma)^2] \\ - [\pi'(\xi - \alpha) + \chi'(\eta - \beta) + \varrho'(\zeta - \gamma)]^2.\end{aligned}$$

Wählen wir den Punkt (ξ, η, ζ) nun so, dass

$$(\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2 + (\zeta - \gamma)^2 = 1$$

und

$$\pi'(\xi - \alpha) + \chi'(\eta - \beta) + \varrho'(\zeta - \gamma) = 0$$

ist, d. h. so, dass die Linie, die ihn mit dem Punkte $\xi = \alpha$, $\eta = \beta$, $\zeta = \gamma$ verbindet, die Länge 1 hat und auf der (durch diesen Punkt gehenden) Drehungsachse senkrecht steht; die durchlaufene Strecke ergiebt sich dann

$$= \sqrt{\pi'^2 + \chi'^2 + \varrho'^2}\,;$$

d. h. dieser Ausdruck giebt den Drehungswinkel an.

Es handelt sich noch darum, den *Sinn* der Drehung zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke schreiben wir der Drehungsachse eine bestimmte Richtung zu, eine von den beiden entgegengesetzten, die wir ihr nach den Gleichungen 14) beilegen können; und zwar setzen wir die Cosinus der Winkel, die sie mit den Coordinatenachsen bildet, gleich

$$\frac{\pi'}{\sqrt{\pi'^2+\chi'^2+\varrho'^2}}, \quad \frac{\chi'}{\sqrt{\pi'^2+\chi'^2+\varrho'^2}}, \quad \frac{\varrho'}{\sqrt{\pi'^2+\chi'^2+\varrho'^2}}, \tag{15}$$

wo die Wurzelgrösse mit dem *positiven* Zeichen zu nehmen ist. Wir wollen ferner eine Drehung um eine bestimmte Achse als positiv oder negativ rechnen, je nachdem sie in dem einen oder dem entgegengesetzten Sinne geschieht, und festsetzen, dass das Vorzeichen der Drehung nicht in das entgegengesetzte überspringt, wenn die Drehungsachse dadurch eine andere wird, dass π', χ', ϱ' sich stetig ändern, ohne gleichzeitig zu verschwinden. Wir können und wollen dann die durch irgend welche Werthe von π', χ', ϱ' bestimmte Drehung um die durch die Ausdrücke 15) bestimmte Achse als eine *positive* bezeichnen. Ist $\pi' = 0$ und $\chi' = 0$, so findet eine positive Drehung um die der ζ-Achse gleichgerichtete oder entgegengesetzt gerichtete Achse statt, je nachdem

$$\frac{\varrho'}{\sqrt{\varrho'^2}}$$

positiv oder negativ, d. h. je nachdem ϱ' positiv oder negativ ist. Eine positive Drehung um die ζ-Achse findet daher in *dem* Sinne statt, in dem eine Linie um einen rechten Winkel gedreht werden muss, damit sie aus einer Lage, in der sie der ξ-Achse parallel ist, in eine komme, in der sie parallel der η-Achse ist. Um die Vorstellung von einer positiven Drehung um irgend eine Achse zu erleichtern, bemerken wir noch Folgendes.

Gesetzt, das Coordinatensystem sei der Art, dass, wenn eine menschliche Figur so gestellt ist, dass die von den Füssen nach dem Kopfe gehende Linie der ζ-Achse parallel ist, und die Figur in der Richtung der η-Achse hinsieht, die ξ-Achse nach ihrer *Rechten* gewendet ist. Eine positive Drehung der Figur bringt dann ihre rechte Seite nach vorne. Eine positive Drehung um irgend eine Achse bringt die rechte Seite der Figur auch nach vorne, falls sie so gestellt ist, dass die Drehungsachse von den Füssen zum Kopfe geht.

Nach den angestellten Betrachtungen können wir sagen: betrachtet man π', χ', ϱ' als die Coordinaten eines Punktes in dem Coordinatensysteme der ξ, η, ζ, so giebt die Richtung der von dem Anfangspunkte nach diesem Punkte gezogenen Linie die Richtung der Drehungsachse an, um die eine positive Drehung stattgefunden hat, und ihre Länge die Grösse dieser. Man beurtheilt hiernach leicht, wie die Werthe von π', χ', ϱ', die einer bestimmten Drehung entsprechen, sich ändern mit dem Coordinatensystem; sie ändern sich

so, wie die Componenten einer Geschwindigkeit oder einer Kraft; man nennt sie auch die *Componenten der Drehung* nach den Coordinatenachsen.

Man sieht ferner, dass jede unendlich kleine Verrückung des Körpers (die durch die Gleichungen 12) dargestellt ist) sich ansehen lässt als zusammengesetzt aus einer Drehung um eine gewisse, durch den willkürlich gewählten Punkt $\xi = \alpha$, $\eta = \beta$, $\zeta = \gamma$ gehende Achse und einer Verschiebung, bei der alle Linien des Körpers sich selbst parallel bleiben.

Ganz ähnliche Betrachtungen, wie wir sie über die Gleichungen 12) angestellt haben, hätten wir an die Gleichungen 13) knüpfen können. Setzen wir

$$\begin{aligned} \delta\alpha - \gamma\chi' + \beta\varrho' &= \lambda' \\ \delta\beta - \alpha\varrho' + \gamma\pi' &= \mu' \\ \delta\gamma - \beta\pi' + \alpha\chi' &= \nu', \end{aligned} \tag{16)}$$

so werden diese

$$\begin{aligned} \delta\xi &= \lambda' + \zeta\chi' - \eta\varrho' \\ \delta\eta &= \mu' + \xi\varrho' - \zeta\pi' \\ \delta\zeta &= \nu' + \eta\pi' - \xi\chi'. \end{aligned} \tag{17)}$$

Hieraus ist zu schliessen, dass die gedachte Verrückung des Körpers angesehen werden kann als zusammengesetzt aus einer Drehung um eine durch den Anfangspunkt der ξ, η, ζ gehende Achse, deren Componenten π', χ', ϱ' sind, und einer Verschiebung, deren Componenten λ', μ', ν' sind. Die Componenten der Drehung sind dieselben, wie wenn die Drehungsachse durch den Punkt $\xi = \alpha$, $\eta = \beta$, $\zeta = \gamma$ gehend angenommen wird, die Componenten der Verschiebung aber andere, wie die Gleichungen 16) zeigen.

Die Gleichungen 17) gelten für jedes Coordinatensystem; wählt man dieses passend nach der zu betrachtenden Verrückung, so lassen sie eine erhebliche Vereinfachung zu. Man lege die ζ-Achse parallel der Achse der Drehung, welche sich als der eine Theil der Verrückung bei Benutzung irgend eines Coordinatensystemes ergiebt; dann wird $\pi' = 0$, $\chi' = 0$ und die Gleichungen 17) werden

$$\begin{aligned} \delta\xi &= \lambda' - \eta\varrho' \\ \delta\eta &= \mu' + \xi\varrho' \\ \delta\zeta &= \nu'. \end{aligned}$$

Hieraus geht hervor, dass es eine gerade Linie giebt, und zwar eine der ζ-Achse parallele, für deren Punkte $\delta\xi = 0$ und $\delta\eta = 0$ ist, die Linie nämlich, deren Gleichungen

$$\lambda' - \eta\varrho' = 0, \quad \mu' + \xi\varrho' = 0$$

sind. In diese Linie verlege man die ζ-Achse; dann wird $\lambda' = 0$ und $\mu' = 0$, also:

$$\delta\xi = -\eta\varrho'$$
$$\delta\eta = \xi\varrho'$$
$$\delta\zeta = \nu'.$$

Die durch diese Gleichungen dargestellte Bewegung nennt man eine *Schraubenbewegung*, die ζ-Achse die *Achse* derselben; eine Schraubenbewegung ist zusammengesetzt aus einer Drehung um ihre Achse und einer Verschiebung in der Richtung dieser. Die allgemeinste unendlich kleine Bewegung eines Systemes fest mit einander verbundener Punkte ist eine Schraubenbewegung.

§ 3.

Durch die Gleichungen 17) haben wir die Verrückungen aller Punkte des betrachteten Systemes oder Körpers ausgedrückt durch die 6 von einander unabhängigen, unendlich kleinen Grössen λ', μ', ν', $\varkappa'$, χ', ϱ', die sich auf das Coordinatensystem der ξ, η, ζ beziehen. In ihnen ist die Verrückung des Körpers dargestellt als zusammengesetzt aus einer Drehung um eine durch den Punkt $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ gehende Achse und einer Verschiebung; λ', μ', ν' sind die Componenten der Verschiebung, $\varkappa'$, χ', ϱ' die Componenten der Drehung nach den Achsen der ξ, η, ζ. In ähnlicher Weise lassen sich die Verrückungen aller Punkte ausdrücken durch 6 andere von einander unabhängige Grössen, welche sich auf das Coordinatensystem der x, y, z bei der Lage, welche dieses vor der Verrückung des Körpers hat, beziehen. Wir nennen diese 6 Grössen u', v', w', p', q', r' und definiren sie durch die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} u' &= \alpha_1\delta\alpha + \beta_1\delta\beta + \gamma_1\delta\gamma \\ v' &= \alpha_2\delta\alpha + \beta_2\delta\beta + \gamma_2\delta\gamma \\ w' &= \alpha_3\delta\alpha + \beta_3\delta\beta + \gamma_3\delta\gamma \end{aligned} \tag{18)}$$

und

$$\begin{aligned} p' &= \alpha_3\delta\alpha_2 + \beta_3\delta\beta_2 + \gamma_3\delta\gamma_2 \\ q' &= \alpha_1\delta\alpha_3 + \beta_1\delta\beta_3 + \gamma_1\delta\gamma_3 \\ r' &= \alpha_2\delta\alpha_1 + \beta_2\delta\beta_1 + \gamma_2\delta\gamma_1. \end{aligned} \tag{19)}$$

Verbindet man die 3 letzten mit denen, die durch Variation der Gleichungen 3) sich ergeben, nämlich mit

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1\delta\alpha_1 + \beta_1\delta\beta_1 + \gamma_1\delta\gamma_1 \\ 0 &= \alpha_2\delta\alpha_2 + \beta_2\delta\beta_2 + \gamma_2\delta\gamma_2 \\ 0 &= \alpha_3\delta\alpha_3 + \beta_3\delta\beta_3 + \gamma_3\delta\gamma_3 \\ -p' &= \alpha_2\delta\alpha_3 + \beta_2\delta\beta_3 + \gamma_2\delta\gamma_3 \\ -q' &= \alpha_3\delta\alpha_1 + \beta_3\delta\beta_1 + \gamma_3\delta\gamma_1 \\ -r' &= \alpha_1\delta\alpha_2 + \beta_1\delta\beta_2 + \gamma_1\delta\gamma_2, \end{aligned}$$

so findet man bei Rücksicht auf die Gleichungen 4):

$$\begin{array}{lll} \delta\alpha_1 = \alpha_2 r' - \alpha_3 q' & \delta\alpha_2 = \alpha_3 p' - \alpha_1 r' & \delta\alpha_3 = \alpha_1 q' - \alpha_2 p' \\ \delta\beta_1 = \beta_2 r' - \beta_3 q' & \delta\beta_2 = \beta_3 p' - \beta_1 r' & \delta\beta_3 = \beta_1 q' - \beta_2 p' \\ \delta\gamma_1 = \gamma_2 r' - \gamma_3 q' & \delta\gamma_2 = \gamma_3 p' - \gamma_1 r' & \delta\gamma_3 = \gamma_1 q' - \gamma_2 p'. \end{array} \quad 20)$$

Bildet man nun die Componenten der Verrückung des Punktes (x, y, z), oder, was dasselbe ist, des Punktes (ξ, η, ζ) nach den Achsen der x, y, z, d. h. die Werthe von

$$\begin{array}{l} \alpha_1\delta\xi + \beta_1\delta\eta + \gamma_1\delta\zeta \\ \alpha_2\delta\xi + \beta_2\delta\eta + \gamma_2\delta\zeta \\ \alpha_3\delta\xi + \beta_3\delta\eta + \gamma_3\delta\zeta, \end{array}$$

so findet man hierfür aus den Gleichungen 9) mit Hülfe von 18) und 20)

$$\begin{array}{l} u' + zq' - yr' \\ v' + xr' - zp' \\ w' + yp' - xq'. \end{array} \quad 21)$$

Diese Ausdrücke haben dieselbe Form, wie diejenigen, welche in 17) für $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ angegeben sind; aus ihnen geht hervor, dass die in Rede stehende Verrückung angesehen werden kann als zusammengesetzt aus einer Drehung um eine durch den Punkt $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ gehende Achse und einer Verschiebung, deren Componenten nach den Achsen der x, y, z resp. sind p', q', r' und u', v', w'.

Da p', q', r' und $\varkappa', \chi', \varrho'$ die Componenten derselben Drehung nach den Achsen der x, y, z und denen der ξ, η, ζ sind, so muss nach einer von uns auf Seite 47 und 48 gemachten Bemerkung

$$\begin{array}{l} p' = \alpha_1\varkappa' + \beta_1\chi' + \gamma_1\varrho' \\ q' = \alpha_2\varkappa' + \beta_2\chi' + \gamma_2\varrho' \\ r' = \alpha_3\varkappa' + \beta_3\chi' + \gamma_3\varrho' \end{array} \quad 22)$$

sein; mit Leichtigkeit ergeben sich diese Gleichungen aus 19) und 11) bei Rücksicht auf 6) und 7).

Verwickelter sind die Gleichungen, welche u', v', w' durch $\lambda', \mu', \nu', \varkappa', \chi', \varrho'$ ausdrücken; sie ergeben sich aus 18) und 16)

$$\begin{array}{l} u' = \alpha_1\lambda' + \beta_1\mu' + \gamma_1\nu' \\ \quad + (\gamma_1\beta - \beta_1\gamma)\varkappa' + (\alpha_1\gamma - \gamma_1\alpha)\chi' + (\beta_1\alpha - \alpha_1\beta)\varrho' \\ v' = \alpha_2\lambda' + \beta_2\mu' + \gamma_2\nu' \\ \quad + (\gamma_2\beta - \beta_2\gamma)\varkappa' + (\alpha_2\gamma - \gamma_2\alpha)\chi' + (\beta_2\alpha - \alpha_2\beta)\varrho' \\ w' = \alpha_3\lambda' + \beta_3\mu' + \gamma_3\nu' \\ \quad + (\gamma_3\beta - \beta_3\gamma)\varkappa' + (\alpha_3\gamma - \gamma_3\alpha)\chi' + (\beta_3\alpha - \alpha_3\beta)\varrho'. \end{array} \quad 23)$$

§ 4.

Wir knüpfen an diese Auseinandersetzungen noch die folgende Bemerkung.

Nach den Definitionen, die wir von der Arbeit und von der Zusammensetzung unendlich kleiner Verrückungen gegeben haben, ist die Arbeit von Kräften, die auf ein System materieller Punkte wirken, für irgend eine unendlich kleine Verrückung des Systemes, die als zusammengesetzt aus mehreren betrachtet werden kann, gleich der Summe der Arbeiten derselben Kräfte für *diese*. Nun sei die Verrückung eine solche, bei der die relative Lage der Punkte ungeändert bleibt; die Arbeit für dieselbe kann dann gesetzt werden

$$= Xu' + Yv' + Zw' + M_x p' + M_y q' + M_z r' \tag{24}$$

oder auch

$$= \Xi\lambda' + H\mu' + Z\nu' + M_\xi \pi' + M_\eta \chi' + M_\zeta \varrho', \tag{25}$$

wobei X, Y, Z, Ξ, H, Z die Summen der Componenten der Kräfte nach den Achsen der x, y, z und ξ, η, ζ; $M_x, M_y, M_z, M_\xi, M_\eta, M_\zeta$ die Drehungsmomente der Kräfte in Bezug auf die Achsen der x, y, z und ξ, η, ζ bedeuten; es geht das aus den Bemerkungen hervor, die in der vorigen Vorlesung über die Summen der Componenten und die Drehungsmomente eines Kräftesystemes gemacht sind. Die beiden für die Arbeit aufgestellten Ausdrücke müssen einander gleich sein, sobald die Gleichungen 22) und 23) bestehen. Substituirt man aus diesen die Werthe von u', v', w', p', q', r', und setzt die Coefficienten von $\lambda', \mu', \nu', \pi', \chi', \varrho'$ einander gleich, so erhält man

$$\begin{aligned}
\Xi &= \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z \\
H &= \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z \\
Z &= \gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z \\
M_\xi &= (\gamma_1\beta - \beta_1\gamma) X + (\gamma_2\beta - \beta_2\gamma) Y + (\gamma_3\beta - \beta_3\gamma) Z \\
&\quad + \alpha_1 M_x + \alpha_2 M_y + \alpha_3 M_z \\
M_\eta &= (\alpha_1\gamma - \gamma_1\alpha) X + (\alpha_2\gamma - \gamma_2\alpha) Y + (\alpha_3\gamma - \gamma_3\alpha) Z \\
&\quad + \beta_1 M_x + \beta_2 M_y + \beta_3 M_z \\
M_\zeta &= (\beta_1\alpha - \alpha_1\beta) X + (\beta_2\alpha - \alpha_2\beta) Y + (\beta_3\alpha - \alpha_3\beta) Z \\
&\quad + \gamma_1 M_x + \gamma_2 M_y + \gamma_3 M_z .
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen lehren, wie die Summen der Componenten und die Drehungsmomente eines Kräftesystems sich ändern, wenn man von einem rechtwinkligen Coordinatensystem zu einem andern übergeht. Die 3 letzten von ihnen vereinfachen sich wesentlich, wenn die beiden Coordinatensysteme denselben Anfangspunkt haben, d. h. $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ ist; sie werden dann

$$\begin{aligned}
M_\xi &= \alpha_1 M_x + \alpha_2 M_y + \alpha_3 M_z \\
M_\eta &= \beta_1 M_x + \beta_2 M_y + \beta_3 M_z \\
M_\zeta &= \gamma_1 M_x + \gamma_2 M_y + \gamma_3 M_z
\end{aligned}$$

oder auch

$$M_x = \alpha_1 M_\xi + \beta_1 M_\eta + \gamma_1 M_\zeta$$
$$M_y = \alpha_2 M_\xi + \beta_2 M_\eta + \gamma_2 M_\zeta$$
$$M_z = \alpha_3 M_\xi + \beta_3 M_\eta + \gamma_3 M_\zeta$$

und zeigen, dass, wenn M_x, M_y, M_z als die rechtwinkligen Coordinaten in dem Systeme der x, y, z eines Punktes angesehen werden, die Lage dieses Punktes von den Richtungen der Coordinatenachsen unabhängig ist. Das Drehungsmoment in Bezug auf *die* Achse, die durch diesen Punkt und den Anfangspunkt der Coordinaten geht, heisst das *Hauptdrehungsmoment.*

Ist statt des Kräftesystemes eine einzige Kraft vorhanden, deren Componenten X, Y, Z sind, und deren Angriffspunkt die Coordinaten x, y, z hat, so ist nach der bei dem Ausdrucke 10) der vorigen Vorlesung gegebenen Definition der Drehungsmomente

$$M_x = yZ - zY, \quad M_y = zX - xZ, \quad M_z = xY - yX.$$

Die Achse des Hauptdrehungsmomentes ist dann senkrecht auf der Richtung der Kraft und auf der Linie, die vom Anfangspunkte nach dem Punkte (x, y, z) gezogen ist; denn es ist

$$XM_x + YM_y + ZM_z = 0$$

und

$$xM_x + yM_y + zM_z = 0.$$

Das Hauptdrehungsmoment ist

$$= \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

oder

$$= \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)(X^2 + Y^2 + Z^2) - (xX + yY + zZ)^2},$$

d. h. gleich dem absoluten Werthe des Products aus dem Abstande des Punktes (x, y, z) von dem Anfangspunkte, der Grösse der Kraft und dem Sinus des Winkels, den die Richtung der Kraft mit der Linie bildet, die den Anfangspunkt mit dem Punkte (x, y, z) verbindet.

Sechste Vorlesung.

(Lebendige Kraft eines bewegten starren Körpers. Trägheitsmomente. Hauptachsen. Differentialgleichungen der Bewegung eines starren Körpers für den Fall, dass dieser frei, und den Fall, dass ein Punkt desselben fest ist.)

§ 1.

Wenn ein System fest verbundener materieller Punkte sich bewegt, so ist die Verrückung, welche dasselbe in einem Zeitelement dt erleidet, eine solche, wie wir sie in der vorigen Vorlesung erörtert haben. Wir können daher in allen dort abgeleiteten Formeln für das Zeichen δ das Zeichen d setzen, welches die Veränderung anzeigen soll, die die durch den folgenden Buchstaben bezeichnete Grösse in dem Zeitelement dt erleidet. Die sämmtlichen, mit gestrichenen Buchstaben bezeichneten, unendlich kleinen Grössen müssen dann mit dt proportional sein; wir setzen eine jede von ihnen gleich dt, multiplicirt mit einer Grösse, die wir mit demselben, ungestrichenen Buchstaben bezeichnen. Ein Buchstabe, der mit einem Striche versehen eine Componente einer Verschiebung oder Drehung bedeutet, bedeutet dann ohne Strich die entsprechende Componente einer Geschwindigkeit oder Drehungsgeschwindigkeit zur Zeit t.

Den Ausdrücken 21) der vorigen Vorlesung zufolge sind dann

$$\begin{gathered} u + zq - yr \\ v + xr - zp \\ w + yp - xq \end{gathered} \qquad 1)$$

die Componenten der Geschwindigkeit eines der Punkte nach den Achsen der x, y, z bei *der* Lage, welche diese zur Zeit t haben; die Bewegung kann angesehen werden als zusammengesetzt aus einer Drehung um eine durch den Punkt $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ gehende Achse und einer Verschiebung; p, q, r sind die Componenten der Drehungsgeschwindigkeit, u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit der Verschiebung nach den Achsen der x, y, z.

Aus den Ausdrücken 1) findet man durch Quadriren und Addiren das Quadrat der Geschwindigkeit des Punktes (x, y, z); nennt man m die Masse dieses und T die lebendige Kraft des Systemes, so ist hiernach

$$2\,T = \sum m\,\{(u + zq - yr)^2 + (v + xr - zp)^2 + (w + yp - xq)^2\},$$

wo die Summe in Bezug auf alle materiellen Punkte des Systemes zu nehmen ist. Entwickelt ist diese Gleichung:

$$\begin{aligned} 2\,T = (u^2 + v^2 + w^2) \sum m & \\ + 2\,(vr - wq) \sum mx + 2\,(wp - ur) \sum my + 2\,(uq - vp) \sum mz & \\ + p^2 \sum m\,(y^2 + z^2) + q^2) \sum m\,(z^2 + x^2) + r^2 \sum m\,(x^2 + y^2) & \quad 2) \\ - 2\,qr \sum myz - 2\,rp \sum mzx - 2\,pq \sum mxy\,; & \end{aligned}$$

sie zeigt, dass T eine homogene Function zweiten Grades der 6 Argumente u, v, w, p, q, r ist, deren Coefficienten von den Massen der Punkte, ihrer relativen Lage und der Lage der Achsen der x, y, z abhängen. Die allgemeinste homogene Function zweiten Grades von 6 Argumenten enthält 21 von einander unabhängige Coefficienten; T enthält deren nur 10, und diese Zahl kann durch passende Wahl des Achsensystemes auf 4 herabgesetzt werden.

Um diese Behauptung zu beweisen, betrachten wir zunächst eine Bewegung, bei der $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ ist, bei der also der Körper — um unser System wieder so zu nennen — sich um den Punkt $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ dreht. Dann ist

$$\begin{aligned} 2\,T = p^2 \sum m\,(y^2 + z^2) + q^2 \sum m\,(z^2 + x^2) + r^2 \sum m\,(x^2 + y^2) \\ - 2\,qr \sum myz - 2\,rp \sum mzx - 2\,pq \sum mxy \end{aligned}$$

und der Körper dreht sich um die Achse, die mit der Linie zusammenfällt, welche von dem Punkte $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ nach dem Punkte $x = p$, $y = q$, $z = r$ gezogen werden kann, mit einer Drehungsgeschwindigkeit, die der Länge dieser Linie gleich ist. Setzen wir fest, dass

$$T = \tfrac{1}{2}$$

sei, so liegt der Punkt (p, q, r) auf der Fläche

$$\begin{aligned} 1 = p^2 \sum m\,(y^2 + z^2) + q^2 \sum m\,(z^2 + x^2) + r^2 \sum m\,(x^2 + y^2) & \\ - 2\,qr \sum myz - 2\,rq \sum mzx - 2\,pq \sum mxy\,, & \quad 3) \end{aligned}$$

also auf einer Fläche zweiten Grades, deren Mittelpunkt der Anfangspunkt der x, y, z ist. Jeder, von diesem Punkte aus gezogene radius vector der Fläche ist der Drehungsgeschwindigkeit gleich, welche der Körper haben muss, wenn er um ihn sich drehen und die lebendige Kraft $\frac{1}{2}$ besitzen soll. Aus dieser Bedeutung der Fläche folgt, dass

sie von den Richtungen der Achsen der x, y, z unabhängig ist; legt man diese in die Hauptachsen der Fläche, so müssen die mit qr, rp, pq behafteten Glieder verschwinden, es muss dann also

$$\sum myz = 0, \quad \sum mzx = 0, \quad \sum mxy = 0$$

und

$$1 = p^2 \sum m(y^2 + z^2) + q^2 \sum m(z^2 + x^2) + r^2 \sum m(x^2 + y^2)$$

die Gleichung der Fläche sein. Aus dem Umstande, dass die Coefficienten von p^2, q^2, r^2 in dieser Gleichung positiv sind, ist zu schliessen, dass die Fläche ein Ellipsoid ist. Die Hauptachsen desselben nennt man auch die Hauptachsen des Körpers für den Anfangspunkt der x, y, z.

Bei beliebigen Richtungen der Coordinatenachsen nennt man

$$\sum m(x^2 + y^2)$$

das *Trägheitsmoment* des Körpers in Bezug auf die z-Achse. Es ist dasselbe gleich dem reciproken Quadrate *des* radius vector des Ellipsoids 3), welcher mit der z-Achse zusammenfällt; denn setzt man $p = 0$ und $q = 0$, so wird r gleich der Länge dieser radius vector und die Gleichung 3) giebt

$$\sum m(x^2 + y^2) = \frac{1}{r^2} \cdot$$

Die Trägheitsmomente in Bezug auf die Hauptachsen des Ellipsoids 3) nennt man die *Hauptträgheitsmomente* des Körpers für den Anfangspunkt der x, y, z; sie sind die reciproken Quadrate seiner Halbachsen.

Das Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf eine Achse von gegebener Richtung ändert sich, wenn diese Achse sich selbst parallel verschoben wird. Welches diese Aenderung ist, sieht man leicht ein, wenn man neben dem Coordinatensystem der x, y, z ein zweites, das der x_1, y_1, z_1 einführt. Beziehen sich die Zeichen x, y, z und x_1, y_1, z_1 auf denselben Punkt, so soll

$$x_1 = a + x, \quad y_1 = b + y, \quad z_1 = c + z$$

sein, wo a, b, c Constanten bedeuten; dann ist

$$\sum m(x_1^2 + y_1^2) = \sum m(x^2 + y^2) + (a^2 + b^2)\sum m + 2a\sum mx + 2b\sum my.$$

Die hier auftretenden Summen $\sum mx$ und $\sum my$ sind die mit der Masse des Körpers multiplicirten x- und y-Ordinaten seines Schwerpunktes; legt man den Anfangspunkt der x, y, z in den Schwerpunkt, so verschwinden sie und man hat

$$\sum m(x_1^2 + y_1^2) = \sum m(x^2 + y^2) + (a^2 + b^2)\sum m.$$

Da die z-Achse jede beliebige Richtung haben kann, so spricht diese Gleichung den Satz aus, dass das Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf eine beliebige Achse = ist dem Trägheitsmomente desselben in Bezug auf eine Achse, die der gegebenen parallel durch den Schwerpunkt gelegt ist, + dem Producte aus der Masse des Körpers in das Quadrat der Entfernung des Schwerpunktes von der gegebenen Achse.

Nach den nun gemachten Auseinandersetzungen erkennt man leicht die Lage, die man dem Coordinatensysteme der x, y, z ertheilen muss, um den in der Gleichung 2) für die lebendige Kraft T gegebenen Ausdruck auf die einfachste Form zu bringen. Man hat zu diesem Zwecke als Anfangspunkt der x, y, z den Schwerpunkt des Körpers zu wählen und als Achsen der x, y, z die Hauptachsen für den Schwerpunkt. Die Gleichung 2) wird dann

$$2T = (u^2 + v^2 + w^2)\sum m + p^2 \sum m(y^2 + z^2) + q^2 \sum m(z^2 + x^2) + r^2 \sum m(x^2 + y^2).$$

§ 2.

Es sollen nun die Differentialgleichungen der Bewegung eines freien starren Körpers aus dem Hamilton'schen Principe, also der Gleichung 9) der dritten Vorlesung abgeleitet werden. Nach den an der angeführten Stelle gemachten Auseinandersetzungen hat man zu diesem Zwecke die Variation der lebendigen Kraft, δT, und die Arbeit der wirkenden Kräfte, U', für irgend eine Variation der Lage des Körpers zu bilden und die Summe $\delta T + U'$ auf die Form

$$\sum \left(R\varepsilon + S\frac{d\varepsilon}{dt}\right)$$

zu bringen, wo die Grössen ε unendlich kleine, von einander unabhängige Grössen sind, die die Variation der Lage des Körpers bedingen. Die Differentialgleichungen der Bewegung sind dann die Gleichungen

$$\frac{dS}{dt} = R. \tag{4}$$

Wir nehmen die Bezeichnungen der vorigen Vorlesung wieder auf; für die Grössen ε können wir dann entweder u', v', w', p', q', r' oder λ', μ', ν', π', χ', ϱ' wählen; wir erhalten die gesuchten Differentialgleichungen dadurch in zwei Formen, von denen eine jede eigenthümliche Vorzüge besitzt. Die Arbeit U' wird in dem ersten Falle durch den Ausdruck 24), in dem zweiten durch den Ausdruck 25) der vorigen Vorlesung unmittelbar in der verlangten Form angegeben. Einige Rechnung aber erfordert die Bildung des Ausdrucks für δT.

Da, wie wir bewiesen haben, T ausschliesslich eine Function von u, v, w, p, q, r und Constanten ist, so hat man zunächst

$$\begin{aligned}\delta T = \frac{\partial T}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial T}{\partial v}\,\delta v + \frac{\partial T}{\partial w}\,\delta w \\ + \frac{\partial T}{\partial p}\,\delta p + \frac{\partial T}{\partial q}\,\delta q + \frac{\partial T}{\partial r}\,\delta r;\end{aligned} \tag{5)}$$

wir suchen die 6 Variationen δu, δv, δw, δp, δq, δr zuerst durch u', v', w', p', q', r' auszudrücken. Wir gelangen hierzu, indem wir benutzen, dass die Variation des Differentialquotienten einer Function gleich dem Differentialquotienten der Function ist.

Nach den Gleichungen 18) der vorigen Vorlesung ist

$$\delta\alpha = \alpha_1 u' + \alpha_2 v' + \alpha_3 w'$$

und nach der Bemerkung, die den Ausgangspunkt dieser Vorlesung bildete, daher auch

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w.$$

Bilden wir nun die Gleichung

$$\frac{d\,\delta\alpha}{dt} = \delta\,\frac{d\alpha}{dt}$$

und benutzen, dass nach 20) der vorigen Vorlesung

$$\delta\alpha_1 = \alpha_2 r' - \alpha_3 q', \quad \delta\alpha_2 = \alpha_3 p' - \alpha_1 r', \quad \delta\alpha_3 = \alpha_1 q' - \alpha_2 p', \tag{6)}$$

also auch

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \alpha_2 r - \alpha_3 q, \quad \frac{d\alpha_2}{dt} = \alpha_3 p - \alpha_1 r, \quad \frac{d\alpha_3}{dt} = \alpha_1 p - \alpha_2 p \tag{7)}$$

ist, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}0 = \alpha_1\left(\frac{du'}{dt} - \delta u + vr' - v'r + w'q - wq'\right) \\ + \alpha_2\left(\frac{dv'}{dt} - \delta v + wp' - w'p + u'r - ur'\right) \\ + \alpha_3\left(\frac{dw'}{dt} - \delta w + uq' - u'q + v'p - vp'\right).\end{aligned}$$

Beachtet man nun, dass die Rechnung, die uns zu diesem Resultate geführt hat, auch gilt, wenn man, ohne sonst etwas zu ändern, den Buchstaben α durch den Buchstaben β oder γ ersetzt, dass also auch die gefundene Gleichung bei einer solchen Veränderung richtig bleibt, so folgt bei Rücksicht auf die Gleichungen 3) der vorigen Vorlesung:

$$\begin{aligned}\delta u &= \frac{du'}{dt} + vr' - v'r + w'q - wq' \\ \delta v &= \frac{dv'}{dt} + wp' - w'p + u'r - ur' \\ \delta w &= \frac{dw'}{dt} + uq' - u'q + v'p - vp'.\end{aligned} \tag{8)}$$

Um δp, δq, δr zu finden, entwickeln wir die Gleichung

$$\frac{d\delta\alpha_1}{dt} = \delta\frac{d\alpha_1}{dt},$$

indem wir die Gleichungen 6) und 7) benutzen; dadurch ergiebt sich

$$0 = \alpha_2\left(\frac{dr'}{dt} - \delta r + pq' - p'q\right)$$
$$- \alpha_3\left(\frac{dq'}{dt} - \delta q + rp' - r'p\right).$$

Diese Gleichung bleibt richtig, wenn an Stelle des Buchstaben α der Buchstabe β oder γ gesetzt wird, und auch, wenn man die Indices 1, 2, 3 und zugleich die Buchtaben p, q, r cyklisch vertauscht. Daher folgt aus ihr mit Hülfe der Gleichungen 3) der vorigen Vorlesung:

$$\begin{aligned} \delta p &= \frac{dp'}{dt} + qr' - q'r \\ \delta q &= \frac{dq'}{dt} + rp' - r'p \\ \delta r &= \frac{dr'}{dt} + pq' - p'q. \end{aligned} \tag{9}$$

Wir drücken nun δu, δv, δw, δp, δq, δr durch λ', μ', ν', π', χ', ϱ' aus; zu diesem Zwecke benutzen wir die Gleichungen

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w, \quad \delta\alpha = \lambda' + \gamma\chi' - \beta\varrho',$$

von denen die zweite unter den Gleichungen 16) der vorigen Vorlesung sich befindet. Nach den Gleichungen 11) der vorigen Vorlesung ist

$$\delta\alpha_1 = \gamma_1\chi' - \beta_1\varrho', \quad \delta\alpha_2 = \gamma_2\chi' - \beta_2\varrho', \quad \delta\alpha_3 = \gamma_3\chi' - \beta_3\varrho',$$

und ferner ist

$$\frac{d\beta}{dt} = \beta_1 u + \beta_2 v + \beta_3 w, \quad \frac{d\gamma}{dt} = \gamma_1 u + \gamma_2 v + \gamma_3 w.$$

Hiernach wird die Gleichung $\delta\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\delta\alpha}{dt}$:

$$\alpha_1\delta u + \alpha_2\delta v + \alpha_3\delta w = \frac{d\lambda'}{dt} + \gamma\frac{d\chi'}{dt} - \beta\frac{d\varrho'}{dt}.$$

Nun darf man die Buchstaben

$$\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \lambda, & \mu, & \nu \\ \pi, & \chi, & \varrho \end{matrix}$$

gleichzeitig cyklisch vertauschen; daher ist auch

$$\beta_1\delta u + \beta_2\delta v + \beta_3\delta w = \frac{d\mu'}{dt} + \alpha\frac{d\varrho'}{dt} - \gamma\frac{d\pi'}{dt}$$
$$\gamma_1\delta u + \gamma_2\delta v + \gamma_3\delta w = \frac{d\nu'}{dt} + \beta\frac{d\pi'}{dt} - \alpha\frac{d\chi'}{dt},$$

woraus bei Rücksicht auf die Gleichungen 3) der vorigen Vorlesung folgt:

$$\begin{aligned}
\delta u &= \alpha_1 \frac{d\lambda'}{dt} + \beta_1 \frac{d\mu'}{dt} + \gamma_1 \frac{d\nu'}{dt} \\
&\quad + (\gamma_1\beta - \beta_1\gamma) \frac{d\pi'}{dt} + (\alpha_1\gamma - \gamma_1\alpha) \frac{d\chi'}{dt} + (\beta_1\alpha - \alpha_1\beta) \frac{d\varrho'}{dt} \\
\delta v &= \alpha_2 \frac{d\lambda'}{dt} + \beta_2 \frac{d\mu'}{dt} + \gamma_2 \frac{d\nu'}{dt} \\
&\quad + (\gamma_2\beta - \beta_2\gamma) \frac{d\pi'}{dt} + (\alpha_2\gamma - \gamma_2\alpha) \frac{d\chi'}{dt} + (\beta_2\alpha - \alpha_2\beta) \frac{d\varrho'}{dt} \qquad 10) \\
\delta w &= \alpha_3 \frac{d\lambda'}{dt} + \beta_3 \frac{d\mu'}{dt} + \gamma_3 \frac{d\nu'}{dt} \\
&\quad + (\gamma_3\beta - \beta_3\gamma) \frac{d\pi'}{dt} + (\alpha_3\gamma - \gamma_3\alpha) \frac{d\chi'}{dt} + (\beta_3\alpha - \alpha_3\beta) \frac{d\varrho'}{dt}.
\end{aligned}$$

Um δp, δq, δr zu finden, entwickeln wir die Gleichung $\delta \frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{d\delta\alpha_1}{dt}$, indem wir setzen

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \alpha_2 r - \alpha_3 q, \quad \delta\alpha_1 = \gamma_1 \chi' - \beta_1 \varrho'$$

und benutzen, dass

$$\begin{aligned}
\delta\alpha_2 &= \gamma_2\chi' - \beta_2\varrho', \quad \frac{d\beta_1}{dt} = \beta_2 r - \beta_3 q \\
\delta\alpha_3 &= \gamma_3\chi' - \beta_3\varrho', \quad \frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2 r - \gamma_3 q
\end{aligned}$$

ist; so ergiebt sich

$$\alpha_2\delta r - \alpha_3\delta q = \gamma_1 \frac{d\chi'}{dt} - \beta_1 \frac{d\varrho'}{dt}.$$

Hieraus folgt durch cykliche Vertauschung der Buchstaben α, β, γ und π, χ, ϱ:

$$\begin{aligned}
\beta_2\delta r - \beta_3\delta q &= \alpha_1 \frac{d\varrho'}{dt} - \gamma_1 \frac{d\pi'}{dt} \\
\gamma_2\delta r - \gamma_3\delta q &= \beta_1 \frac{d\pi'}{dt} - \alpha_1 \frac{d\chi'}{dt}.
\end{aligned}$$

Diese 3 Gleichungen geben bei Rücksicht auf die Gleichungen 6) und 7) der vorigen Vorlesung

$$\begin{aligned}
\delta q &= \alpha_2 \frac{d\pi'}{dt} + \beta_2 \frac{d\chi'}{dt} + \gamma_2 \frac{d\varrho'}{dt} \\
\delta r &= \alpha_3 \frac{d\pi'}{dt} + \beta_3 \frac{d\chi'}{dt} + \gamma_3 \frac{d\varrho'}{dt},
\end{aligned} \qquad 11)$$

woraus durch Vertauschung der Indices 1, 2, 3 und der Buchstaben p, q, r auch folgt:

$$\delta p = \alpha_1 \frac{d\pi'}{dt} + \beta_1 \frac{d\chi'}{dt} + \gamma_1 \frac{d\varrho'}{dt}. \qquad 11)$$

Nun setzen wir zunächst die in 8) und 9) für δu, δv, δw, δp, δq, δr gegebenen Ausdrücke in die Gleichung 5) für δT, setzen für

U' den Ausdruck 24) der vorigen Vorlesung und bilden die Gleichung 4), indem wir für ε der Reihe nach u', v', w', p', q', r' wählen. So erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} &= r\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial w} + X \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} &= p\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial u} + Y \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w} &= q\frac{\partial T}{\partial u} - p\frac{\partial T}{\partial v} + Z
\end{aligned} \qquad 12)$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} &= w\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial r} + M_x \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} &= u\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial u} + p\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial p} + M_y \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} &= v\frac{\partial T}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial v} + q\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial q} + M_z .
\end{aligned} \qquad 13)$$

Wenden wir aber die in 10) und 11) gegebenen Ausdrücke von δu, δv, δw, δp, δq, δr an, für U' den Ausdruck 25) der vorigen Vorlesung und bilden die Gleichung 4), indem wir für ε der Reihe nach λ', μ', ν', π', χ', ψ' setzen, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Xi &= \frac{d}{dt}\left(\alpha_1\frac{\partial T}{\partial u} + \alpha_2\frac{\partial T}{\partial v} + \alpha_3\frac{\partial T}{\partial w}\right) \\
H &= \frac{d}{dt}\left(\beta_1\frac{\partial T}{\partial u} + \beta_2\frac{\partial T}{\partial v} + \beta_3\frac{\partial T}{\partial w}\right) \\
Z &= \frac{d}{dt}\left(\gamma_1\frac{\partial T}{\partial u} + \gamma_2\frac{\partial T}{\partial v} + \gamma_3\frac{\partial T}{\partial w}\right)
\end{aligned} \qquad 14)$$

und

$$\begin{aligned}
M_\xi &= \frac{d}{dt}\left\{\begin{array}{l}(\gamma_1\beta - \beta_1\gamma)\frac{\partial T}{\partial u} + (\gamma_2\beta - \beta_2\gamma)\frac{\partial T}{\partial v} + (\gamma_3\beta - \beta_3\gamma)\frac{\partial T}{\partial w} \\ + \quad \alpha_1\frac{\partial T}{\partial p} + \qquad \alpha_2\frac{\partial T}{\partial q} + \qquad \alpha_3\frac{\partial T}{\partial r}\end{array}\right\} \\
M_\eta &= \frac{d}{dt}\left\{\begin{array}{l}(\alpha_1\gamma - \gamma_1\alpha)\frac{\partial T}{\partial u} + (\alpha_2\gamma - \gamma_2\alpha)\frac{\partial T}{\partial v} + (\alpha_3\gamma - \gamma_3\alpha)\frac{\partial T}{\partial w} \\ + \quad \beta_1\frac{\partial T}{\partial p} + \qquad \beta_2\frac{\partial T}{\partial q} + \qquad \beta_3\frac{\partial T}{\partial r}\end{array}\right\} \\
M_\zeta &= \frac{d}{dt}\left\{\begin{array}{l}(\beta_1\alpha - \alpha_1\beta)\frac{\partial T}{\partial u} + (\beta_2\alpha - \alpha_2\beta)\frac{\partial T}{\partial v} + (\beta_3\alpha - \alpha_3\beta)\frac{\partial T}{\partial w} \\ + \quad \gamma_1\frac{\partial T}{\partial p} + \qquad \gamma_2\frac{\partial T}{\partial q} + \qquad \gamma_3\frac{\partial T}{\partial r}\end{array}\right\}.
\end{aligned} \qquad 15)$$

Wirken keine Kräfte, so haben die Gleichungen 12) und 13) die Eigenschaft, keine andern unbekannten Functionen zu enthalten, als u, v, w, p, q, r; die Gleichungen 14) und 15) die Eigenschaft, dass eine jede von ihnen unmittelbar integrabel ist. Die Gleichungen 14) sprechen die Sätze von der Bewegung des Schwerpunkts, die Gleichungen 15) die Flächensätze für den Fall, den wir betrachten, aus.

§ 3.

Die entwickelten Formeln setzen voraus, dass der Körper *frei* ist; nehmen wir nun an, dass ein Punkt desselben fest sei, und wählen wir diesen zum Anfangspunkte sowohl der x, y, z als der ξ, η, ζ. Es ist dann

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0,$$

aber es verschwinden auch u', v', w' und λ', μ', ν' und es fallen daher die Gleichungen 12) und 14) fort, die wir aus dem Hamiltonschen Principe erhalten haben, indem wir die Coefficienten dieser Grössen $= 0$ setzten. Die Gleichungen 13) werden

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} &= r\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial r} + M_x \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{dq} &= p\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial p} + M_y \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} &= q\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial q} + M_z, \end{aligned} \tag{16}$$

und die Gleichungen 15), da nach den gemachten Festsetzungeu $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ ist,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\alpha_1\frac{\partial T}{\partial p} + \alpha_2\frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_3\frac{\partial T}{\partial r}\right) &= M_\xi \\ \frac{d}{dt}\left(\beta_1\frac{\partial T}{\partial p} + \beta_2\frac{\partial T}{\partial q} + \beta_3\frac{\partial T}{\partial r}\right) &= M_\eta \\ \frac{d}{dt}\left(\gamma_1\frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2\frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3\frac{\partial T}{\partial r}\right) &= M_\zeta. \end{aligned} \tag{17}$$

Siebente Vorlesung.

(Integration der Differentialgleichungen der Bewegung für einen starren Körper, der um einen festen Punkt sich dreht, und auf den keine Kräfte wirken. Stabilität der Drehung um die Achse des grössten und des kleinsten Trägheitsmomentes. Fall, dass 2 der 3 Hauptträgheitsmomente einander gleich sind. Drehung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt. Integration der für diese geltenden Differentialgleichungen unter gewissen Voraussetzungen.)

§ 1.

Die Differentialgleichungen der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt, die in der vorigen Vorlesung abgeleitet sind, die Gleichungen 16) und 17) derselben, sollen nun in speziellen Fällen integrirt werden. Der erste dieser Fälle sei der, dass keine Kräfte wirken. Die Gleichungen sind dann:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} &= r\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial r} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} &= p\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial p} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} &= q\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial q} \end{aligned} \qquad 1)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\alpha_1\frac{\partial T}{\partial p} + \alpha_2\frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_3\frac{\partial T}{\partial r}\right) &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\beta_1\frac{\partial T}{\partial p} + \beta_2\frac{\partial T}{\partial q} + \beta_3\frac{\partial T}{\partial r}\right) &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\gamma_1\frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2\frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3\frac{\partial T}{\partial r}\right) &= 0. \end{aligned} \qquad 2)$$

Sie gelten nach einer Bemerkung, die am Ende des § 4 der vierten Vorlesung gemacht ist, auch für die Bewegung um den Schwerpunkt eines freien, schweren Körpers.

Nach den in der vorigen Vorlesung gemachten Auseinandersetzungen ist T eine homogene Function zweiten Grades von p, q, r; lässt man die Achsen der x, y, z in die Hauptachsen des Körpers für den Anfangspunkt der x, y, z fallen und bezeichnet durch P, Q, R die Trägheitsmomente des Körpers in Bezug auf dieselben, so ist

$$2T = Pp^2 + Qq^2 + Rr^2, \tag{3}$$

also

$$\frac{\partial T}{\partial p} = Pp, \quad \frac{\partial T}{\partial q} = Qq, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = Rr.$$

Die Gleichungen 1) werden dann

$$\begin{aligned} P\frac{dp}{dt} &= (Q - R)\,qr \\ Q\frac{dq}{dt} &= (R - P)\,rp \\ R\frac{dr}{dt} &= (P - Q)\,pq. \end{aligned} \tag{4}$$

Um ihre Integrale zu finden, vergleichen wir sie mit gewissen anderen Differentialgleichungen, die wir ableiten wollen. Wir bezeichnen durch u und ψ zwei reelle Variable, die durch die Gleichung

$$u = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\psi}}$$

zusammenhängen, in der $\varkappa$ einen reellen, echten Bruch bezeichnet und die Wurzelgrösse positiv zu nehmen ist. Dann ist u eine eindeutige, stetige Function von ψ und umgekehrt, da der Differentialquotient $\frac{du}{d\psi}$ immer einen endlichen positiven Werth besitzt. Es durchläuft ferner u alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$, wenn ψ diese durchläuft, und umgekehrt. Man nennt ψ die Amplitude von u nach dem Modul $\varkappa$ und schreibt

$$\psi = am\, u.$$

Der Kürze wegen setzen wir ferner

$$\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\psi} = \varDelta\psi,$$

wo dann $\varDelta\psi$ eine stets positive Grösse und

$$\frac{d\psi}{du} = \varDelta\psi$$

ist. Bei dieser Bezeichnungsweise haben wir die identischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d\cos\psi}{du} &= -\sin\psi\varDelta\psi \\ \frac{d\sin\psi}{du} &= \cos\psi\varDelta\psi \\ \frac{d\varDelta\psi}{du} &= -\varkappa^2\sin\psi\cos\psi. \end{aligned}$$

In diese setzen wir

$$\begin{gathered} u = \lambda t + \mu \\ p = a\cos\psi, \quad q = b\sin\psi, \quad r = c\varDelta\psi, \end{gathered} \tag{5}$$

indem wir unter λ, μ, a, b, c reelle Constanten verstehen. Dadurch erhalten wir

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{a\lambda}{bc}\,qr$$
$$\frac{dq}{dt} = \frac{b\lambda}{ca}\,rp$$
$$\frac{dr}{dt} = -\varkappa^2\frac{c\lambda}{ab}\,pq.$$

Diese Gleichungen sind von derselben Form, wie die Gleichungen 4); sie werden mit diesen identisch, wenn

$$\begin{aligned}\frac{Q-R}{P} &= -\frac{a\lambda}{bc}\\ \frac{R-P}{Q} &= \frac{b\lambda}{ca}\\ \frac{P-Q}{R} &= -\varkappa^2\frac{c\lambda}{ab}\end{aligned} \tag{6}$$

ist. Lassen sich die 6 Constanten $\varkappa$, λ, μ, a, b, c diesen Gleichungen gemäss und so bestimmen, dass sie alle reell sind und $\varkappa^2$ kleiner als 1 ist, so haben wir in 5) Integrale der Gleichungen 4), und zwar die allgemeinen Integrale, da von den genannten 6 Constanten nur 3 durch die Gleichungen 6) ihre Bestimmung finden, die 3 andern willkürlich bleiben. Es sind diese aus den Werthen, die p, q, r für $t=0$ haben, und die wir p_0, q_0, r_0 nennen wollen, zu bestimmen.

Um die Werthe zu finden, die hiernach den Constanten $\varkappa$, λ, μ, a, b, c beizulegen sind, gehen wir von zwei Integralen der Gleichungen 4) aus, die sich mit Leichtigkeit ergeben. Multiplicirt man diese Gleichungen nämlich mit p, q, r oder mit Pp, Qq, Rr, und addirt sie jedesmal, so kann man integriren; man erhält so

$$Pp^2 + Qq^2 + Rr^2 = \text{const.}$$

und

$$P^2p^2 + Q^2q^2 + R^2r^2 = \text{const.}$$

In einem Augenblick, in dem ψ d. h. $am(\lambda t + \mu)$ einem Vielfachen von 2π gleich ist, ist $\cos\psi = 1$, $\sin\psi = 0$, $\Delta\psi = 1$; daher folgt aus diesen Gleichungen

$$Pa^2 + Rc^2 = Pp_0^2 + Qq_0^2 + Rr_0^2$$
$$P^2a^2 + R^2c^2 = P^2p_0^2 + Q^2q_0^2 + R^2r_0^2$$

oder

$$\begin{aligned}P(P-R)a^2 &= P(P-R)p_0^2 + Q(Q-R)q_0^2\\ R(P-R)c^2 &= Q(P-Q)q_0^2 + R(P-R)r_0^2.\end{aligned} \tag{7}$$

Diese Gleichungen ergeben a^2 und c^2, und zwar als positive Grössen, wenn, wie wir nun annehmen wollen, Q seiner Grösse nach das *mittlere* von den 3 Trägheitsmomenten P, Q, R ist. Die Gleichungen 6) lehren dann b^2, λ^2 und $\varkappa^2$ kennen; durch Division und

Multiplikation der beiden ersten und durch Division der ersten und dritten erhält man nämlich

$$
\begin{aligned}
b^2 &= a^2 \frac{P(P-R)}{Q(Q-R)} \\
\lambda^2 &= c^2 \frac{(P-R)(Q-R)}{PQ} \\
\varkappa^2 &= \frac{a^2}{c^2} \frac{P(P-Q)}{R(Q-R)} .
\end{aligned} \qquad 8)
$$

Bei der über das Trägheitsmoment Q gemachten Festsetzung sind hiernach b^2, λ^2, $\varkappa^2$ positive Grössen; aber nicht immer ist $\varkappa^2$ kleiner als 1; ist die letztere Bedingung nicht erfüllt, so genügt es aber, um sie zu erfüllen, die x-Achse mit der z-Achse zu vertauschen, oder, wenn man das neue Coordinatensystem mit dem alten congruent erhalten will, die neue x-Achse der alten z-Achse gleichgerichtet, die neue z-Achse der alten x-Achse entgegengesetzt gerichtet anzunehmen. Dabei vertauschen sich die Werthe von P und R und gleichzeitig die von $p_0{}^2$ und $r_0{}^2$, daher nach den Gleichungen 7) auch die von a^2 und c^2, und der in 8) gegebene Werth von $\varkappa^2$ geht hiernach in sein Reciprokes über.

Die Gleichungen 8) ersetzen nicht vollständig die Gleichungen 6), aus denen sie hergeleitet sind. Sind jene erfüllt, so muss man *eine*, etwa die erste, von diesen noch in Betracht ziehen und die Vorzeichen ihrer beiden Seiten gleich machen. Durch diese Gleichung wird das Vorzeichen einer der Grössen a, b, c, λ bestimmt, wenn die der andern festgesetzt sind. Wir wollen λ als positiv annehmen; die erste der Gleichungen 6) bestimmt dann das Vorzeichen von b, wenn die Vorzeichen von a und c bekannt sind. Von diesen muss das Vorzeichen von c auf eine bestimmte Weise gewählt werden wegen der Gleichungen

$$p_0 = a \cos \operatorname{am} \mu , \quad q_0 = b \sin \operatorname{am} \mu , \quad r_6 = c \Delta \operatorname{am} \mu , \qquad 9)$$

welche der Gleichungen 5) wegen bestehen müssen, und welche die letzten sind, denen wir noch zu genügen haben. Aus der dritten von ihnen folgt, dass, wenn μ, wie es sein soll, reell ist, c dasselbe Vorzeichen wie r_0 haben muss, da dann $\Delta \operatorname{am} \mu$ positiv ist. Das Vorzeichen von a können wir beliebig wählen, wir wollen es dem von p_0 gleich annehmen; das Vorzeichen von b ist dann durch die erste der Gleichungen 6) bestimmt.

Die Gleichungen 9) dienen zur Bestimmung der letzten der eingeführten 6 Constanten, der Grösse μ. Aus der ersten dieser Gleichungen finden wir 2 Werthe von $\operatorname{am} \mu$, wenn wir festsetzen, was wir thun wollen, dass diese Grösse zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt, da den Gleichungen 7) zufolge a^2 grösser als $p_0{}^2$ ist. Die zweite hebt die dabei übrig bleibende Zweideutigkeit, indem sie zeigt, dass

am μ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und 0 oder zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, je nachdem die Vorzeichen von q_0 und b entgegengesetzt sind oder übereinstimmen. Aus dem gefundenen, reellen Werthe von am μ oder ψ folgt dann, einer vorausgeschickten Bemerkung nach, *ein* reeller Werth von μ. Hiermit ist bewiesen, dass die Gleichungen 5) die Integrale der Gleichungen 4) sind, und die in jenen vorkommenden Constanten sind eindeutig bestimmt.

Die Werthe von p, q, r sollen jetzt benutzt werden, um die Winkel ϑ, f, φ zu ermitteln, die in den Gleichungen 8) der fünften Vorlesung definirt sind und die die Lage des Körpers in jedem Augenblick bedingen. Es könnten dazu die Gleichungen dienen, die zwischen den Differentialquotienten von ϑ, f, φ nach der Zeit und den Grössen p, q, r bestehen und aus den folgenden Betrachtungen sich ergeben.

Eine der Gleichungen, die aus den Gleichungen 20) der fünften Vorlesung durch die Bemerkung abzuleiten sind, die den Eingang der sechsten Vorlesung bildet, ist

$$\frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 q - \gamma_2 p,$$

woraus folgt

$$\frac{d\vartheta}{dt} = p \sin f - q \cos f. \tag{10}$$

Es ist ferner

$$\operatorname{tg} f = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \quad \cos^2 f = \frac{\gamma_1^2}{1 - \gamma_3^2}$$

$$df = \frac{\gamma_1 d\gamma_2 - \gamma_2 d\gamma_1}{1 - \gamma_3^2}$$

$$= \frac{\gamma_1(\gamma_3 p - \gamma_1 r) - \gamma_2(\gamma_2 r - \gamma_3 q)}{1 - \gamma_3^2}\, dt$$

$$= \left(\frac{\gamma_3(\gamma_1 p + \gamma_2 q)}{1 - \gamma_3^2} - r\right) dt$$

oder

$$\frac{df}{dt} = \frac{p \cos f + q \sin f}{\operatorname{tg} \vartheta} - r. \tag{11}$$

Endlich hat man

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \quad \cos^2 \varphi = \frac{\alpha_3^2}{1 - \gamma_3^2}$$

$$d\varphi = \frac{\alpha_3 d\beta_3 - \beta_3 d\alpha_3}{1 - \gamma_3^2}$$

$$= \frac{\alpha_3(\beta_1 q - \beta_2 p) - \beta_3(\alpha_1 q - \alpha_2 p)}{1 - \gamma_3^2}\, dt,$$

also nach den Gleichungen 6) und 7) der fünften Vorlesung

$$d\varphi = \frac{\gamma_1 p + \gamma_2 q}{1 - \gamma_3^2}\, dt$$

oder

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{p \cos f + q \sin f}{\sin \vartheta}. \tag{12}$$

Wir merken an, dass aus 11) und 12)

$$df = \cos\vartheta d\varphi - r dt \tag{13}$$

und aus 10) und 12)

$$(p^2 + q^2) dt^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2 \tag{14}$$

folgt.

Bei der Bestimmung von ϑ, f, φ ist man aber nicht ausschliesslich auf die Gleichungen 10), 11), 12) angewiesen; es können dabei auch die Gleichungen 2) benutzt werden. Durch Integration derselben und bei Benutzung des in 3) angegebenen Werthes von T ergiebt sich

$$\begin{aligned} \alpha_1 Pp + \alpha_2 Qq + \alpha_3 Rr &= A \\ \beta_1 Pp + \beta_2 Qq + \beta_3 Rr &= B \\ \gamma_1 Pp + \gamma_2 Qq + \gamma_3 Rr &= C, \end{aligned} \tag{15}$$

wo A, B, C Constanten bedeuten. Zwischen diesen und früher eingeführten Constanten besteht eine Relation; quadrirt und addirt man nämlich die Gleichungen 15), so erhält man

$$P^2p^2 + Q^2q^2 + R^2r^2 = A^2 + B^2 + C^2,$$

woraus folgt

$$A^2 + B^2 + C^2 = P^2a^2 + R^2c^2. \tag{16}$$

Sieht man Pp, Qq, Rr als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes im System der x, y, z an, so sprechen die Gleichungen 15) aus, dass A, B, C die Coordinaten desselben Punktes in Bezug auf die Achsen der ξ, η, ζ sind. Dieser Punkt ändert sich mit der Zeit nicht, da A, B, C Constanten sind; man kann daher die von dem Anfangspunkte der Coordinaten nach ihm gezogene Linie zur ζ-Achse nehmen. Das soll geschehen. Dann ist

$$A = 0; \quad B = 0$$

und nach 16)

$$C = \sqrt{P^2a^2 + R^2c^2},$$

wo die Wurzelgrösse positiv zu nehmen ist. Hiernach erhält man aus den Gleichungen 15), wenn man sie mit α_1, β_1, γ_1 oder α_2, β_2, γ_2 oder α_3, β_3, γ_3 multiplicirt und jedesmal addirt:

$$\gamma_1 = \frac{Pp}{\sqrt{P^2a^2+R^2c^2}}, \quad \gamma_2 = \frac{Qq}{\sqrt{P^2a^2+R^2c^2}}, \quad \gamma_3 = \frac{Rr}{\sqrt{P^2a^2+R^2c^2}}. \tag{17}$$

Daraus bestimmen sich leicht die Winkel ϑ und f. Es ist zuerst ϑ aus der Gleichung

$$\gamma_3 = \cos\vartheta$$

zu ermitteln; für *eine* Lage des Körpers kann dabei ϑ zwischen $-\pi$ und $+\pi$ gewählt werden, oder, da nach einer am angeführten Orte gemachten Bemerkung über das Vorzeichen von ϑ nach Willkür verfügt werden kann, zwischen 0 und π. Die letzte der Gleichungen 5)

zeigt, dass r^2 nicht grösser als c^2 werden kann; nach der letzten der Gleichungen 17) erreicht daher $\gamma_3{}^2$ oder $\cos^2\vartheta$ nicht den Werth 1, und es überschreitet also ϑ die Grenzen 0 und π nicht. Bemerkt möge werden, dass ϑ auch den Werth $\frac{\pi}{2}$ nicht überschreitet, da r nicht verschwinden kann.

Zur Bestimmung von f hat man

$$\gamma_1 = \cos f \sin\vartheta, \quad \gamma_2 = \sin f \sin\vartheta$$

und die beiden ersten der Gleichungen 17). Für *eine* Lage des Körpers ist hierdurch f eindeutig bestimmt, wenn man noch festsetzt, dass für sie f zwischen 0 und 2π liegt; die Festsetzung, dass f sich stetig mit der Lage des Körpers ändert, bestimmt es dann eindeutig auch für jede andere Lage, die der Körper bei seiner Bewegung annimmt. Es bleibt noch übrig φ zu ermitteln. Hierbei muss man auf die Gleichung 12) zurückgehen. In Verbindung mit den Gleichungen 17) giebt diese

$$d\varphi = \sqrt{P^2a^2 + R^2c^2}\,\frac{Pp^2 + Qq^2}{P^2p^2 + Q^2q^2}\,dt.$$

Erinnert man sich an die Integrale der Gleichungen 4), aus denen die Gleichungen 7) hergeleitet sind, so kann man hierfür schreiben

$$d\varphi = \sqrt{P^2a^2 + R^2c^2}\,\frac{Pa^2 + Rc^2 - Rr^2}{P^2a^2 + R^2c^2 - R^2r^2}\,dt,$$

oder, wenn man für r seinen Werth aus 5) setzt:

$$d\varphi = \sqrt{P^2a^2 + R^2c^2}\,\frac{Pa^2 + Rc^2\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(\lambda t + \mu)}{P^2a^2 + R^2c^2\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(\lambda t + \mu)}\,dt. \qquad 18)$$

Die Integration dieser Gleichung führt auf ein elliptisches Integral dritter Gattung.

§ 2.

Es ist von Interesse die jetzt gefundenen Integralgleichungen des Problems der Rotation eines Körpers, auf den keine Kräfte wirken, um einen festen Punkt auf den Fall anzuwenden, dass der Modul der elliptischen Functionen, die in diesen Gleichungen auftreten, also $\varkappa$, Null oder unendlich klein ist. Es reduciren sich dann die elliptischen Functionen auf trigonometrische.

Der in 8) für $\varkappa^2$ angegebene Ausdruck zeigt, dass $\varkappa$ unendlich klein ist, wenn a unendlich klein, c endlich ist und P, Q, R irgend welche, nur nicht solche Werthe besitzen, für welche der Factor von $\frac{a^2}{c^2}$ in dem Ausdruck von $\varkappa^2$ unendlich gross wird. Nach der ersten der Gleichungen 8) wird dann auch b unendlich klein. Die Gleichungen 7) zeigen, dass a unendlich klein ist, wenn p_0 und q_0 es sind, was wir annehmen wollen. Die Gleichungen 5) geben dann

bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung:

$$p = a\cos(\lambda t + \mu), \quad q = b\sin(\lambda t + \mu), \quad r = c\sqrt{1 - \varkappa^2\sin^2(\lambda t + \mu)}.$$

Was die Werthe von ϑ, f, φ anbelangt, so folgt aus den beiden ersten dieser Gleichungen in Verbindung mit den beiden ersten der Gleichungen 17), wenn man für b^2 seinen Werth aus 8) setzt und unendlich kleine Grössen höherer Ordnung vernachlässigt,

$$\sin^2\vartheta = \frac{Pa^2}{Rc^2}\left(\frac{P}{R} + \frac{P-Q}{Q-R}\sin^2(\lambda t + \mu)\right).$$

Es ist hiernach $\sin\vartheta$ unendlich klein. Ist, wie wir annehmen wollen, die z-Achse so gewählt, dass r, oder, was dasselbe ist, c positiv ist, dass also $\cos\vartheta$ positiv ist, so ist hiernach und nach den allgemeinen über ϑ gemachten Festsetzungen ϑ selbst unendlich klein und dabei positiv; die Gleichung bestimmt dann ϑ eindeutig.

Ferner hat man

$$\operatorname{tg} f = \frac{Qb}{Pa}\operatorname{tg}(\lambda t + \mu).$$

Endlich ergiebt sich aus 13), da ϑ unendlich klein und r unendlich wenig von c verschieden ist, bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen

$$\varphi = f + ct + \text{const.},$$

wo man die Constante der Integration aus dem Anfangswerthe von φ zu bestimmen hat.

Einer Festsetzung zufolge, die wir bei der Aufstellung der Gleichungen 8) haben machen müssen, kann die z-Achse die Achse des grössten oder die des kleinsten, nicht aber die des mittleren Hauptträgheitsmomentes sein. Die durchgeführte Rechnung zeigt daher, dass, wenn die augenblickliche Drehungsachse zur Zeit $t = 0$ unendlich wenig von der Achse des grössten oder der des kleinsten Hauptträgheitsmomentes abweicht, sie dieser immer unendlich nahe bleibt. Diese Thatsache pflegt man so auszusprechen, dass man sagt, die Rotation des Körpers um die Achse des grössten und um die Achse des kleinsten Hauptträgheitsmomentes ist eine *stabile*. Es kann der Körper auch um die Achse des mittleren Hauptträgheitsmomentes rotiren, denn man genügt den Gleichungen 4) durch die Annahme $p = 0$, $r = 0$, $q = \text{const.}$; aber diese Rotation ist keine stabile, d. h. weicht die augenblickliche Drehungsachse für $t = 0$ unendlich wenig von der genannten Hauptachse ab, so wird diese Abweichung mit der Zeit (freilich erst nach Verlauf einer unendlich grossen Zeit) eine endliche. Sind nämlich p_0 und r_0 unendlich klein, so ist den Gleichungen 7) und 8) zufolge $\varkappa^2$ unendlich wenig von 1 verschieden, die elliptischen Functionen von t, welche in den Gleichungen 5) vorkommen, verwandeln sich in Exponentialfunctionen, und die Discussion dieser führt zu dem ausgesprochenen Satze, was indessen hier nicht gezeigt werden soll.

§ 3.

Die letzte der Gleichungen 8) lehrt, dass $\varkappa$ verschwindet, wenn $P = Q$ wird; diesen Fall, also den Fall, dass zwei von den 3 Hauptträgheitsmomenten einander gleich sind, wollen wir jetzt betrachten. Die Gleichungen 7) geben dann

$$a^2 = p_0^2 + q_0^2, \quad c = r_0;$$

den Gleichungen 6), die dasselbe aussprechen, wie die Gleichungen 8), aber eine gewisse Unbestimmtheit in Betreff der Vorzeichen heben, die diese übrig lassen, genügt man durch

$$b = a, \quad \lambda = r_0 \frac{R - P}{P};$$

die Gleichungen 5) werden dabei

$$p = \sqrt{p_0^2 + q_0^2} \cos(\lambda t + \mu), \quad q = \sqrt{p_0^2 + q_0^2} \sin(\lambda t + \mu), \quad r = r_0.$$

Die Gleichungen 17) ergeben

$$\cos\vartheta = \frac{R r_0}{\sqrt{P^2(p_0^2 + q_0^2) + R^2 r_0^2}}, \text{ also } = \text{const.},$$

und

$$\operatorname{tg} f = \operatorname{tg}(\lambda t + \mu)$$

d. h.

$$f = \lambda t + \mu + n\pi,$$

wo n eine ganze Zahl bedeutet. Aus der Gleichung 18) folgt endlich

$$\varphi = \frac{\sqrt{P^2(p_0^2 + q_0^2) + R^2 r_0^2}}{P} t + \text{const.}$$

§ 4.

Wir wollen jetzt die Rotation eines *schweren*, starren Körpers um einen festen Punkt ins Auge fassen. Die Betrachtungen, die in der vierten Vorlesung angestellt sind, lehren zwei Integrale der für diese gültigen Differentialgleichungen kennen; der Satz von der lebendigen Kraft liefert das eine, der Satz von der Erhaltung der Flächen in Bezug auf eine horizontale Ebene das zweite. Wir nehmen die ζ-Achse vertikal abwärts gerichtet an, beziehen ξ, η, ζ auf den Schwerpunkt des Körpers, nennen m die Masse desselben und g die Schwere; bei den in den Gleichungen 16) und 17) der sechsten Vorlesung gebrauchten Bezeichnungen ist dann nach den am Ende der fünften Vorlesung für die Drehungsmomente aufgestellten Formeln

$$M_\xi = mg\eta, \quad M_\eta = -mg\xi, \quad M_\zeta = 0,$$

und, wenn man die z-Achse durch den Schwerpunkt legt und s den Abstand dieses von dem festen Punkte nennt, wobei

$$\xi = \alpha_3 s, \quad \eta = \beta_3 s, \quad \zeta = \gamma_3 s$$

wird:

$$M_x = - mgs\gamma_2, \quad M_y = mgs\gamma_1, \quad M_z = 0.$$

Hiernach giebt die letzte der Gleichungen 17) der sechsten Vorlesung

$$\gamma_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3 \frac{\partial T}{\partial r} = C, \tag{19}$$

wo C eine Constante bedeutet. Diese Gleichung spricht den Satz von der Erhaltung der Flächen in Bezug auf die $\xi\eta$-Ebene aus.

Die Gleichungen 16) der sechsten Vorlesung werden

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p} &= r \frac{\partial T}{\partial q} - q \frac{\partial T}{\partial r} - mgs\gamma_2 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q} &= p \frac{\partial T}{\partial r} - r \frac{\partial T}{\partial p} + mgs\gamma_1 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial r} &= q \frac{\partial T}{\partial p} - p \frac{\partial T}{\partial q}. \end{aligned} \tag{20}$$

Man hat dieselben mit p, q, r zu multipliciren und zu addiren, um durch Integration die Gleichung zu erhalten, die den Satz von der lebendigen Kraft ausdrückt. Da nämlich T eine homogene Function zweiten Grades von p, q, r ist, so hat man

$$2T = p \frac{\partial T}{\partial p} + q \frac{\partial T}{\partial q} + r \frac{\partial T}{\partial r};$$

überdies ist

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial T}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial T}{\partial r} \frac{dr}{dt},$$

woraus folgt

$$\frac{dT}{dt} = p \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p} + q \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q} + r \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial r}.$$

Nimmt man hinzu, dass

$$\gamma_1 q - \gamma_2 p = \frac{d\gamma_3}{dt}$$

ist, so ergiebt sich auf dem angegebenen Wege

$$T = mgs\gamma_3 + H, \tag{21}$$

wo H eine Constante bedeutet.

Ein drittes allgemeines Integral der hier zu behandelnden Differentialgleichungen zu finden, ist nicht gelungen. Wir specialisiren unser Problem zunächst durch *die* Annahme, dass die z-Achse, also die durch den festen Punkt und den Schwerpunkt des Körpers gelegte Linie, eine der Hauptachsen für den festen Punkt ist. Die Achsen der x und der y können dann so gewählt werden, dass sie die beiden andern Hauptachsen sind, dass also für T der in der Gleichung 3) angegebene Ausdruck gilt. Nun nehmen wir ferner an, dass

$$P = Q$$

ist; die letzte der Gleichungen 20) wird dann integrabel und giebt

$$r = \text{const.}$$

Zugleich werden die Gleichungen 19) und 21):

$$P(p\gamma_1 + q\gamma_2) + Rr\gamma_3 = C$$
$$P(p^2 + q^2) + Rr^2 = 2\,mgs\gamma_3 + 2H.$$

Nun führen wir wieder die durch die Gleichungen 8) der fünften Vorlesung definirten Winkel ϑ, φ, f ein. Nach 12) und 14) werden dann diese Gleichungen

$$\begin{aligned} P\sin^2\vartheta\, d\varphi &= (C - Rr\cos\vartheta)\, dt \\ P\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) &= (2\,mgs\cos\vartheta + 2H - Rr^2)\, dt^2. \end{aligned} \qquad 22)$$

Da in ihnen φ und t selbst nicht vorkommen, sondern nur ihre Differentiale, so kann man aus ihnen durch Integration φ und t als Functionen von ϑ, also auch ϑ und φ als Functionen von t darstellen; ist das geschehen, so erlaubt die Gleichung 13) auch f als Function von t zu berechnen. Die Functionen, auf die man auf diese Weise kommt, sind elliptische.

§ 5.

Durchführen wollen wir die eben angedeutete Rechnung nur für einige specielle Fälle. Zuerst nehmen wir an, dass p und q für $t = 0$ verschwinden, d. h. dass zur Zeit $t = 0$ die augenblickliche Drehungsachse die z-Achse ist. Die Gleichungen 10) und 12) zeigen, dass dann auch $\frac{d\vartheta}{dt}$ und $\frac{d\varphi}{dt}$ für $t = 0$ verschwinden; ist ϑ_0 der Werth von ϑ für $t = 0$, so ist daher nach den Gleichungen 22)

$$0 = C - Rr\cos\vartheta_0$$

und

$$0 = 2\,mgs\cos\vartheta_0 + 2H - Rr^2;$$

dieselben Gleichungen werden also:

$$\begin{aligned} P\sin^2\vartheta\, d\varphi &= Rr\,(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)\, dt \\ P\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) &= 2\,mgs\,(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)\, dt^2. \end{aligned} \qquad 23)$$

Eliminirt man aus ihnen $d\varphi$ und führt statt ϑ und ϑ_0 die Hälften dieser Winkel ein, so erhält man

$$\begin{aligned} &P^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}\cos^2\frac{\vartheta}{2}\, d\vartheta^2 \\ &= \left(\sin^2\frac{\vartheta_0}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)\left\{4\,mgsP\sin^2\frac{\vartheta}{2}\cos^2\frac{\vartheta}{2} - R^2r^2\left(\sin^2\frac{\vartheta_0}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)\right\} dt^2. \end{aligned} \qquad 24)$$

Nun setzen wir

$$\sin^2\frac{\vartheta}{2} = \sin^2\frac{\vartheta_0}{2} - M^2\cos^2\psi, \qquad 25)$$

wo M eine Constante bedeutet, über die zu verfügen wir uns vorbehalten; dabei wird

$$\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta = 2M^2\sin\psi\cos\psi\,d\psi.$$

Die Gleichung 24) erhält daher den Factor $M^2\cos^2\psi$ und giebt bei Fortlassung desselben

$$4P^2M^2\sin^2\psi\,d\psi^2$$

$$=\left\{4mgsP\left(\sin^2\frac{\vartheta_0}{2}-M^2\cos^2\psi\right)\left(\cos^2\frac{\vartheta_0}{2}+M^2\cos^2\psi\right)-R^2r^2M^2\cos^2\psi\right\}dt^2.$$

Der Factor von dt^2 ist eine Function zweiten Grades von $\cos^2\psi$, also auch eine solche von $\sin^2\psi$; bestimmen wir die Grösse M so, dass das von $\sin^2\psi$ unabhängige Glied in ihm verschwindet, so lässt sich die Gleichung auch durch $\sin^2\psi$ dividiren und auf die Form

$$d\psi^2 = \lambda^2(1-\varkappa^2\sin^2\psi)\,dt^2 \tag{26}$$

bringen, wo λ und $\varkappa$ gewisse Constanten bedeuten. Es ist dann M^2 aus der quadratischen Gleichung

$$4mgsP\left(\sin^2\frac{\vartheta_0}{2}-M^2\right)\left(\cos^2\frac{\vartheta_0}{2}+M^2\right)-R^2r^2M^2=0$$

zu bestimmen und es wird

$$\lambda^2=\frac{4mgsP(2M^2+\cos\vartheta_0)+R^2r^2}{4P^2}$$

$$\varkappa^2=\frac{4mgsPM^2}{4mgsP(2M^2+\cos\vartheta_0)+R^2r^2}.$$

Die quadratische Gleichung für M^2 lässt sich schreiben

$$M^4+M^2\left(\frac{R^2r^2}{4mgsP}+\cos\vartheta_0\right)-\tfrac{1}{4}\sin^2\vartheta_0=0;$$

die eine ihrer Wurzeln ist positiv, die andere negativ; wir wählen die positive, d. h. wir setzen

$$M^2=\tfrac{1}{2}\left\{-\frac{R^2r^2}{4mgsP}-\cos\vartheta_0+\sqrt{\left(\frac{R^2r^2}{4mgsP}+\cos\vartheta_0\right)^2+\sin^2\vartheta_0}\right\},$$

wo die Wurzelgrösse positiv zu nehmen ist. Dadurch wird

$$\lambda^2=\frac{mgs}{P}\sqrt{\left(\frac{R^2r^2}{4mgsP}+\cos\vartheta_0\right)^2+\sin^2\vartheta_0}$$

$$1-2\varkappa^2=\frac{\frac{R^2r^2}{4mgsP}+\cos\vartheta_0}{\sqrt{\left(\frac{R^2r^2}{4mgsP}+\cos\vartheta_0\right)^2+\sin\vartheta_0}}.$$

Der für $1-2\varkappa^2$ aufgestellte Ausdruck liegt zwischen -1 und $+1$, und daher $\varkappa^2$ zwischen 0 und 1; λ^2 ist positiv. Hiernach können wir das Integral der Gleichung 26) schreiben

$$\psi=\operatorname{am}(\lambda t+\mu),\quad \text{Mod. } \varkappa,$$

wo μ die Constante der Integration bedeutet.

Wir wollen den Fall weiter verfolgen, dass r als unendlich gross angesehen werden kann. Dann wird $\varkappa = 0$, also

$$\psi = \lambda t + \mu \tag{27}$$

und nach 25)

$$\sin^2 \frac{\vartheta}{2} = \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} - M^2 \cos^2 (\lambda t + \mu);$$

ferner wird

$$M^2 = \frac{mg\varkappa P}{R^2 r^2} \sin^2 \vartheta_0$$

$$\lambda = \frac{Rr}{2P}.$$

Hiernach schwankt ϑ zwischen zwei unendlich nahen Grenzen in unendlich kurzen Perioden. Die Integration der ersten der Gleichungen 23) wird dadurch leicht, dass auf ihrer linken Seite ϑ_0 statt ϑ gesetzt werden kann; sie wird dadurch bei Rücksicht auf die Gleichungen 25) und 27)

$$P \sin^2 \vartheta_0 \, d\varphi = -\frac{2RrM^2}{\lambda} \cos^2 \psi \, d\psi,$$

oder bei dem Werthe, den M^2 hat,

$$d\varphi = -\frac{2mgs}{Rr\lambda} \cos^2 \psi \, d\psi.$$

Da

$$\int \cos^2 \psi d\psi = \frac{\psi}{2} + \frac{\sin 2\psi}{4},$$

so folgt hieraus bei Benutzung von 27)

$$\varphi = -\frac{mgs}{Rr}\left(t + \frac{1}{2\lambda} \sin 2\psi\right) + \text{const.},$$

oder, da λ unendlich gross von der Ordnung von r ist, bei Vernachlässigung von unendlich Kleinem:

$$\varphi = -\frac{mgs}{Rr} t + \text{const.}$$

Der Winkel f endlich ergiebt sich leicht aus 13), wenn man hier ϑ_0 für ϑ setzt; man findet

$$f = \varphi \cos \vartheta_0 - rt + \text{const.}$$

oder

$$f = -\left(r + \frac{mgs}{Rr} \cos \vartheta_0\right) t + \text{const.}$$

§ 6.

Statt der Annahme, die im vorigen Paragraphen verfolgt ist, dass p und q für $t = 0$ verschwinden, wollen wir nun die Annahme machen, dass für $t = 0$, also immer $r = 0$ ist. Die Gleichungen 22) werden dann

$$\begin{aligned} P \sin^2 \vartheta d\varphi &= C dt \\ P(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) &= 2(mgs \cos \vartheta + H) dt^2. \end{aligned} \qquad 28)$$

Sie sind, abgesehen von einer Verschiedenheit der Bezeichnung, identisch mit den Gleichungen 12) der zweiten Vorlesung, woraus folgt, dass in dem hier betrachteten Falle die durch den festen Punkt und den Schwerpunkt des Körpers gehende gerade Linie gerade so sich bewegt, wie ein einfaches Pendel von gewisser Länge. Diese Länge l ist bestimmt durch die Gleichung

$$l = \frac{P}{ms}.$$

Ist die Constante C in den Gleichungen 22) oder, was dasselbe ist, die Constante c in den Gleichungen 12) der zweiten Vorlesung $= 0$, so ist

$$\varphi = \text{Const.}$$

und

$$\left(\frac{d\frac{\vartheta}{2}}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l}\left(h - \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right), \qquad 29)$$

wo h eine willkürliche Constante bedeutet. Dieselbe muss positiv sein, da die linke Seite der Gleichung 29) positiv ist, kann aber jeden Werth zwischen 0 und $+\infty$ haben. Ist $h < 1$, so kann man

$$h = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

mit der näheren Bestimmung setzen, dass α zwischen 0 und π liegt; es ist dann α die Amplitude der ebenen Schwingungen, welche der Körper oder das Pendel ausführt. Macht man

$$\sin \frac{\vartheta}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \psi,$$

so wird dabei, wie schon an dem mehrfach erwähnten Orte bemerkt ist,

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\, dt = \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \psi}},$$

also

$$\psi = \operatorname{am}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}} + \mu\right), \quad \text{Mod.} \sin \frac{\alpha}{2},$$

wo μ eine willkürliche Constante bedeutet, oder

$$\sin \frac{\vartheta}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \operatorname{am}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}} + \mu\right), \quad \text{Mod.} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Ist aber in der Gleichung 29) $h > 1$, so kann man

$$h = \frac{1}{\varkappa^2}$$

setzen, wo $\varkappa$ einen reellen echten Bruch bedeutet; man erhält dadurch

$$\left(\frac{d\frac{\vartheta}{2}}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l\varkappa^2}\left(1 - \varkappa^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)$$

oder

$$\frac{\vartheta}{2} = \mathrm{am}\left(\frac{t}{\varkappa}\sqrt{\frac{g}{l}} + \mu\right), \ \text{Mod. } \varkappa,$$

wo μ wiederum eine willkürliche Constante, und $\varkappa$ positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem ϑ bei wachsendem t zunimmt oder abnimmt.

Achte Vorlesung.

(Messung der Schwere. Pendel. Correspondirendes einfaches Pendel. Reversionspendel. Bessel's Pendelversuche. Einfluss der Luft. Aenderungen der Schwere mit der Höhe und mit der geographischen Breite.)

§ 1.

Wir haben diejenigen Bewegungen, als deren Ursache man die *Schwere* bezeichnet, schon mehrfach als Beispiele zur Erläuterung der allgemeinen Begriffe und Sätze der Mechanik betrachtet; wir wollen diese Bewegungen jetzt näher ins Auge fassen und zunächst auseinandersetzen, wie die Schwere *gemessen* wird. Es dient hierzu die Beobachtung der Schwingungen eines schweren Körpers, der um eine horizontale Achse drehbar ist. Eine solche Vorrichtung nennt man ein *Pendel*, und zwar ein *zusammengesetztes* im Gegensatze zu einem einfachen Pendel, das wir schon zu besprechen gehabt haben. Halten wir die Voraussetzung fest, dass die Schwere eine constante beschleunigende Kraft ist, betrachten das Pendel als einen starren Körper und sehen ab von dem Einfluss der Luft, der Bewegung der Erde und der Reibung an der Drehungsachse, so können wir die Bewegung eines solchen Pendels sehr leicht durch Rechnung verfolgen. Die Lage desselben in einem Augenblick ist durch *eine* Variable bestimmt; zu dieser wählen wir den Winkel ϑ, den die durch die Drehungsachse und den Schwerpunkt des Pendels gelegte Ebene mit der vertikalen, durch die Drehungsachse gelegten Ebene bildet. Nach § 5 der vierten Vorlesung gilt der Flächensatz in Bezug auf eine zur Drehungsachse senkrechte Ebene, weil die Verbindungen der Punkte des Pendels eine Drehung um diese gestatten, und dieser Satz liefert eine Differentialgleichung für jenen Winkel. Nennen wir g den Werth der Schwere, m die Masse des Pendels, s den Abstand seines Schwerpunkts von der Drehungsachse und K sein Trägheitsmoment in Bezug auf diese, so ist diese Differentialgleichung

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -g\frac{ms}{K}\sin\vartheta.$$

Sie ist nach § 2 der zweiten Vorlesung identisch mit derjenigen, welche für die ebenen Schwingungen eines *einfachen* Pendels gilt, falls die Länge l dieses Pendels der Gleichung

$$l = \frac{K}{m s} \qquad 1)$$

genügt. Man nennt dieses einfache Pendel das dem gegebenen *correspondirende*; bei gleicher Amplitude hat es dieselbe Schwingungsdauer wie das gegebene. Hat man nach 1) mit Hülfe von Abmessungen, die an den Theilen des Pendels vorgenommen sind, l bestimmt und die Schwingungsdauer T, die einer unendlich kleinen Amplitude entspricht, durch Beobachtung ermittelt, so findet man g aus der Gleichung

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot$$

Ein Paar einfacher Beispiele mögen die Weise erläutern, in der l gefunden werden kann.

Es bestehe das Pendel aus einer homogenen Kugel und einem Faden, dessen Masse vernachlässigt werden kann. Der Schwerpunkt der Kugel ist, wie der Schwerpunkt eines jeden homogenen Körpers, der einen Mittelpunkt hat, der Mittelpunkt; es ist also $s =$ dem Abstande des Mittelpunktes der Kugel von dem Aufhängungspunkte. Etwas mehr Rechnung erfordert die Bestimmung des Trägheitsmomentes.

Es sei dm ein Massenelement eines Körpers, das die Coordinaten x, y, z hat; das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die z-Achse ist dann

$$= \int dm\,(x^2 + y^2).$$

Nehmen wir nun an, dass der Körper die constante Dichtigkeit μ habe und ein Rotationskörper sei, dessen Rotationsachse die z-Achse ist. Setzen wir

$$y = r \cos \varphi, \quad z = r \sin \varphi,$$

so wird jenes Trägheitsmoment

$$= \mu \int\int\int dx\, r\, dr\, d\varphi\, (x^2 + r^2 \cos^2 \varphi),$$

oder, da nach φ von 0 bis 2π zu integriren und

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi\, d\varphi = \pi$$

ist,

$$= 2\pi\mu \int\int dx\, r\, dr \left(x^2 + \frac{r^2}{2}\right) \cdot \qquad 2)$$

Hier hat man x und r sich vorzustellen als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der Fläche, durch deren ganze Umdrehung der Körper entstanden ist.

Es sei nun der Körper eine Kugel vom Radius R und der An-

fangspunkt der Coordinaten sei der Mittelpunkt derselben. Die genannte Fläche ist dann ein Halbkreis. Setzt man

$$x = \varrho \cos \psi, \quad r = \varrho \sin \psi,$$

so ist das Integral 2) in Bezug auf ϱ von 0 bis R, in Bezug auf ψ von 0 bis π zu bilden, und für $dx\,dr$ ist $\varrho\,d\varrho\,d\psi$ zu setzen. Das Integral ist daher

$$= \pi\mu \int_0^R \int_0^\pi \varrho^4 d\varrho\,(1 + \cos^2\psi) \sin\psi\,d\psi$$

d. h.

$$= \tfrac{8}{15}\,\pi\mu R^5,$$

oder, wenn m die Masse der Kugel bedeutet, also

$$m = \tfrac{4}{3}\,\pi\mu R^3$$

ist,

$$= \tfrac{2}{5}\,m R^2.$$

Nach einem im § 1 der sechsten Vorlesung abgeleiteten Satze ist daher das Trägheitsmoment der Pendelkugel in Bezug auf die Drehungsachse des Pendels

$$= m\,(s^2 + \tfrac{2}{5} R^2)$$

und nach Gleichung 1) die Länge des correspondirenden einfachen Pendels

$$= s + \tfrac{2}{5}\,\frac{R^2}{s}\,.$$

Berechnen wir jetzt das Trägheitsmoment eines Cylinders von der Dichtigkeit μ, der Länge L und dem Radius R in Bezug auf eine Achse, die auf der Cylinderachse senkrecht steht und durch ihren Mittelpunkt geht. Es ist dasselbe dem in 2) gegebenen Ausdrucke zufolge

$$= 2\pi\mu \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \int_0^R dx\,r\,dr \left(x^2 + \frac{r^2}{2}\right)$$

d. h.

$$= \frac{\pi\mu L R^2}{12}\,(L^2 + 3R^2),$$

oder, wenn man wieder die Masse m nennt, d. h.

$$m = \pi\mu L R^2$$

setzt,

$$= m\left(\frac{L^2}{12} + \frac{R^2}{4}\right).$$

Ist der Cylinder ein dünner, langer Draht, so kann man hierfür ohne merklichen Fehler schreiben

$$\frac{m L^2}{12}\,.$$

Hiernach sind wir im Stande, die Länge l des einfachen Pendels

zu berechnen, welches einem Pendel correspondirt, das aus einer Kugel und einem Drahte besteht. Es seien m_1 und m_2 die Massen von Kugel und Draht, s_1 und s_2 die Entfernungen ihrer Schwerpunkte vom Aufhängungspunkte, R_1 der Radius der Kugel, L_2 die Länge des Drahtes, so dass

$$s_1 = R_1 + L_2, \quad s_2 = \frac{L_2}{2}.$$

Ist dann wieder m die Masse des ganzen Pendels und s der Abstand seines Schwerpunktes vom Aufhängungspunkte, so ist nach den im § 3 der vierten Vorlesung angeführten Sätzen über den Schwerpunkt eines Systemes von Massen

$$m s = m_1 s_1 + m_2 s_2.$$

Ferner ist das Trägheitsmoment in Bezug auf die Drehungsachse des Pendels für die Kugel

$$m_1 (s_1^2 + \tfrac{2}{5} R_1^2)$$

und für den Draht

$$m_2 \frac{L_2^2}{3}.$$

Daher ist nach 1)

$$l = \frac{s_1^2 + \frac{2}{5} R_1^2 + \frac{m_2}{m_1} \frac{L_2^2}{3}}{s_1 + \frac{m_2}{m_1} \frac{L_2}{2}}.$$

Hat man R_1 und L_2 gemessen und das Verhältniss $\frac{m_2}{m_1}$ durch die Waage bestimmt, so kann man hiernach l berechnen.

§ 2.

In ähnlicher Weise kann man verfahren, wenn an dem Pendel mehr als zwei Theile zu unterscheiden sind; immer aber muss man, um aus den an diesen vorgenommenen Abmessungen l zu berechnen, die Voraussetzung machen, dass jeder einzelne Theil homogen ist. Eine Methode zur Messung der Schwere, die von einer solchen misslichen Voraussetzung frei ist, beruht auf der Anwendung eines sogenannten *Reversionspendels.* Ein solches besteht aus einer festen Stange, die zwei parallele, auf ihrer Längsrichtung senkrechte Schneiden trägt, welche ihre Schärfen gegen einander kehren; an der Stange ist ein Gewicht oder sind mehrere Gewichte befestigt. Jede Schneide kann als Drehungsachse des Pendels dienen. Im Allgemeinen wird die Länge des correspondirenden einfachen Pendels eine andere sein, je nachdem das Reversionspendel auf der einen oder auf der anderen Schneide schwingt; durch passende Stellung des Gewichtes oder der Gewichte kann man es aber erreichen, dass für beide Schneiden bei gleicher Amplitude die Schwingungsdauer dieselbe, d. h. dass für

beide Schneiden die Länge l des correspondirenden einfachen Pendels dieselbe ist. In diesem Falle hat man nach 1)

$$l = \frac{m s_1^2 + k}{m s_1}$$

$$l = \frac{m s_2^2 + k}{m s_2},$$

wo m die Masse des Pendels, k sein Trägheitsmoment in Bezug auf eine Achse, die durch den Schwerpunkt parallel den beiden Schneiden gelegt ist, und s_1, s_2 die Entfernungen des Schwerpunkts von den beiden Schneiden bedeuten. Aus diesen Gleichungen folgt

$$l(s_1 - s_2) = s_1^2 - s_2^2,$$

oder unter der Voraussetzung, dass nicht $s_1 = s_2$ ist,

$$l = s_1 + s_2.$$

Ist nun noch *die* Bedingung erfüllt, dass der Schwerpunkt in der Ebene der beiden Schneiden liegt, so ist $s_1 + s_2$ der Abstand der beiden Schneiden von einander, und durch Messung dieses Abstandes lernt man die Länge des correspondirenden einfachen Pendels kennen, ohne Weiteres über die Vertheilung der Masse ermittelt zu haben.

§ 3.

Einen andern Weg hat Bessel bei seinen berühmten „Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels"*) eingeschlagen, um sich von der Voraussetzung der Homogenität der Theile des Pendels unabhängig zu machen und zugleich eine andere Fehlerquelle zu eliminiren, die in Folgendem besteht. Die Drehungsachse des Pendels wird gewöhnlich durch eine Schneide gebildet, die auf einer horizontalen Unterlage ruht. Die Schärfe der Schneide ist aber nicht eine mathematische Linie, sondern ein schmaler Theil einer Cylinderfläche von sehr starker Krümmung; das bewirkt, dass die Drehungsachse des Pendels nicht genau in der Ebene liegt, welche die Schneide trägt, und nicht genau angebbar ist. Eine ähnliche Unsicherheit bleibt bei jeder andern Aufhängungsart des Pendels. Bessel benutzte zwei Pendel, die aus derselben Kugel, derselben Schneide und zwei Drähten gebildet waren, deren Längenunterschied mit der äussersten erreichbaren Genauigkeit gemessen wurde. Hieraus und aus den Schwingungsdauern der beiden Pendel liessen sich die Längen der einem jeden von ihnen correspondirenden einfachen Pendel berechnen ohne die Annahme, dass die Kugel homogen und die Schärfe der Schneide eine mathematische Linie wäre.

---

*) Abhandlungen der Berliner Akademie für das Jahr 1826.

§ 4.

Nicht ausser Acht zu lassen ist bei Pendelversuchen der Einfluss, den die Luft auf die Bewegung des Pendels ausübt. Diesen vollständig anzugeben, ist eine Aufgabe der Hydrodynamik, denn er lässt sich nicht ermitteln, ohne dass man die Bewegung bestimmt, in welche die Luft durch das Pendel versetzt wird. Es sollen hier nur historisch einige Angaben über ihn gemacht werden.

Wenn ein Körper in der Luft ruht, so übt diese auf seine Oberfläche Druckkräfte aus, deren Resultante vertikal aufwärts gerichtet, gleich dem Gewichte der verdrängten Luft ist und ihren Angriffspunkt in dem Schwerpunkte der verdrängten Luft hat. Dürfte man annehmen, dass bei dem schwingenden Pendel die von der Luft herrührenden Druckkräfte eben so gross sind, als wenn das Pendel ruht, so würde hiernach der Einfluss der Luft auf die Schwingungsdauer sich leicht angeben lassen. Bezeichnen wir durch m' die Masse der verdrängten Luft, durch s' die Entfernung ihres Schwerpunkts von der Drehungsachse des Pendels und nehmen der Einfachheit wegen an, dass dieser Schwerpunkt in *einer* Ebene mit dem Schwerpunkt des Pendels und seiner Drehungsachse liegt, so wäre dann das Drehungsmoment, welches auf das Pendel wirkt,

$$-(ms - m's')\, g \sin \vartheta,$$

also die Differentialgleichung seiner Bewegung

$$K \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -(ms - m's')\, g \sin \vartheta,$$

und die Länge l des correspondirenden einfachen Pendels

$$= \frac{K}{ms - m's'}.$$

Diese Gleichung stellt aber nicht erschöpfend den Einfluss der Luft auf die Schwingungsdauer des Pendels dar. Man pflegt zu sagen, dass das Pendel eine Luftmenge mit sich hin- und herführt, und dass dadurch das Trägheitsmoment des Pendels vergrössert wird. Wie dem auch sei, jedenfalls kann man setzen

$$l = \frac{K + m's'^2\lambda}{ms - m's'}, \tag{3}$$

wo λ eine unbekannte Zahl bedeutet, die abhängig ist von der Gestalt des Pendels und seiner Schwingungsdauer, sowie von der Beschaffenheit der Luft, *nicht* aber von der Masse des Pendels und ihrer Vertheilung. Bessel bestimmte λ experimentell, indem er zwei Pendel von gleicher Gestalt, nahe gleicher Schwingungsdauer, aber verschiedener Masse benutzte.

Bei einem Reversionspendel hebt sich der Einfluss der Luft auf

die Schwingungsdauer fort, falls die Gestalt des Pendels symmetrisch in Bezug auf die beiden Schneiden ist. Diese Bedingung kann erfüllt werden, obwohl die Vertheilung der Masse nicht symmetrisch in Bezug auf die beiden Schneiden sein darf, weil sonst $s_1 = s_2$ sein würde, welchen Fall wir ausschliessen mussten. Man erreicht den genannten Zweck z. B. durch zwei gleichgestaltete Linsen, die symmetrisch an der Pendelstange angebracht sind, von denen die eine hohl, die andere voll ist. Bei der früher gebrauchten Bezeichnung ist dann, wenn die Gleichheit der Schwingungsdauer für beide Schneiden hergestellt ist, nach 3)

$$l = \frac{k + ms_1^2 + m's'^2\lambda}{ms_1 - m's'}$$

und

$$l = \frac{k + ms_2^2 + m's'^2\lambda}{ms_2 - m's'}, \tag{4}$$

woraus folgt

$$l = s_1 + s_2,$$

gerade so, als ob die Luft gar keinen Einfluss ausübte. Die Voraussetzung der Symmetrie der Gestalt des Pendels, die wir gemacht haben, ist bei diesem Schlusse wesentlich; fände sie nicht statt, so hätten nämlich s' und λ in den beiden Gleichungen 4) verschiedene Werthe.

§ 5.

Pendelversuche, die an verschiedenen Orten ausgeführt sind, haben gezeigt, dass die Schwere nicht überall auf und in der Nähe der Erdoberfläche denselben Werth hat. Steigt man aufwärts, so nimmt die Schwere ab. Von dieser Aenderung derselben kann man sich Rechenschaft geben, wenn man von der Newton'schen Lehre ausgeht, dass die Schwere eine Folge der Gravitation ist.

Zwei Massen m und m_1, die in der Entfernung r_1 von einander sich befinden, üben nach dem Gesetze der Gravitation Kräfte auf einander aus, deren Potential bei passend gewählter Masseneinheit

$$= \frac{mm_1}{r_1}$$

ist. Wirken viele Massen m_1 gravitirend auf die Masse m, so hat die auf diese ausgeübte Kraft das Potential

$$m \sum \frac{m_1}{r_1}.$$

Wir wollen dieses Potential für den Fall berechnen, dass die Massen m_1 die Theile der Erde sind, unter der Voraussetzung, dass die Erde eine Kugel und ihre Dichtigkeit in gleichem Abstande vom Mittelpunkt dieselbe ist. Wir denken uns eine Masse, die mit der constanten Dichtigkeit μ den Zwischenraum zwischen zwei concen-

trischen Kugelflächen erfüllt, deren Radien R und $R + dR$ sind. Das Potential dieser Masse in Bezug auf die Masseneinheit, die im Abstande r von dem Mittelpunkte der Kugelflächen sich befindet, d. h. das Potential der Kräfte, welche jene Masse auf diese Masseneinheit ausübt, ist

$$= \mu R^2 dR \int\int \frac{\sin\vartheta \, d\vartheta \, dw}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\vartheta}}, \tag{5}$$

wo die Wurzelgrösse positiv zu nehmen und die Integration in Bezug auf w von 0 bis 2π, in Bezug auf ϑ von 0 bis π auszudehnen ist. Die erste Integration ist unmittelbar ausführbar und die zweite wird es, wenn man an Stelle von ϑ einführt

$$\varrho = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\vartheta}.$$

Da dann

$$\varrho \, d\varrho = Rr \sin\vartheta \, d\vartheta$$

ist, so wird der Ausdruck 5), wenn man ϱ'' den grössten, ϱ' den kleinsten Werth von ϱ nennt,

$$= \mu \frac{2\pi R dR}{r} (\varrho'' - \varrho').$$

Es ist aber

$$\varrho'' = R + r$$

und ϱ' ist gleich der positiven von den beiden Grössen $R - r$ und $r - R$; d. h. es ist $\varrho' = r - R$, wenn der Punkt, auf den das Potential sich bezieht, ausserhalb der Kugelschale liegt, und $\varrho' = R - r$, wenn er in ihrem Innern sich befindet. In jenem Falle ist daher der Ausdruck 5)

$$= \mu \frac{4\pi R^2 dR}{r},$$

in diesem

$$= \mu 4\pi R \, dR.$$

Hierdurch ist bewiesen, dass das in Rede stehende Potential in Bezug auf jeden inneren Punkt constant, in Bezug auf jeden äusseren so gross ist, als ob die Masse der Kugelschale in ihrem Mittelpunkte concentrirt wäre.

Bei den über die Erde gemachten Voraussetzungen ist daher ihr Potential in Bezug auf einen Körper, der ausserhalb ihrer sich befindet, so gross, als ob ihre ganze Masse in ihrem Mittelpunkte concentrirt wäre, und die Anziehung, die der Körper von der Erde erfährt, ist dem Quadrate seiner Entfernung vom Erdmittelpunkte umgekehrt proportional. Es stimmt hiermit das Resultat überein, welches die Pendelversuche in Betreff der Abnahme der Schwere bei wachsender Höhe ergeben haben.

Den Pendelversuchen zufolge ändert sich die Schwere aber auch in der Erdoberfläche oder, was dasselbe ist, im Meeresniveau. Sehr

näherungsweise, wenn auch nicht genau, ist sie hier von der geographischen Länge des Beobachtungsortes unabhängig, aber bedingt durch die geographische Breite. Bezeichnet man diese durch ψ und nimmt als Einheit der Zeit eine mittlere Sekunde, so hat man nach den Pendelversuchen mit grosser Genauigkeit

$$g = 9^m{,}8309\left(1 - \frac{\cos^2\psi}{191}\right). \tag{6}$$

Dass die Schwere mit der geographischen Breite des Beobachtungsortes sich ändert, ist als eine Folge der Drehung der Erde anzusehen, wie in der folgenden Vorlesung gezeigt werden soll.

Neunte Vorlesung.

(Einfluss der Drehung der Erde auf die Bewegung der Körper an ihrer Oberfläche. Centrifugalkraft. Abweichung frei fallender Körper von der Lothlinie. Foucault'scher Pendelversuch.)

§ 1.

Bei der Untersuchung der Bewegung schwerer Körper haben wir ein Coordinatensystem benutzt, welches in der Erde fest ist, und gleichwohl *die* Differentialgleichungen der Bewegung angewandt, welche ein im Raume festes Coordinatensystem voraussetzen. Da die Erde sich bewegt, so liegt hierin eine Ungenauigkeit, die zu heben wir nun suchen wollen. Zu diesem Zwecke müssen wir zusehen, welche Veränderungen an den Differentialgleichungen der Bewegung anzubringen sind, wenn sie für ein bewegtes Coordinatensystem gelten sollen statt für ein ruhendes. In einem besondern Falle haben wir diese Aufgabe bereits im § 4 der vierten Vorlesung gelöst, in dem Falle nämlich, dass die Achsen des Coordinatensystemes bei ihrer Bewegung dieselben Richtungen behalten; und wir haben dort nachgewiesen, dass, wenn überdies das Coordinatensystem mit gleichbleibender Geschwindigkeit in derselben Richtung fortschreitet, dieselben Differentialgleichungen gelten, wie wenn das Coordinatensystem ruht. Der Mittelpunkt der Erde bewegt sich in seiner Bahn um die Sonne so nahe mit gleichbleibender Geschwindigkeit in ungeänderter Richtung, dass man für die Bewegungen auf der Erde ohne merklichen Fehler die Differentialgleichungen, die für ein ruhendes Coordinatensystem gelten, auch anwenden darf in Bezug auf ein Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt der Erde ist, und dessen Achsen im Raume feste Richtungen haben. Anders aber, als mit der fortschreitenden Bewegung der Erde verhält es sich mit der Drehung um ihre Achse, die einen bemerkbaren Einfluss auf die Bewegungen der Körper, relativ zur Erde, ausübt. Um diesen zu finden, denken wir uns ein System von materiellen Punkten, auf welche beliebige Kräfte wirken, und welche beliebigen Bedingungsgleichungen unterworfen sind; und beziehen die Lagen, welche diese Punkte zur Zeit t haben, gleichzeitig auf zwei Coordinatensysteme, von denen das eine im Raume ruht, das andere sich bewegt. Es sei m die Masse eines der Punkte, x, y, z seien seine Coordinaten, X, Y, Z die Componenten der auf ihn wirkenden Kraft zur Zeit t

in Bezug auf das ruhende Coordinatensystem; x', y', z', X', Y', Z' bezeichnen dieselben Grössen in Bezug auf das bewegte; endlich seien δx, δy, δz virtuelle Variationen von x, y, z, und $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ die entsprechenden Variationen von x', y', z'. Nach dem d'Alembertschen Principe ist dann

$$0 = \sum \left(m \frac{d^2 x}{dt^2} - X\right) \delta x + \left(m \frac{d^2 y}{dt^2} - Y\right) \delta y + \left(m \frac{d^2 z}{dt^2} - Z\right) \delta z. \quad 1)$$

In diese Gleichung führen wir die gestrichenen Buchstaben an Stelle der ungestrichenen ein. Dabei benutzen wir, dass

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = X'\delta x' + Y'\delta y' + Z'\delta z'$$

ist, da diese beiden Ausdrücke die Arbeit derselben Kraft für dieselbe Verrückung ihres Angriffspunktes darstellen; im Uebrigen führen wir die Rechnung nur unter der Voraussetzung, dass das bewegte Coordinatensystem sich mit constanter Winkelgeschwindigkeit um die z-Achse dreht. Wir nehmen die beiden Coordinatensysteme als congruent an, lassen ihre Anfangspunkte mit einander, die z'-Achse mit der z-Achse zusammenfallen und setzen

$$\begin{aligned} x &= x' \cos wt - y' \sin wt \\ y &= x' \sin wt + y' \cos wt \\ z &= z'; \end{aligned} \quad 2)$$

dann ist w die Winkelgeschwindigkeit, mit der das bewegte System in dem Sinne sich dreht, in dem die x-Achse um einen rechten Winkel gedreht werden müsste, um in die y-Achse zu fallen. Aus den Gleichungen 2) folgt:

$$\begin{aligned} \delta x &= \delta x' \cos wt - \delta y' \sin wt \\ \delta y &= \delta x' \sin wt + \delta y' \cos wt \\ \delta z &= \delta z', \end{aligned} \quad 3)$$

ferner

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx'}{dt} \cos wt - \frac{dy'}{dt} \sin wt - wx' \sin wt - wy' \cos wt \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dx'}{dt} \sin wt + \frac{dy'}{dt} \cos wt + wx' \cos wt - wy' \sin wt \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{dz'}{dt} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{d^2 x'}{dt^2} \cos wt - \frac{d^2 y'}{dt^2} \sin wt \\ &\quad - 2w \frac{dx'}{dt} \sin wt - 2w \frac{dy'}{dt} \cos wt - w^2 x' \cos wt + w^2 y' \sin wt \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{d^2 x'}{dt^2} \sin wt + \frac{d^2 y'}{dt^2} \cos wt \\ &\quad + 2w \frac{dx'}{dt} \cos wt - 2w \frac{dy'}{dt} \sin wt - w^2 x' \sin wt - w^2 y' \cos wt \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{d^2 z'}{dt^2}. \end{aligned}$$

Hiernach wird die Gleichung 1)

$$
\begin{aligned}
0 = \sum \Big(m \frac{d^2x'}{dt^2} - X' - m w^2 x' - m 2w \frac{dy'}{dt}\Big) \delta x' \\
+ \Big(m \frac{d^2y'}{dt^2} - Y' - m w^2 y' + m 2w \frac{dx'}{dt}\Big) \delta y' \\
+ \Big(m \frac{d^2z'}{dt^2} - Z'\Big) \delta z'.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Diese Gleichung ist von derselben Form, wie die Gleichung 1); es folgt aus ihr, dass man von der Drehung des Coordinatensystemes der x', y', z' absehen kann, falls man zu den Kräften (X', Y', Z'), die auf die materiellen Punkte wirken, noch gewisse hinzufügt; diejenige von diesen Kräften, die sich auf den Punkt bezieht, dessen Masse m genannt ist, hat zu Componenten

$$
m\Big(w^2x' + 2w\frac{dy'}{dt}\Big), \quad m\Big(w^2y' - 2w\frac{dx'}{dt}\Big), \quad 0. \tag{5}
$$

Ist das System der materiellen Punkte in relativer Ruhe gegen die Achsen der x', y', z', so ist $\frac{dx'}{dt} = 0$, $\frac{dy'}{dt} = 0$; die Ausdrücke 5) werden dann also

$$
m w^2 x', \quad m w^2 y', \quad 0.
$$

Die Kraft, deren Componenten diese sind, ist senkrecht zur Drehungsachse, der z'-Achse, von dieser fort gerichtet und hat die Grösse

$$
m w^2 \sqrt{x'^2 + y'^2}\,.
$$

Man nennt diese Kraft die *Centrifugalkraft.* Bei einem Systeme von materiellen Punkten, welche ohne Aenderung ihrer relativen Lage mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit um eine Achse rotiren, kann man, um die Beziehungen zwischen den Kräften zu beurtheilen, die auf sie wirken, von der Rotation absehen, falls man zu diesen Kräften die Centrifugalkräfte hinzufügt, die der Rotation entsprechen.

Dieser Satz lässt noch eine Verallgemeinerung zu, die wir ableiten wollen. Wir nehmen an, dass die Bedingungsgleichungen zwischen den Coordinaten x', y', z' die Zeit nicht enthalten; die Veränderungen dx', dy', dz', die x', y', z' in dem Zeitelement dt erleiden, sind dann virtuelle Variationen von x', y', z' und können in die Gleichung 4) für $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ gesetzt werden. Geschieht das, so erhält man

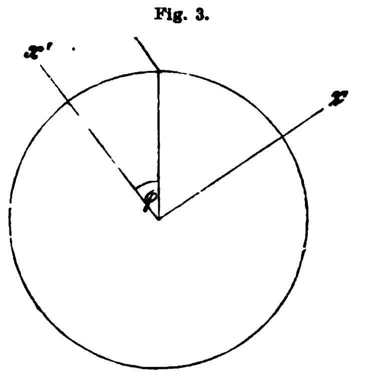
$$
\begin{aligned}
0 = \sum \Big(m \frac{d^2x'}{dt^2} - X' - m w^2 x'\Big) dx' \\
+ \Big(m \frac{d^2y'}{dt^2} - Y' - m w^2 y'\Big) dy' \\
+ \Big(m \frac{d^2z'}{dt^2} - Z'\Big) dz'.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Diese Gleichung stimmt überein mit einer, zu der man kommt, wenn man die Rotation des Coordinatensystems vernachlässigt und dafür nur die ihr entsprechenden Centrifugalkräfte einführt. Ist nun ferner die Zahl der Bedingungsgleichungen zwischen den Coordinaten x', y', z' so gross, dass die augenblickliche Lage des Systemes durch *eine* Variable bestimmt wird, so kann man aus 6) diese eine Variable, also die Bewegung des Systemes berechnen. Daraus folgt, dass auch unter den jetzt gemachten Voraussetzungen die Einführung der Centrifugalkräfte vollständig die Berücksichtigung der Rotation des Coordinatensystems ersetzt.

Dieses Resultat ist von Wichtigkeit in Bezug auf die Bewegungen der Körper auf der Erde; es zeigt, dass man bei ihnen von der Rotation der Erde absehen darf, wenn man zu den auf die Körper wirkenden Kräften die dieser Rotation entsprechenden Centrifugalkräfte hinzufügt, vorausgesetzt, dass die Lage des Systemes durch *eine* Variable bestimmt ist, und dass die Bedingungsgleichungen zwischen den Coordinaten in Bezug auf ein in der Erde festes Coordinatensystem die Zeit nicht enthalten. Die *Schwere* ist die Resultante aus der Anziehung, die die Masseneinheit von der Erde nach dem Gesetze der Gravitation erfährt, und der aus der Rotation der Erde entspringenden Centrifugalkraft; diese Resultante ist es, welche durch die in der vorigen Vorlesung besprochenen Pendelversuche gemessen wird.

Sehen wir nun zu, wie hiernach die Schwere der Grösse und Richtung nach auf der Erdoberfläche sich ändern müsste, wenn die Erde eine Kugel und ihre Dichtigkeit in gleichem Abstande vom Mittelpunkte die gleiche wäre. Den Abstand des betrachteten Körpers vom Erdmittelpunkte, also den Erdradius, nennen wir R, die nach dem Erdmittelpunkte gerichtete, auf die Masseneinheit bezogene Anziehung der Erde G, den Winkel, den der nach dem Körper gezogene Radius der Erde mit der Aequatorialebene dieser bildet, φ, und w die Winkelgeschwindigkeit der Erde. Die z'-Achse legen wir in die Rotationsachse der Erde, die x'-Achse in den Schnitt ihrer Aequatorialebene mit dem Meridian des Körpers. Die Componenten der Schwere g nach den Coordinatenachsen sind dann

Fig. 3.



$$-(G - w^2 R)\cos\varphi, \quad 0, \quad -G\sin\varphi.$$

Daraus folgt

$$g = G\sqrt{1 - 2\,\frac{w^2 R}{G}\cos^2\varphi + \left(\frac{w^2 R}{G}\right)^2\cos^2\varphi}\,, \qquad 7)$$

und, wenn man ψ die geographische Breite des Beobachtungsortes nennt, d. h. den Winkel zwischen dem Aequator und der Vertikalen, also der Richtung der Schwere,

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\varphi \, \frac{1}{1 - \frac{w^2 R}{G}} . \tag{8}$$

Bei den Voraussetzungen, die wir über Gestalt und Beschaffenheit der Erde gemacht haben, ist G gleich dem Werthe, den g unter dem Pole hat; es ist also nach der Gleichung 6) der vorigen Vorlesung, wenn die Zeiteinheit eine Sekunde ist,

$$G = 9^{\mathrm{m}},8309.$$

Ferner ist näherungsweise

$$R = \frac{1}{2\pi} \, 40\,000\,000^{\mathrm{m}}$$

und

$$w = \frac{2\pi}{24 \, . \, 60 \, . \, 60} ;$$

daraus folgt

$$\frac{w^2 R}{G} = \frac{1}{291} .$$

Dieser Bruch ist so klein, dass bei unseren Betrachtungen sein Quadrat gegen die Einheit vernachlässigt werden kann. Geschieht das, so geben die Gleichungen 7) und 8)

$$g = G\left(1 - \frac{w^2 R}{G} \cos^2 \varphi\right)$$

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\varphi \left(1 + \frac{w^2 R}{G}\right) .$$

Auch $\psi - \varphi$ ist hiernach sehr klein, so dass man

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\varphi + \frac{\psi - \varphi}{\cos^2\varphi}$$

setzen darf, woraus dann folgt

$$\psi - \varphi = \tfrac{1}{2} \sin 2\varphi \, \frac{w^2 R}{G} .$$

Mit derselben Genauigkeit ist

$$g = G\left(1 - \frac{w^2 R}{G} \cos^2 \psi\right)$$

$$\psi - \varphi = \tfrac{1}{2} \sin 2\psi \, \frac{w^2 R}{G} .$$

Die erste von diesen beiden Gleichungen ist von derselben Form, wie die aus den Pendelversuchen abgeleitete Gleichung 6) der vorigen Vorlesung; aber die Zahlencoefficienten von $\cos^2 \psi$ sind in beiden wesentlich verschieden. Der Grund hiervon liegt darin, dass die Erde nicht, wie wir angenommen haben, eine Kugel ist; in Folge ihrer Drehung ist sie sehr näherungsweise ein abgeplattetes Rotations-

ellipsoid, und daher ist ihre Anziehung um so grösser, je grösser die geographische Breite des Beobachtungsortes ist. Hierauf soll aber an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden.

§ 2.

Auf die relative Bewegung der Körper gegen die Erde übt die Drehung dieser im Allgemeinen noch einen andern Einfluss aus, als den durch die Centrifugalkraft dargestellten. Es soll dieser jetzt für einen freien, schweren, materiellen Punkt untersucht werden.

Es seien x', y', z' die Coordinaten des Punktes zur Zeit t in Bezug auf ein in der Erde festes Coordinatensystem, dessen z'-Achse die Erdachse ist. Bezeichnen wir durch X', Y', Z' die Componenten nach den Coordinatenachsen der Schwere, d. h. der Resultante aus der Anziehung der Erde und der Centrifugalkraft, so ist dann

$$\begin{aligned} \frac{d^2x'}{dt^2} &= X' + 2w\frac{dy'}{dt} \\ \frac{d^2y'}{dt^2} &= Y' - 2w\frac{dx'}{dt} \\ \frac{d^2z'}{dt^2} &= Z'. \end{aligned} \tag{9}$$

Da in diesen Gleichungen die Coordinaten selbst nicht vorkommen, sondern nur ihre Differentialquotienten, so hört ihre Gültigkeit nicht auf, wenn man die Coordinatenachsen ohne Aenderung ihrer Richtung verschiebt; wir können also den Anfangspunkt in den Ort legen, den der Punkt zur Zeit $t = 0$ einnimmt; die z'-Achse muss dann parallel der Erdachse sein. Die Componenten der Schwere sind, strenge genommen, nicht constant; wir wollen sie aber als constant ansehen, d. h. voraussetzen, dass die Bahn, die der Punkt beschreibt, unendlich klein gegen die Dimensionen der Erde ist. Wir bezeichnen die Schwere durch g, die geographische Breite des Beobachtungsortes, zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ genommen, durch ψ, und legen die y'-Achse senkrecht zum Meridian, nach Osten gerichtet. Gehen die positiven Richtungen der x' und der z' von der Erde fort, so ist dann

$$X' = -g\cos\psi, \quad Y' = 0, \quad Z' = -g\sin\psi \tag{10}$$

und w ist positiv.

Nun soll statt des Coordinatensystemes der x', y', z' ein neues, ihm congruentes, das der x, y, z, eingeführt werden, so dass die y-Achse mit der y'-Achse zusammenfällt, die z-Achse die Richtung der Schwere hat und die Anfangspunkte zusammenfallen. Man hat dann

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = g$$

und

$$\begin{aligned} x &= -x'\sin\psi + z'\cos\psi \\ y &= y' \\ z &= -x'\cos\psi - z'\sin\psi. \end{aligned}$$

Differentiirt man diese Gleichungen zweimal nach t, so erhält man durch Benutzung von 9) und 10), sowie der Gleichungen

$$x' = -x \sin\psi - z \cos\psi, \quad y' = y$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2w \sin\psi \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2w\left(\sin\psi \frac{dx}{dt} + \cos\psi \frac{dz}{dt}\right) \qquad 11)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g - 2w \cos\psi \frac{dy}{dt}\,.$$

Es können diese Gleichungen ohne weitere Voraussetzungen nach einer bekannten Methode integrirt werden; wir wollen indessen ihre Integrale vereinfachen durch die Annahme, dass Glieder von der Ordnung von $w^2 y$ vernachlässigt werden können. Die Anfangswerthe von $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ nennen wir α, β, γ; wir erhalten dann aus 11) zunächst

$$\frac{dx}{dt} = \alpha - 2w \sin\psi \cdot y$$

$$\frac{dz}{dt} = \gamma + gt - 2w \cos\psi \cdot y,$$

und bei Benutzung hiervon, nach der genannten Annahme,

$$\frac{dy}{dt} = \beta + 2w\,(\alpha \sin\psi + \gamma \cos\psi)\,t + w \cos\psi \cdot g t^2.$$

Dieselbe Annahme führt dann weiter zu den Gleichungen

$$x = \alpha t - w\beta \sin\psi \cdot t^2$$

$$y = \beta t + w\,(\alpha \sin\psi + \gamma \cos\psi)\,t^2 + w \cos\psi \cdot \frac{g t^3}{3}$$

$$z = \gamma t + \left(\frac{g}{2} - w\beta \cos\psi\right) t^2.$$

Ist die Anfangsgeschwindigkeit $= 0$, d. h. sind $\alpha, \beta, \gamma = 0$, so werden dieselben

$$x = 0$$

$$y = w \cos\psi \cdot \frac{g t^3}{3}$$

$$z = \frac{g t^2}{2},$$

woraus folgt

$$y = \frac{w \cos\psi}{3} \sqrt{\frac{8 z^3}{g}}\,. \qquad 12)$$

Ein frei fallender Körper weicht hiernach in Folge der Drehung der Erde von der Lothlinie in einer zum Meridian senkrechten Richtung, und zwar nach Osten hin, ab. Es sind hierüber von Reich in Freiberg Versuche angestellt; bei diesen war

$$\psi = 50^0\,57', \quad g = 9^{\text{m}},811, \quad z = 158^{\text{m}},5.$$

Die Gleichung 12) ergiebt hieraus $y = 27^{\text{mm}},5$; Reich fand $y = 28^{\text{mm}},4$.

§ 3.

Untersuchen wir nun noch die Bewegung eines einfachen Pendels, das um seinen Aufhängepunkt sich frei drehen kann, mit Rücksicht auf die Drehung der Erde.

Wir benutzen ein Coordinatensystem wie das, auf welches die Gleichungen 11) sich beziehen, dessen z-Achse vertikal abwärts gekehrt ist. Der Anfangspunkt sei die Gleichgewichtslage des schweren Punktes des Pendels, l die Länge dieses. Es findet dann die Bedingungsgleichung

$$x^2 + y^2 + (l + z)^2 = l^2$$

statt, und die Differentialgleichungen der Bewegung sind

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -2w \sin\psi \frac{dy}{dt} + \lambda x \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= 2w\left(\sin\psi \frac{dx}{dt} + \cos\psi \frac{dz}{dt}\right) + \lambda y \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= g - 2w\cos\psi \frac{dy}{dt} + \lambda(z + l). \end{aligned} \qquad 13)$$

Ein Integral derselben findet man, wenn man sie mit dx, dy, dz multiplicirt, addirt und integrirt; so ergiebt sich

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (2gz + H)\, dt^2, \qquad 14)$$

wo H eine willkürliche Constante bedeutet. Um zu einem zweiten Integral zu gelangen, bilde man aus 13)

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 2w\sin\psi\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) + 2w\cos\psi \cdot x\frac{dz}{dt}. \qquad 15)$$

Diese Gleichung ist im Allgemeinen nicht integrabel; sie wird es aber, wenn wir die Voraussetzung einführen, dass die Schwingungen des Pendels unendlich klein sind, was wir thun wollen. Es seien x und y gegen l unendlich klein von der ersten Ordnung; es ist dann z von der zweiten Ordnung; es ist nämlich

$$z = -\frac{x^2 + y^2}{2l}.$$

Das letzte Glied in der Gleichung 15) ist daher von der dritten Ordnung, während die andern von der zweiten sind. Bei Vernachlässigung jenes erhält man

$$x\,dy - y\,dx = \left(c + w\sin\psi\,(x^2 + y^2)\right) dt, \qquad 16)$$

wo c eine neue willkürliche Constante bedeutet. Die Gleichung 14) wird dabei

$$dx^2 + dy^2 = \left(\frac{g}{l}(x^2 + y^2) + H\right) dt^2. \qquad 17)$$

In 16) und 17) setze man

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta,$$

wo dann r und θ Polarcoordinaten des schweren Punktes bedeuten; dadurch erhält man

$$r^2 d\theta = (c + r^2 w \sin\psi)\, dt$$

$$dr^2 + r^2 d\theta^2 = \left(\frac{g}{l} r^2 + H\right) dt^2.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen wird, wenn wir

$$\theta - tw\sin\psi = \vartheta \tag{18}$$

machen,

$$r^2 d\vartheta = c\,dt, \tag{19}$$

die zweite bei Benutzung hiervon

$$dr^2 + r^2 d\vartheta^2 = \left(\left(\frac{g}{l} - w^2\sin^2\psi\right) r^2 + H - c2w\sin\psi\right) dt^2. \tag{20}$$

An Stelle von H führen wir nun eine andere willkürliche Constante h durch die Gleichung

$$H - c2w\sin\psi = h$$

ein und benutzen, dass w so klein ist, dass sein Quadrat vernachlässigt werden kann; die Gleichung 20) wird dann

$$dr^2 + r^2 d\vartheta^2 = \left(\frac{g}{l} r^2 + h\right) dt^2. \tag{21}$$

Die Gleichungen 19) und 21) können leicht vollständig integrirt werden; sie stimmen überein mit Gleichungen, auf die man kommt, wenn man die Drehung der Erde vernachlässigt, wie daraus hervorgeht, dass sie w nicht enthalten, also ungeändert bleiben, wenn man $w = 0$ setzt. Setzt man $w = 0$, so wird $\vartheta = \theta$, und r und ϑ sind die Polarcoordinaten des Pendelkörpers. Berücksichtigt man die Drehung der Erde, so sind r und θ diese Polarcoordinaten und zwischen θ und ϑ besteht die Relation 18). Daraus geht hervor, dass die relative Bewegung des Pendels zu der sich drehenden Erde dieselbe ist, als ob die absolute Bewegung des Pendels diejenige wäre, die es auf der ruhenden Erde haben würde, die Erde aber mit der Winkelgeschwindigkeit $w\sin\psi$ um die vertikale, durch den Aufhängungspunkt gehende Linie ostwärts sich drehte.

Es ist dieses Resultat durch Versuche, die zuerst von Foucault angestellt sind, bestätigt.

Zehnte Vorlesung.

(Relative Verschiebungen der Theile eines Körpers. Dilatation einer Linie, einer Fläche, eines Raumtheiles. Die Veränderung eines unendlich kleinen Theiles eines Körpers ist zusammengesetzt aus einer Verschiebung, einer Drehung und einer Ausdehnung nach drei auf einander senkrechten Richtungen. Hauptdilatationen. Bewegungen an der Oberfläche eines Körpers und an der Berührungsfläche zweier Körper.)

§ 1.

Unsere bisherigen Betrachtungen haben sich auf materielle Punkte und starre Körper bezogen. Die letzteren dachten wir uns als Systeme von unveränderlich mit einander verbundenen materiellen Punkten; die Frage, ob diese sich stetig an einander schliessen, brauchten wir nicht zu erwägen, und dass ihre Zahl unendlich gross ist, nicht zu beachten. Wir wenden uns jetzt zur Untersuchung der Bewegung von Körpern, welche *nicht* starr sind, deren Theile relative Verschiebungen erleiden; strenge genommen, findet das bei *allen* Körpern der Natur statt. Den Ausgangspunkt dieser Untersuchung soll die Annahme bilden, dass die Körper *stetig* ausgedehnte Materie sind, und dass die Bewegung in ihnen sich *stetig* mit dem Orte ändert. Die Bedeutung dieser Annahme wird klarer hervortreten in den Gleichungen, in die wir dieselbe übersetzen wollen. Es seien a, b, c die Coordinaten eines materiellen Punktes eines Körpers zur Zeit t_0, und x, y, z die Coordinaten desselben Punktes zur Zeit t; x, y, z sind dann Functionen der 4, stetig veränderlichen, Argumente a, b, c, t, und zwar stetige Functionen; ein materieller Punkt des Körpers, dessen Coordinaten zur Zeit t_0

$$a + da,\quad b + db,\quad c + dc$$

sind, hat zur Zeit t die Coordinaten

$$x + dx,\quad y + dy,\quad z + dz,$$

wo

$$dx = \frac{\partial x}{\partial a}\, da + \frac{\partial x}{\partial b}\, db + \frac{\partial x}{\partial c}\, dc$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial a}\, da + \frac{\partial y}{\partial b}\, db + \frac{\partial y}{\partial c}\, dc$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial a}\, da + \frac{\partial z}{\partial b}\, db + \frac{\partial z}{\partial c}\, dc \quad \text{ist.}$$

Diese Gleichungen bilden die Basis der Betrachtungen, die wir anzustellen haben.

Wir können da, db, dc als die Coordinaten zur Zeit t_0 eines Punktes des Körpers in Bezug auf ein Coordinatensystem betrachten, dessen Achsen denen des bis jetzt benutzten parallel sind, dessen Anfangspunkt aber der Punkt ist, dessen Coordinaten bis jetzt a, b, c genannt wurden; die Coordinaten desselben materiellen Punktes zur Zeit t in Bezug auf dasselbe Coordinatensystem sind dann

$$\begin{aligned} &x - a + \frac{\partial x}{\partial a} da + \frac{\partial x}{\partial b} db + \frac{\partial x}{\partial c} dc \\ &y - b + \frac{\partial y}{\partial a} da + \frac{\partial y}{\partial b} db + \frac{\partial y}{\partial c} dc \\ &z - c + \frac{\partial z}{\partial a} da + \frac{\partial z}{\partial b} db + \frac{\partial z}{\partial c} dc. \end{aligned} \tag{1}$$

Da da, db, dc, abgesehen davon, dass sie unendlich klein sein müssen, willkürlich sind, so erlauben diese Ausdrücke die Veränderung zu beurtheilen, welche ein unendlich kleiner Theil des Körpers in dem Zeitraume von t_0 bis t erleidet. Das Charakteristische dieser Ausdrücke ist, dass sie linear in Bezug auf da, db, dc sind. Bei der Entwickelung der Folgerungen, welche hieraus fliessen, wollen wir uns einer neuen Bezeichnung bedienen, später aber zu der bis jetzt gebrauchten zurückkehren.

§ 2.

ξ, η, ζ seien die Coordinaten eines materiellen Punktes eines Körpers; dieser Körper erleide eine Veränderung der Art, dass, wenn ξ'', η'', ζ'' die Coordinaten desselben Punktes nach dieser bezeichnen,

$$\begin{aligned} \xi'' &= a_1 + a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta \\ \eta'' &= a_2 + a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta \\ \zeta'' &= a_3 + a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta \end{aligned} \tag{2}$$

ist, wo die Grössen a Constanten sind. Es soll diese Veränderung untersucht werden.

Wir setzen dabei voraus, dass die Grössen a nicht unendlich sind, und dass, wenn

$$\begin{aligned} \xi &= b_{11}(\xi'' - a_1) + b_{21}(\eta'' - a_2) + b_{31}(\zeta'' - a_3) \\ \eta &= b_{12}(\xi'' - a_1) + b_{22}(\eta'' - a_2) + b_{32}(\zeta'' - a_3) \\ \zeta &= b_{13}(\xi'' - a_1) + b_{23}(\eta'' - a_2) + b_{33}(\zeta'' - a_3) \end{aligned} \tag{3}$$

die Auflösungen der Gleichungen 2) sind, auch die Grössen b bestimmte, nicht unendliche Werthe haben; das erfordert, dass, wenn

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} \tag{4}$$

ist, d. h. wenn D die Determinante der Grössen $a_{11}, a_{12}, \ldots$ bedeutet,

D nicht verschwindet. Wir wollen uns vorstellen, dass der Zustand des Körpers stetig geändert wird, ohne dass D verschwindet; dann ist dasselbe immer positiv; denn es ist positiv, nämlich $= 1$, wenn die Gleichungen 2)

$$\xi'' = \xi, \quad \eta'' = \eta, \quad \zeta'' = \zeta$$

sind.

Zunächst ist ersichtlich, dass Punkte des Körpers, die ursprünglich in einer Ebene lagen, in einer Ebene geblieben sind; denn einer linearen Relation zwischen ξ'', η'', ζ'' entspricht eine lineare Relation zwischen ξ, η, ζ, und umgekehrt. Gerade Linien sind daher auch gerade, und Parallelen sind parallel geblieben, weil ξ'', η'', ζ'' unendlich werden, wenn ξ, η, ζ es sind, und umgekehrt.

Die weiteren Ueberlegungen können wir durch die folgende Bemerkung ein wenig erleichtern. Die durch die Gleichungen 2) dargestellte Veränderung des Körpers können wir ansehen als zusammengesetzt aus zweien, die nach einander bewirkt werden. Ausser den beiden bis jetzt betrachteten Zuständen denken wir uns einen dritten, einen Zwischenzustand, und bezeichnen bei ihm durch ξ', η', ζ' die Coordinaten *des* Punktes, auf den ξ, η, ζ und ξ'', η'', ζ'' sich beziehen. Die Gleichungen 2) können wir dann ersetzen durch

$$\begin{aligned} \xi'' &= a_1 + \xi' \\ \eta'' &= a_2 + \eta' \\ \zeta'' &= a_3 + \zeta' \end{aligned} \qquad 5)$$

und

$$\begin{aligned} \xi' &= a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta \\ \eta' &= a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta \\ \zeta' &= a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta. \end{aligned} \qquad 6)$$

Die durch die Gleichungen 5) dargestellte Veränderung des Körpers ist eine Verschiebung ohne Aenderung der relativen Lage seiner Punkte und ohne Drehung, eine Verschiebung um eine Strecke, deren Projectionen auf die Coordinatenachsen a_1, a_2, a_3 sind. Noch zu untersuchen ist die durch die Gleichungen 6) dargestellte Veränderung, die einen speciellen Fall derjenigen bildet, auf welche die Gleichungen 2) sich beziehen.

Denken wir uns eine von dem Anfangspunkte der Coordinaten ausgehende gerade Linie des Körpers; α, β, γ seien die Cosinus der Winkel, welche sie mit den Achsen bildet, r ihre Länge vor der Veränderung, α', β', γ', r' die entsprechenden Grössen nach derselben; dann ist

$$\begin{aligned} \xi &= r\alpha, & \eta &= r\beta, & \zeta &= r\gamma \\ \xi' &= r'\alpha', & \eta' &= r'\beta', & \zeta' &= r'\gamma', \end{aligned}$$

also nach 6)

$$\begin{aligned} r'\alpha' &= r(a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma) \\ r'\beta' &= r(a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma) \\ r'\gamma' &= r(a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma). \end{aligned} \qquad 7)$$

Die gedachte Linie hat eine Aenderung ihrer Richtung und ihrer Länge erfahren; den Werth von $\frac{r'}{r} - 1$ nennt man ihre *Dilatation*; diese, so wie die Aenderung ihrer Richtung ist durch 7) in Verbindung mit

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1$$

aus α, β, γ zu berechnen. Parallele Linien erfahren gleiche Dilatation und gleiche Richtungsänderungen, wie daraus folgt, dass ein Parallelogramm ein Parallelogrammm bleibt.

Suchen wir nun die Aenderungen der Grösse und Richtung auf, welche eine ebene Fläche erleidet. Wir wählen als solche ein Dreieck, dessen Ecken im ursprünglichen Zustande des Körpers die Coordinaten

$$0,\ 0,\ 0,\quad \xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1,\quad \xi_2,\ \eta_2,\ \zeta_2$$

und nach der Veränderung die Coordinaten

$$0,\ 0,\ 0,\quad \xi_1',\ \eta_1',\ \zeta_1',\quad \xi_2',\ \eta_2',\ \zeta_2'$$

haben. Neben dem benutzten Coordinatensystem führen wir ein zweites, dass der x, y, z, ein, von dem wir voraussetzen, dass es durch Drehung in eine Lage gebracht werden könnte, bei der die Achsen der x, y, z resp. mit den Achsen der ξ, η, ζ zusammenfallen würden, und setzen allgemein

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \\ \eta &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z \\ \zeta &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z. \end{aligned}$$

Die xy-Ebene soll die Ebene des genannten Dreiecks im ursprünglichen Zustande des Körpers sein. Es ist dann

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 & \xi_2 &= \alpha_1 x_2 + \alpha_2 y_2 \\ \eta_1 &= \beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 & \eta_2 &= \beta_1 x_2 + \beta_2 y_2 \\ \zeta_1 &= \gamma_1 x_1 + \gamma_2 y_1 & \zeta_2 &= \gamma_1 x_2 + \gamma_2 y_2; \end{aligned}$$

daraus folgt bei Rücksicht auf die Gleichungen 6) und 7) der fünften Vorlesung

$$\begin{aligned} \eta_1 \zeta_2 - \eta_2 \zeta_1 &= \alpha_3 (x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ \zeta_1 \xi_2 - \zeta_2 \xi_1 &= \beta_3 (x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 &= \gamma_3 (x_1 y_2 - x_2 y_1). \end{aligned}$$

Bezeichnet man durch s die Fläche des genannten Dreiecks beim ursprünglichen Zustande des Körpers, so ist

$$\pm 2s = x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

wo das Vorzeichen der linken Seite dadurch bestimmt wird, dass s positiv ist. Nennt man ferner α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche eine der beiden Normalen der Ebene des Dreiecks, also die z-Achse oder die dieser entgegengesetzte Richtung, mit den Achsen der ξ, η, ζ bildet, so ist daher

$$
\begin{aligned}
\pm 2s\alpha &= \eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1 \\
\pm 2s\beta &= \zeta_1\xi_2 - \zeta_2\xi_1 \\
\pm 2s\gamma &= \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1,
\end{aligned} \tag{8}
$$

wo entweder die drei oberen oder die drei unteren Zeichen gelten. Eine ähnliche Betrachtung in Bezug auf das Dreieck *nach* der Veränderung des Körpers führt bei analoger Bezeichnung zu den Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\pm 2s'\alpha' &= \eta_1'\zeta_2' - \eta_2'\zeta_1' \\
\pm 2s'\beta' &= \zeta_1'\xi_2' - \zeta_2'\xi_1' \\
\pm 2s'\gamma' &= \xi_1'\eta_2' - \xi_2'\eta_1',
\end{aligned} \tag{9}
$$

wo s' die Fläche, α', β', γ' die Cosinus der Winkel, welche eine ihrer Normalen mit den Achsen der ξ, η, ζ bildet, nach der Veränderung bedeuten, und wo gleichfalls die 3 oberen oder die 3 unteren Zeichen gelten. Aus 6) ergiebt sich nun

$$
\begin{aligned}
\eta_1'\zeta_2' - \eta_2'\zeta_1' = (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})\,(\eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1) \\
+ (a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33})\,(\zeta_1\xi_2 - \zeta_2\xi_1) \\
+ (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\,(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1).
\end{aligned} \tag{10}
$$

Die Gleichung nimmt eine einfachere Gestalt an, wenn man die durch die Gleichungen 3) definirten Grössen b einführt. Es ist nämlich

$$
\begin{aligned}
b_{11} &= \frac{1}{D}\,(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \\
b_{12} &= \frac{1}{D}\,(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) \\
b_{13} &= \frac{1}{D}\,(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}),
\end{aligned}
$$

wo D die Determinante der Grössen a bedeutet. Transformirt man mit Hülfe hiervon die Gleichung 10) und fügt die zwei Gleichungen hinzu, die auf analogem Wege sich bilden lassen, so erhält man

$$
\begin{aligned}
\pm s'\alpha' &= sD\,(b_{11}\alpha + b_{12}\beta + b_{13}\gamma) \\
\pm s'\beta' &= sD\,(b_{21}\alpha + b_{22}\beta + b_{23}\gamma) \\
\pm s'\gamma' &= sD\,(b_{31}\alpha + b_{32}\beta + b_{33}\gamma),
\end{aligned} \tag{11}
$$

wo auf den linken Seiten gleichzeitig das positive oder das negative Zeichen gilt. Wir haben bereits angenommen, dass der Zustand des Körpers stetig geändert ist und so, dass dabei D nicht verschwand; setzen wir noch fest, dass dabei die Normale, auf welche die Zeichen α, β, γ sich beziehen, nicht gewechselt wird, so gilt das *positive* Zeichen, denn dieses gilt am Anfange der Veränderung, und es kann nicht wechseln, da die linken Seiten der Gleichungen 11) nicht gleichzeitig verschwinden können; geschähe das nämlich, so müsste $s' = 0$ sein, während s von Null verschieden ist; d. h. es müssten 3 Punkte des Körpers, die ursprünglich nicht auf einer geraden Linie lagen, nach der Veränderung auf einer solchen sich befinden. Man hat daher

$$
\begin{aligned}
s'\alpha' &= sD\,(b_{11}\alpha + b_{12}\beta + b_{13}\gamma)\\
s'\beta' &= sD\,(b_{21}\alpha + b_{22}\beta + b_{23}\gamma)\\
s'\gamma' &= sD\,(b_{31}\alpha + b_{32}\beta + b_{33}\gamma).
\end{aligned} \qquad 12)
$$

Aus diesen Gleichungen ist die Richtungsänderung und die *Dilatation* der gedachten Fläche zu berechnen; mit diesem Namen belegt man den Werth von $\frac{s'}{s} - 1$. Sie gelten übrigens nicht allein für ein Dreieck, wie wir es betrachtet haben, sondern für jeden Theil seiner Ebene, weil dieser sich durch Addition und Subtraction aus solchen Dreiecken zusammensetzen lässt. Sie gelten auch für parallele Flächen, weil parallele und gleich lange Linien parallel und von gleicher Länge bleiben.

Wir suchen endlich die *räumliche Dilatation*, welche der durch die Gleichungen 6) dargestellten Veränderung des Körpers entspricht, auf. Zu diesem Zwecke denken wir uns in dem Körper in seinem ursprünglichen Zustande einen durch zwei senkrechte Querschnitte begrenzten Cylinder; s sei die Grundfläche, r die Länge der Achse, α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche eine der beiden Richtungen dieser mit den Coordinatenachsen bildet. Nach der Veränderung ist der Cylinder ein schiefer geworden; es sei nun s' die Grundfläche, r' die Länge der Achse; es sollen ferner α', β', γ' sich auf die Normale der Grundfläche, α'', β'', γ'' sich auf die Richtung der Achse beziehen. Es gelten dann die Gleichungen 12), und nach 7) ist

$$
\begin{aligned}
r'\alpha'' &= r\,(a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma)\\
r'\beta'' &= r\,(a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma)\\
r'\gamma'' &= r\,(a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma).
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen multipliciren wir der Reihe nach mit den Gleichungen 12) und addiren die Producte. Bezeichnen wir das Volumen des Cylinders vor der Aenderung durch τ, nach derselben durch τ', so haben wir

$$
\begin{aligned}
\tau &= rs\\
\tau' &= r's'\,(\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma''),
\end{aligned}
$$

Wir beachten ferner, dass nach der bei 3) gegebenen Definition der Grössen b die Gleichungen 3) identische werden müssen, wenn man in sie die Werthe von ξ'', η'', ζ'' aus 2) substituirt; daraus ergeben sich neun Relationen zwischen den Grössen a und b, in Folge deren die auf dem angegebenen Wege gebildete Gleichung

$$\tau' = \tau D \qquad 13)$$

wird. Die räumliche Dilatation, d. h. $\frac{\tau'}{\tau} - 1$ ist also $= D - 1$; und das gilt nicht allein für einen Cylinder, sondern für jeden Theil des Körpers, weil jeder Theil desselben sich aus Cylindern zusammensetzen lässt.

Wir knüpfen hier eine Bemerkung an, auf die wir uns später beziehen wollen. Es seien

$$\begin{matrix} \xi_1, & \eta_1, & \zeta_1 \\ \xi_2, & \eta_2, & \zeta_2 \\ \xi_3, & \eta_3, & \zeta_3 \end{matrix}$$

die Coordinaten dreier Punkte des Körpers vor der Veränderung und

$$\begin{matrix} \xi_1', & \eta_1', & \zeta_1' \\ \xi_2', & \eta_2', & \zeta_2' \\ \xi_3', & \eta_3', & \zeta_3' \end{matrix}$$

die Coordinaten derselben Punkte nach dieser; es gelten dann die Gleichungen, die aus 6) entstehen, wenn man den Zeichen ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' den Index 1 oder 2 oder 3 giebt. Der 6 fache Inhalt des Tetraeders, welches diese 3 Punkte und den Anfangspunkt der Coordinaten zu Eckpunkten hat, vor oder nach der Veränderung ist gleich dem absoluten Werthe der Determinante jener oder dieser 9 Coordinaten. Nach 13) ist das Verhältniss der beiden Determinanten daher $= \pm D$; es ist $= + D$, da es mit D der Einheit gleich wird, wenn die Veränderung verschwindet. Setzt man für D seinen Werth aus 4), so erhält man daher

$$\begin{vmatrix} \xi_1', & \eta_1', & \zeta_1' \\ \xi_2', & \eta_2', & \zeta_1' \\ \xi_3', & \eta_3', & \zeta_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_1, & \eta_1, & \zeta_1 \\ \xi_2, & \eta_2, & \zeta_2 \\ \xi_3, & \eta_3, & \zeta_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Die Gleichung, die von der Bedeutung unabhängig ist, die wir den Zeichen ξ', η', ζ', ξ, η, ζ gegeben haben, und nur erfordert, dass zwischen diesen die Gleichungen bestehen, die nach dem Muster der Gleichungen 6) zu bilden sind, spricht einen bekannten Satz der Determinantentheorie aus.

§ 3.

Wir haben die durch die Gleichungen 2) dargestellte Veränderung eines Körpers angesehen als zusammengesetzt aus zweien, die durch die Gleichungen 5) und 6) dargestellt sind, und von denen die erste in einer Verschiebung besteht. Wir werden nun zeigen, dass die zweite zerlegt werden kann in eine *Drehung* des Körpers um den Anfangspunkt der Coordinaten und in eine Veränderung, die wir eine *Ausdehnung in drei auf einander senkrechten Richtungen* nennen wollen. Wir führen neben dem Coordinatensystem der ξ, η, ζ ein zweites mit demselben Anfangspunkte ein und nennen x, y, z die Coordinaten eines materiellen Punktes des Körpers in seinem ursprünglichen Zustande in Bezug auf dieses. Wir denken uns den Zustand desselben nun so geändert, dass, wenn x', y', z' die neuen Coordinaten

des nämlichen materiellen Punktes in Bezug auf dasselbe Coordinatensystem sind,

$$\begin{aligned} x' &= \mu_1 x \\ y' &= \mu_2 y \\ z' &= \mu_3 z \end{aligned} \tag{14}$$

ist, wo μ_1, μ_2, μ_3 positive Constanten sein sollen. Diese Veränderung belegen wir mit dem Namen einer Ausdehnung in den Richtungen der x, y, z. Sie hat das Eigenthümliche, dass die Theilchen, die ursprünglich auf einer der Achsen lagen, auf derselben geblieben sind. Die Dilatationen, die in den Richtungen der Achsen stattgefunden haben, nennen wir die *Hauptdilatationen*; ihre Grössen sind $\mu_1 - 1$, $\mu_2 - 1$, $\mu_3 - 1$. Nachdem diese Ausdehnung stattgefunden hat, denken wir uns den Körper um den Anfangspunkt der Coordinaten gedreht und stellen uns vor, dass die Achsen der x, y, z diese Drehung mitmachen. Die Coordinaten in Bezug auf sie des betrachteten materiellen Punktes ändern sich durch diese Drehung dann nicht, sondern bleiben x', y', z'. Nun seien die Coordinaten desselben materiellen Punktes in Bezug auf das System der ξ, η, ζ im ursprünglichen Zustande des Körpers ξ, η, ζ und nach der Ausdehnung und Drehung ξ', η', ζ'; es seien ferner die Cosinus der Winkel, welche die Achsen der x, y, z mit den Achsen der ξ, η, ζ bilden, vor der Drehung

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3, \end{matrix}$$

nach der Drehung

$$\begin{matrix} \alpha_1' & \beta_1' & \gamma_1' \\ \alpha_2' & \beta_2' & \gamma_2' \\ \alpha_3' & \beta_3' & \gamma_3', \end{matrix}$$

so dass, gemäss der früher gebrauchten Bezeichnungsweise, die Buchstaben α, β, γ den Zeichen ξ, η, ζ, die Indices 1, 2, 3 den Zeichen x, y, z resp. entsprechen. Es ist dann

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta \\ y &= \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta + \gamma_2 \zeta \\ z &= \alpha_3 \xi + \beta_3 \eta + \gamma_3 \zeta \end{aligned} \tag{15}$$

und

$$\begin{aligned} \xi' &= \alpha_1' x' + \alpha_2' y' + \alpha_3' z' \\ \eta' &= \beta_1' x' + \beta_2' y' + \beta_3' z' \\ \zeta' &= \gamma_1' x' + \gamma_2' y' + \gamma_3' z'. \end{aligned} \tag{16}$$

Substituirt man in 16) die Werthe von x', y', z' aus 14) und dann für x, y, z ihre Werthe aus 15), so erhält man

$$\begin{aligned}
\xi' = \xi(\alpha_1\alpha_1'\mu_1 + \alpha_2\alpha_2'\mu_2 + \alpha_3\alpha_3'\mu_3) + \eta(\beta_1\alpha_1'\mu_1 + \beta_2\alpha_2'\mu_2 + \beta_3\alpha_3'\mu_3) \\
+ \zeta(\gamma_1\alpha_1'\mu_1 + \gamma_2\alpha_2'\mu_2 + \gamma_3\alpha_3'\mu_3) \\
\eta' = \xi(\alpha_1\beta_1'\mu_1 + \alpha_2\beta_2'\mu_2 + \alpha_3\beta_3'\mu_3) + \eta(\beta_1\beta_1'\mu_1 + \beta_2\beta_2'\mu_2 + \beta_3\beta_3'\mu_3) \\
+ \zeta(\gamma_1\beta_1'\mu_1 + \gamma_2\beta_2'\mu_2 + \gamma_3\beta_3'\mu_3) \quad 17) \\
\zeta' = \xi(\alpha_1\gamma_1'\mu_1 + \alpha_2\gamma_2'\mu_2 + \alpha_3\gamma_3'\mu_3) + \eta(\beta_1\gamma_1'\mu_1 + \beta_2\gamma_2'\mu_2 + \beta_3\gamma_3'\mu_3) \\
+ \zeta(\gamma_1\gamma_1'\mu_1 + \gamma_2\gamma_2'\mu_2 + \gamma_3\gamma_3'\mu_3).
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind von derselben Form, wie die Gleichungen 6); sie lassen sich mit diesen identisch machen durch passende Bestimmung der 18 Grössen α, β, γ und der 3 Grössen μ; man hat dazu die 9 Gleichungen, welche die Gleichheit der Coefficienten in den Gleichungen 6) und 17) aussprechen, und die 12 Relationen, welche zwischen den Grössen α, β, γ bestehen. Hieraus folgt dann, dass, wie behauptet wurde, eine jede durch die Gleichungen 6) dargestellte Veränderung des Körpers als zusammengesetzt aus einer Drehung und einer Ausdehnung, wie sie durch 14) dargestellt ist, angesehen werden kann.

Wie die Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ berechnet werden können, lehrt die folgende Betrachtung. Nehmen wir an, dass zwischen ξ, η, ζ die Relation

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \qquad 18)$$

besteht, d. h. betrachten wir materielle Punkte des Körpers, welche ursprünglich auf einer mit dem Radius 1 um den Anfangspunkt der Coordinaten beschriebenen Kugel liegen; die Gleichungen 6) ergeben dann, wenn man die Zeichen b in der bei 3) angegebenen Bedeutung gebraucht, zwischen ξ', η', ζ' die Relation

$$(b_{11}\xi' + b_{21}\eta' + b_{31}\zeta')^2 + (b_{12}\xi' + b_{22}\eta' + b_{32}\zeta')^2 + (b_{13}\xi' + b_{23}\eta' + b_{33}\zeta')^2 = 1; \quad 19)$$

das ist die Gleichung einer Oberfläche zweiten Grades, und zwar eines Ellipsoids, da, wenn man

$$\xi' = r'\alpha', \quad \eta' = r'\beta', \quad \zeta' = r'\gamma'$$

setzt, sie bei allen Werthen von α', β', γ' reelle, endliche Werthe von r' giebt. Auf diesem Ellipsoid liegen also die betrachteten Theilchen nach der durch 4) dargestellten Veränderung. Aus der Gleichung 18) folgt nun wegen 15)

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

und weiter bei Rücksicht auf 14)

$$\frac{x'^2}{\mu_1^2} + \frac{y'^2}{\mu_2^2} + \frac{z'^2}{\mu_3^2} = 1.$$

Bei der Lage, welche die Achsen der x, y, z nach der Drehung haben, die wir als einen Theil der in Rede stehenden Veränderung betrachten, stellt diese Gleichung also dasselbe Ellipsoid wie die Gleichung 19) dar. Suchen wir mit Hülfe der letzteren die Haupt-

achsen desselben, so haben wir in ihren halben Längen die Werthe von μ_1, μ_2, μ_3, in den Cosinus der Winkel, die sie mit den Achsen der ξ, η, ζ bilden, die Werthe der α', β', γ'. Nimmt man

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1$$

an, so findet man in ähnlicher Weise

$$(a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta)^2 + (a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta)^2 + (a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta)^2 = 1$$

und

$$\mu_1^2 x^2 + \mu_2^2 y^2 + \mu_3^2 z^2 = 1$$

als Gleichungen eines zweiten Ellipsoids, falls die Achsen der x, y, z *die* Lage haben, die sie *vor* jener Drehung besitzen. Die Halbachsen desselben haben die Längen $\frac{1}{\mu_1}$, $\frac{1}{\mu_2}$, $\frac{1}{\mu_3}$, und die Cosinus der Winkel, die sie mit den Achsen der ξ, η, ζ bilden, lehren die Werthe der α, β, γ kennen.

§ 4.

Berechnen wollen wir die Drehung und die Grössen und Richtungen der Hauptdilatationen, welche den Gleichungen 6) entsprechen, nur in dem Falle, dass die ganze Veränderung unendlich klein ist. Es müssen die Hauptdilatationen $\mu_1 - 1$, $\mu_2 - 1$, $\mu_3 - 1$, die wir nun λ_1, λ_2, λ_3 nennen wollen, dann unendlich klein sein und ebenso die Differenzen

$$\alpha' - \alpha, \quad \beta' - \beta, \quad \gamma' - \gamma,$$

die wir durch

$$\delta\alpha, \quad \delta\beta, \quad \delta\gamma$$

bezeichnen wollen, für die Indices 1, 2, 3. Nach den Relationen, die zwischen den Grössen α, β, γ bestehen, werden daher die Gleichungen 17) bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung

$$\begin{aligned}
\xi' - \xi = {} & \xi(\alpha_1^2\lambda_1 + \alpha_2^2\lambda_2 + \alpha_3^2\lambda_3 + \alpha_1\delta\alpha_1 + \alpha_2\delta\alpha_2 + \alpha_3\delta\alpha_3) \\
& + \eta(\alpha_1\beta_1\lambda_1 + \alpha_2\beta_2\lambda_2 + \alpha_3\beta_3\lambda_3 + \beta_1\delta\alpha_1 + \beta_2\delta\alpha_2 + \beta_3\delta\alpha_3) \\
& + \zeta(\alpha_1\gamma_1\lambda_1 + \alpha_2\gamma_2\lambda_2 + \alpha_3\gamma_3\lambda_3 + \gamma_1\delta\alpha_1 + \gamma_2\delta\alpha_2 + \gamma_3\delta\alpha_3) \\
\eta' - \eta = {} & \xi(\beta_1\alpha_1\lambda_1 + \beta_2\alpha_2\lambda_2 + \beta_3\alpha_3\lambda_3 + \alpha_1\delta\beta_1 + \alpha_2\delta\beta_2 + \alpha_3\delta\beta_3) \\
& + \eta(\beta_1^2\lambda_1 + \beta_2^2\lambda_2 + \beta_3^2\lambda_3 + \beta_1\delta\beta_1 + \beta_2\delta\beta_2 + \beta_3\delta\beta_3) \qquad 20) \\
& + \zeta(\beta_1\gamma_1\lambda_1 + \beta_2\gamma_2\lambda_2 + \beta_3\gamma_3\lambda_3 + \gamma_1\delta\beta_1 + \gamma_2\delta\beta_2 + \gamma_3\delta\beta_3) \\
\zeta' - \zeta = {} & \xi(\gamma_1\alpha_1\lambda_1 + \gamma_2\alpha_2\lambda_2 + \gamma_3\alpha_3\lambda_3 + \alpha_1\delta\gamma_1 + \alpha_2\delta\gamma_2 + \alpha_3\delta\gamma_3) \\
& + \eta(\gamma_1\beta_1\lambda_1 + \gamma_2\beta_2\lambda_2 + \gamma_3\beta_3\lambda_3 + \beta_1\delta\gamma_1 + \beta_2\delta\gamma_2 + \beta_3\delta\gamma_3) \\
& + \zeta(\gamma_1^2\lambda_1 + \gamma_2^2\lambda_2 + \gamma_3^2\lambda_3 + \gamma_1\delta\gamma_1 + \gamma_2\delta\gamma_2 + \gamma_3\delta\gamma_3).
\end{aligned}$$

Durch Variation der Relationen zwischen den Grössen α, β, γ erhält man 6 Relationen zwischen den Grössen α, β, γ, $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, welche im § 2 der fünften Vorlesung nach Aufstellung der Gleichungen 10) angegeben sind. In Folge derselben giebt die Vergleichung der Gleichungen 20) mit den Gleichungen 6)

$$
\begin{aligned}
a_{11} - 1 &= \alpha_1{}^2 \lambda_1 + \alpha_2{}^2 \lambda_2 + \alpha_3{}^2 \lambda_3 \\
a_{22} - 1 &= \beta_1{}^2 \lambda_1 + \beta_2{}^2 \lambda_2 + \beta_3{}^2 \lambda_3 \\
a_{33} - 1 &= \gamma_1{}^2 \lambda_1 + \gamma_2{}^2 \lambda_2 + \gamma_3{}^2 \lambda_3 \\
\frac{a_{23} + a_{32}}{2} &= \beta_1 \gamma_1 \lambda_1 + \beta_2 \gamma_2 \lambda_2 + \beta_3 \gamma_3 \lambda_3 \\
\frac{a_{31} + a_{13}}{2} &= \gamma_1 \alpha_1 \lambda_1 + \gamma_2 \alpha_2 \lambda_2 + \gamma_3 \alpha_3 \lambda_3 \\
\frac{a_{12} + a_{21}}{2} &= \alpha_1 \beta_1 \lambda_1 + \alpha_2 \beta_2 \lambda_2 + \alpha_3 \beta_3 \lambda_3.
\end{aligned} \qquad 21)
$$

An dem angeführten Orte ist gezeigt, dass die Grössen
$\beta_1 \delta \gamma_1 + \beta_2 \delta \gamma_2 + \beta_3 \delta \gamma_3$, $\gamma_1 \delta \alpha_1 + \gamma_2 \delta \alpha_2 + \gamma_3 \delta \alpha_3$, $\alpha_1 \delta \beta_1 + \alpha_2 \delta \beta_2 + \alpha_3 \delta \beta_3$, die dort mit π', χ', ϱ' bezeichnet wurden, die Componenten der Drehung nach den Achsen der ξ, η, ζ sind. Durch Vergleichung der Gleichungen 20) und 6) findet man daher als die Werthe dieser Componenten

$$
\frac{a_{32} - a_{23}}{2}, \quad \frac{a_{13} - a_{31}}{2}, \quad \frac{a_{21} - a_{12}}{2}. \qquad 22)
$$

Die Werthe der Grössen α, β, γ, λ ergeben sich durch die folgende Betrachtung. Aus den Gleichungen 21) findet man leicht bei Rücksicht auf die Relationen zwischen α, β, γ

$$
\begin{aligned}
(a_{11} - 1 - \lambda_1)\, \alpha_1 + \frac{a_{12} + a_{21}}{2} \beta_1 + \frac{a_{13} + a_{31}}{2} \gamma_1 &= 0 \\
\frac{a_{21} + a_{12}}{2} \alpha_1 + (a_{22} - 1 - \lambda_1)\, \beta_1 + \frac{a_{23} + a_{32}}{2} \gamma_1 &= 0 \\
\frac{a_{31} + a_{13}}{2} \alpha_1 + \frac{a_{32} + a_{23}}{2} \beta_1 + (a_{33} - 1 - \lambda_1)\, \gamma_1 &= 0.
\end{aligned} \qquad 23)
$$

Da nun α_1, β_1, γ_1 nicht gleichzeitig verschwinden können, weil die Summe ihrer Quadrate $= 1$ ist, so muss die Determinante dieser Gleichungen verschwinden; d. h. es muss λ_1 eine Wurzel der cubischen Gleichung

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} - 1 - \lambda, & \frac{a_{12} + a_{21}}{2}, & \frac{a_{13} + a_{31}}{2} \\
\frac{a_{21} + a_{12}}{2}, & a_{22} - 1 - \lambda, & \frac{a_{23} + a_{32}}{2} \\
\frac{a_{31} + a_{13}}{2}, & \frac{a_{32} + a_{23}}{2}, & a_{33} - 1 - \lambda
\end{vmatrix} = 0 \qquad 24)
$$

sein. Die Gleichungen 23) bleiben aber auch gültig, wenn man den Index 1 mit dem Index 2 oder 3 bei den Zeichen α, β, γ, λ vertauscht, woraus dann folgt, dass λ_1, λ_2, λ_3 die 3 Wurzeln der Gleichung 24) sind. Hat man eine derselben für λ_1 gewählt, so bestimmen die Gleichungen 23) die Verhältnisse von α_1, β_1, γ_1; man findet diese Grössen selbst bis auf das Vorzeichen *einer*, welches willkürlich bleibt, durch Hinzuziehung der Gleichung

$$
\alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2 + \gamma_1{}^2 = 1.
$$

Auf ähnliche Weise ergeben sich die Werthe von α_2, β_2, γ_2 und α_3, β_3, γ_3. Auch die Vorzeichen einer der Grössen α_2, β_2, γ_2 und einer der Grössen α_3, β_3, γ_3 können noch willkürlich gewählt werden.

Wir merken an, dass die räumliche Dilatation

$$= \mu_1 \mu_2 \mu_3 - 1 = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 + \lambda_3) - 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

also nach den 3 ersten der Gleichungen 21)

$$= a_{11} - 1 + a_{22} - 1 + a_{33} - 1 \tag{25)}$$

ist.

§ 5.

Wir kehren nun zurück zu der in § 1 entwickelten Vorstellung und der dort gebrauchten Bezeichnung. Aus den gewonnenen Resultaten ist zu schliessen, dass die Veränderung, welche irgend ein Theil des Körpers, dessen sämmtliche Dimensionen unendlich klein sind, bei seiner Bewegung in irgend einem Zeitraume erleidet, angesehen werden kann als zusammengesetzt aus einer Verschiebung, einer Drehung und einer Ausdehnung, wie sie durch die Gleichungen 14) charakterisirt ist. Die Componenten der Verschiebung sind

$$x - a, \quad y - b, \quad z - c;$$

der materielle Punkt, der bei der Drehung und der Ausdehnung keine Verrückung erfährt, ist derjenige, dessen ursprüngliche Coordinaten a, b, c, dessen Coordinaten nach der Veränderung also x, y, z sind. Die Componenten der Drehung, die Grössen und Richtungen der Hauptdilatationen, wie alle Dilatationen, die stattgefunden haben, findet man aus den dafür aufgestellten Formeln, wenn man in ihnen

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\partial x}{\partial a}, & a_{12} &= \frac{\partial x}{\partial b}, & a_{13} &= \frac{\partial x}{\partial c} \\ a_{21} &= \frac{\partial y}{\partial a}, & a_{22} &= \frac{\partial y}{\partial b}, & a_{23} &= \frac{\partial y}{\partial c} \\ a_{31} &= \frac{\partial z}{\partial a}, & a_{32} &= \frac{\partial z}{\partial b}, & a_{33} &= \frac{\partial z}{\partial c} \end{aligned} \tag{26)}$$

setzt.

Die Veränderung, welche der betrachtete Theil des Körpers in einem Zeitelement dt erleidet, ist unendlich klein; auf sie können daher die Formeln eine Anwendung finden, welche in § 4 entwickelt sind. Um diese Anwendung zu machen, nennen wir x, y, z, was wir bisher a, b, c nannten, und schreiben $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ für x, y, z; zugleich setzen wir

$$dx = u\,dt, \quad dy = v\,dt, \quad dz = w\,dt,$$

d. h. wir bezeichnen durch u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit, welche zur Zeit t im Punkte (x, y, z) stattfindet; die Gleichungen 26) werden dann

$$
\begin{aligned}
a_{11} - 1 &= \frac{\partial u}{\partial x}\, dt, & a_{12} &= \frac{\partial u}{\partial y}\, dt, & a_{13} &= \frac{\partial u}{\partial z}\, dt \\
a_{21} &= \frac{\partial v}{dx}\, dt, & a_{22} - 1 &= \frac{\partial v}{\partial y}\, dt, & a_{23} &= \frac{\partial v}{\partial z}\, dt \\
a_{31} &= \frac{\partial w}{\partial x}\, dt, & a_{32} &= \frac{\partial w}{\partial y}\, dt, & a_{33} - 1 &= \frac{\partial w}{\partial z}\, dt.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Den Ausdrücken 22) zufolge sind daher die Componenten der Drehungsgeschwindigkeit im Punkte x, y, z zur Zeit t

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{28}$$

und nach 25) ist die räumliche Dilatation, die in dem Zeitelemente dt hier vor sich geht,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dt. \tag{29}$$

§ 6.

Wir wollen nun eine Ueberlegung anstellen, die sich auf die *Oberfläche* des bewegten Körpers bezieht, und beweisen, dass (unter der Voraussetzung der Stetigkeit der Bewegung) diese immer von *denselben* materiellen Punkten gebildet wird. Denken wir uns einen materiellen Punkt, P, der in einem Augenblick nicht in der Oberfläche liegt, und betrachten einen Theil des Körpers, der in diesem Augenblick eine um P beschriebene, unendlich kleine Kugel ist. Nach unseren Betrachtungen ist dieser Theil in jedem andern Augenblick ein Ellipsoid, dessen Mittelpunkt P ist. Daraus geht hervor, dass ein materieller Punkt, der *einmal* nicht in der Oberfläche liegt, *nie* in dieser sich befindet, und hierdurch ist jene Behauptung mit anderen Worten ausgesprochen. Um dieselbe analytisch auszudrücken, schreiben wir die Gleichung der Oberfläche zur Zeit t

$$f(x, y, z, t) = 0, \tag{30}$$

und fassen einen materiellen Punkt ins Auge, der zur Zeit t in der Oberfläche liegt; derselbe liegt dann auch zur Zeit $t + dt$ in ihr; d. h. wenn $f = 0$ ist, so ist auch die Aenderung $= 0$, die f erfährt, wenn t um dt wächst und gleichzeitig x, y, z um udt, vdt, wdt wachsen; es ist dann also

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{31}$$

Die Oberfläche eines Körpers besteht aus den Flächen, in denen er andere Körper berührt. Es sei 30) die Gleichung einer solchen Fläche und es seien u_1, v_1, w_1 und u_2, v_2, w_2 die Componenten der Geschwindigkeit am Orte (x, y, z) in dem ersten und in dem zweiten Körper; die Gleichung 31) giebt dann

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u_1 \frac{\partial f}{\partial x} + v_1 \frac{\partial f}{\partial y} + w_1 \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u_2 \frac{\partial f}{\partial x} + v_2 \frac{\partial f}{\partial y} + w_2 \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Zieht man diese Gleichungen von einander ab, bezeichnet durch n eine von den beiden Richtungen der Normale der Fläche im Punkte (x, y, z) und benutzt, dass dann

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z} = \cos(nx) : \cos(ny) : \cos(nz)$$

ist, so erhält man

$$\begin{aligned} & u_1 \cos(nx) + v_1 \cos(ny) + w_1 \cos(nz) \\ & = u_2 \cos(nx) + v_2 \cos(ny) + w_2 \cos(nz); \end{aligned} \tag{32}$$

eine Gleichung, welche ausspricht, dass die Componente der Geschwindigkeit nach der Normale der Grenzfläche für beide Körper denselben Werth hat.

Wir können es als möglich annehmen, dass auch in *einem* Körper eine Fläche vorhanden ist, an der die Geschwindigkeit sprungweise sich ändert; wir haben dann die beiden Theile, in welche die Fläche (die, wenn sie ungeschlossen ist, in beliebiger Weise zu einer geschlossenen ergänzt werden kann) den Körper theilt, wie *zwei* Körper zu betrachten. Auch dann muss die Gleichung 32) gelten.

Eilfte Vorlesung.

(Druckkräfte. Abhängigkeit der Druckcomponenten von der Richtung und dem Orte des Flächenelementes, auf welches sie sich beziehen. Gleichheit des Druckes auf beiden Seiten der Berührungsfläche zweier Körper. Innere Kräfte. Werthe der Druckcomponenten bei Flüssigkeiten und elastischen festen Körpern.)

§ 1.

Für die Einfachheit der Darstellung der Bewegungen der Körper ist es von Nutzen neben den Kräften, welche wir bisher allein zu betrachten gehabt haben, und welche auf die *Theile* eines Körpers wirken, andere einzuführen, welche auf die Theile seiner *Oberfläche* ausgeübt werden. Man nennt diese *Drucke* oder *Druckkräfte.* Der Druck, der auf ein Element der Oberfläche eines Körpers wirkt, ist gleichartig mit der bewegenden Kraft, welche auf einen materiellen Punkt ausgeübt wird; ihm kommt eine gewisse Grösse und eine gewisse Richtung zu; wir werden bei einem Drucke von seiner Componente nach einer gewissen Richtung, seinem Drehungsmoment in Bezug auf eine gewisse Achse, seiner Arbeit für eine gewisse Verrückung seines Angriffspunktes in demselben Sinne sprechen, wie bei einer Kraft der Art, die wir bisher allein betrachtet haben. Mit der Grösse des Flächenelements, auf welches der Druck bezogen wird, ist derselbe proportional.

Den so verallgemeinerten Begriff der Kraft werden wir eben so wenig vollständig zu definiren versuchen, als wir es früher mit dem specielleren gethan haben; wir wollen allein feststellen, was man über die Bewegung eines Körpers aussagt, wenn man die Kräfte angiebt, die auf seine Theile, und die Druckkräfte, die auf die Theile seiner Oberfläche wirken.

Für ein System materieller Punkte, die irgendwie so mit einander verbunden sind, dass eine Verschiebung in jeder Richtung und eine Drehung um jede Achse ohne Aenderung der relativen Lage möglich ist, gelten die in den §§ 3 und 5 der vierten Vorlesung entwickelten Sätze von der Bewegung des Schwerpunkts und die Flächensätze. Einen Körper betrachten wir als ein solches System materieller Punkte. Der Ausspruch, dass auf die Theile eines Körpers gewisse Kräfte, auf die Theile seiner Oberfläche gewisse Druckkräfte

wirken, soll gleichbedeutend mit den 6 Gleichungen sein, welche die Sätze von der Bewegung des Schwerpunkts und die Flächensätze ausdrücken, wenn man jene Kräfte und Druckkräfte als die einzigen wirkenden Kräfte in Rechnung bringt.

Es sei $d\tau$ ein Element des Volumens des Körpers, μ die Dichtigkeit dieses Elementes,

$$\mu X d\tau, \quad \mu Y d\tau, \quad \mu Z d\tau$$

seien die Componenten der darauf wirkenden Kraft, ds ein Element der Oberfläche, n die nach dem Innern des Körpers gerichtete Normale desselben,

$$X_n ds, \quad Y_n ds, \quad Z_n ds$$

die Componenten des darauf wirkenden Druckes, x, y, z die Coordinaten eines Punktes von $d\tau$ oder von ds und endlich $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ die Componenten der Beschleunigung dieses Punktes. Nach der eben gegebenen Definition und nach den Gleichungen 3) und 9) der vierten Vorlesung ist dann

$$\begin{aligned}
\int \mu \frac{d^2x}{dt^2}\, d\tau &= \int \mu X d\tau + \int X_n ds \\
\int \mu \frac{d^2y}{dt^2}\, d\tau &= \int \mu Y d\tau + \int Y_n ds \\
\int \mu \frac{d^2z}{dt^2}\, d\tau &= \int \mu Z d\tau + \int Z_n ds
\end{aligned} \tag{1}$$

und

$$\begin{aligned}
\int \mu \left(y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2}\right) d\tau &= \int \mu (yZ - zY)\, d\tau + \int (yZ_n - zY_n)\, ds \\
\int \mu \left(z \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2z}{dt^2}\right) d\tau &= \int \mu (zX - xZ)\, d\tau + \int (zX_n - xZ_n)\, ds \\
\int \mu \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2}\right) d\tau &= \int \mu (xY - yY)\, d\tau + \int (xY_n - yX_n)\, ds.
\end{aligned} \tag{2}$$

§ 2.

Ein jeder Theil eines Körpers ist selbst ein Körper, auf den die Gleichungen 1) und 2) angewandt werden können. Daraus folgt, dass die Zeichen X_n, Y_n, Z_n auch für jedes Flächenelement im *Innern* eines Körpers eine Bedeutung haben müssen. Ihre Werthe werden von dem Orte des Flächenelementes und von der Richtung seiner Normale n abhängig sein. Die Abhängigkeit von der letzteren finden wir, wenn wir die Gleichungen 1) für einen Theil des Körpers bilden, dessen sämmtliche Dimensionen unendlich klein sind. Gesetzt, diese seien unendlich klein von der ersten Ordnung; dann sind die Integrale

$$\int \mu \frac{d^2x}{dt^2}\, d\tau \quad \text{und} \quad \int \mu X d\tau,$$

die Endlichkeit der Kräfte, wie der Beschleunigungen vorausgesetzt, unendlich klein von der dritten Ordnung; das Integral

$$\int X_n ds \qquad 3)$$

ist also auch unendlich klein von der dritten Ordnung. Wir wenden diesen Schluss zunächst an auf ein rechtwinkliges Parallelepipedon, dessen Kanten die Längen a, b, c und beliebige Richtungen haben; das in Bezug auf dieses Parallelepipedon genommene Integral 3) können wir schreiben

$$bc(X_a + X_a') + ca(X_b + X_b') + ab(X_c + X_c'),$$

indem wir die Zeichen X_a, X_b, X_c auf die 3 Seitenflächen beziehen, welche durch einen beliebig gewählten Eckpunkt gehen, die Zeichen X_a', X_b', X_c' auf die diesen gegenüberliegenden Seitenflächen. Daraus, dass die aufgestellte Summe unendlich klein von der dritten Ordnung sein muss, wenn a, b, c es von der ersten Ordnung sind, welches auch die Verhältnisse $a : b : c$ sein mögen, folgt, dass

$$X_a + X_a', \quad X_b + X_b', \quad X_c + X_c'$$

verschwinden, d. h. dass allgemein X_n denselben absoluten Werth behält, aber sein Vorzeichen ändert, wenn die Richtung der Normale n in die entgegengesetzte verwandelt wird. Indem wir dieses Resultat benutzen, wollen wir nun zeigen, wie X_n sich ausdrücken lässt durch die Werthe, die es hat, wenn die Normale n parallel der x-Achse, der y-Achse oder der z-Achse ist, welche Werthe durch X_x, X_y, X_z bezeichnet werden mögen. Unendlich nahe an dem Flächenelement, für welches X_n ermittelt werden soll, auf *der* Seite, nach der die Normale n gerichtet ist, denke man sich einen Punkt und lege durch ihn drei Ebenen parallel den Coordinatenebenen. Man erhält so ein Tetraeder; für dieses bilde man das Integral 3). Es sei s die Grösse *der* Seitenfläche des Tetraeders, auf welche X_n sich bezieht; der dieser entsprechende Theil des Integrals ist dann sX_n. Um *den* Theil desselben zu finden, der sich auf die zur x-Achse senkrechte Seitenfläche bezieht, sind die beiden Fälle zu unterscheiden, dass die nach Aussen gerichtete Normale dieser Fläche der x-Achse parallel oder ihr entgegengesetzt ist; in dem ersten Falle ist die Grösse der Fläche $s \cos(nx)$ und das entsprechende X ist $-X_x$, in dem zweiten sind diese beiden Grössen $-s\cos(nx)$ und X_x; in beiden Fällen ist also der betreffende Theil des Integrals 3)

$$-X_x s \cos(nx).$$

Da ähnliche Schlüsse in Bezug auf die beiden letzten Seitenflächen des Tetraeders gelten, so ist das ganze Integral 3)

$$s\Big(X_n - X_x \cos(nx) - X_y \cos(ny) - X_z \cos(nz)\Big).$$

Da dieser Ausdruck unendlich klein von höherer Ordnung als s sein soll, so muss

$$X_n = X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz) \tag{4}$$

sein. In Folge dieser Relation wird das Integral 3) von einer höheren, als der zweiten Ordnung unendlich klein für *jeden* Theil des Körpers, dessen Dimensionen unendlich klein von der ersten Ordnung sind, da

$$\int ds \cos(nx) = 0, \quad \int ds \cos(ny) = 0, \quad \int ds \cos(nz) = 0 \tag{5}$$

ist. Diese Gleichungen ergeben sich leicht aus dem folgenden Satze, von dem wir mehrmals Anwendungen zu machen haben werden:

Ist V eine eindeutige, stetige Function der Coordinaten x, y, z eines Punktes eines begrenzten Raumes, $d\tau$ ein Element dieses Raumes, ds ein Element seiner Oberfläche und n die nach dem Innern des Raumes gerichtete Normale von ds, so ist

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial V}{\partial x} d\tau &= -\int V \cos(nx)\, ds \\ \int \frac{\partial V}{\partial y} d\tau &= -\int V \cos(ny)\, ds \\ \int \frac{\partial V}{\partial z} d\tau &= -\int V \cos(nz)\, ds. \end{aligned} \tag{6}$$

Die Richtigkeit dieser Gleichungen sieht man ein, wenn man in ihren linken Theilen $dx\, dy\, dz$ für $d\tau$ setzt und die Integration nach x, y oder z ausführt. Man braucht in ihnen nur $V = 1$ zu setzen, um die Gleichungen 5) zu erhalten.

Der Gleichung 4) kann man zwei ähnliche, auf demselben Wege abzuleitende, hinzufügen; so dass man hat

$$\begin{aligned} X_n &= X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz) \\ Y_n &= Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz) \\ Z_n &= Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz). \end{aligned} \tag{7}$$

Die 9 Grössen $X_x, X_y \ldots$, dir hier auftreten, sind Functionen von x, y, z, die wir als im Allgemeinen einwerthig und stetig annehmen; nur in einzelnen Flächen, in den Berührungsflächen verschiedener Körper, sollen sprungweise Aenderungen derselben eintreten können. Für irgend einen Theil *eines* Körpers ist dann nach den Gleichungen 4) und 6)

$$\int X_n ds = -\int \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) d\tau$$

und daher wegen der ersten der Gleichungen 1)

$$\int \left\{ \mu \frac{d^2 x}{dt^2} - \mu X + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right\} d\tau = 0.$$

Da diese Gleichung für jeden Theil des Körpers gelten soll, so muss

der Factor von $d\tau$ unter dem Integralzeichen verschwinden. Zu der Gleichung, die so sich ergiebt, lassen sich wiederum zwei ähnliche hinzufügen, so dass wir erhalten

$$\begin{aligned}
\mu \frac{d^2 x}{dt^2} &= \mu X - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z} \\
\mu \frac{d^2 y}{dt^2} &= \mu Y - \frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\
\mu \frac{d^2 z}{dt^2} &= \mu Z - \frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z} \,.
\end{aligned} \tag{8}$$

Setzt man die hierdurch gegebenen Werthe von $\mu \frac{d^2 y}{dt^2}$ und $\mu \frac{d^2 z}{dt^2}$ in die erste der Gleichungen 2), benutzt, dass in Folge von 6)

$$\begin{aligned}
-\int z \frac{\partial Y_x}{\partial x} d\tau &= \int z Y_x \cos(nx)\, ds \\
-\int z \frac{\partial Y_y}{\partial y} d\tau &= \int z Y_y \cos(ny)\, ds \\
-\int z \frac{\partial Y_z}{\partial z} d\tau &= \int z Y_z \cos(nz)\, ds + \int Y_z\, d\tau \\
-\int y \frac{\partial Z_x}{\partial x} d\tau &= \int y Z_x \cos(nx)\, ds \\
-\int y \frac{\partial Z_y}{\partial y} d\tau &= \int y Z_y \cos(ny)\, ds + \int Z_y\, d\tau \\
-\int y \frac{\partial Z_z}{\partial z} d\tau &= \int y Z_z \cos(nz)\, ds
\end{aligned}$$

ist, und berücksichtigt die beiden letzten der Gleichungen 7), so erhält man

$$\int (Y_z - Z_y)\, d\tau = 0.$$

Hieraus folgt

$$Y_z = Z_y.$$

Dieser Gleichung lassen sich zwei ähnliche hinzufügen, so dass man hat

$$Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z, \quad X_y = Y_x. \tag{9}$$

§ 3.

Der Druck, den ein Flächenelement erfährt, ist im Allgemeinen schief gegen dieses gerichtet; doch giebt es für jeden Ort drei auf einander senkrechte Flächenelemente, die *senkrechte* Drucke erleiden. Zu diesem Resultate führt die folgende Betrachtung.

Es sei n die Normale eines Flächenelementes, auf welches ein senkrechter Druck wirkt, und p die Grösse dieses Druckes; dann ist

$$X_n = p\cos(nx), \quad Y_n = p\cos(ny), \quad Z_n = p\cos(nz);$$

also nach 7)

$$
\begin{aligned}
(X_x - p)\cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz) &= 0\\
Y_x \cos(nx) + (Y_y - p)\cos(ny) + Y_z \cos(nz) &= 0\\
Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + (Z_z - p)\cos(nz) &= 0.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit

$$\cos^2(nx) + \cos^2(ny) + \cos^2(nz) = 1$$

bestimmen die 4 Unbekannten p, $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$. Sie sind wegen der Relationen 9) dieselben wie diejenigen, auf welche man geführt wird, wenn man Länge und Richtung einer Halbachse der Fläche zweiten Grades sucht, deren Gleichung

$$X_x\xi^2 + Y_y\eta^2 + Z_z\zeta^2 + 2Y_z\eta\zeta + 2Z_x\zeta\xi + 2X_y\xi\eta = 1 \tag{11}$$

ist, wenn ξ, η, ζ die Coordinaten eines Punktes bedeuten. Bezeichnet man nämlich durch ϱ die Länge des radius vector, der mit den Coordinatenachsen Winkel bildet, deren Cosinus α, β, γ sind, so dass

$$\xi = \varrho\alpha, \quad \eta = \varrho\beta, \quad \zeta = \varrho\gamma$$

ist, so wird die Gleichung 11)

$$\frac{1}{\varrho^2} = X_x\alpha^2 + Y_y\beta^2 + Z_z\gamma^2 + 2Y_z\beta\gamma + 2Z_x\gamma\alpha + 2X_y\alpha\beta. \tag{12}$$

Man findet die Halbachsen der Fläche, indem man die Maxima und Minima des Ausdrucks von $\frac{1}{\varrho^2}$ unter der Bedingung

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1 = 0$$

sucht. Hierzu dienen die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
(X_x - \lambda)\alpha + X_y\beta + X_z\gamma &= 0\\
Y_x\alpha + (Y_y - \lambda)\beta + Y_z\gamma &= 0\\
Z_x\alpha + Z_y\beta + (Z_z - \lambda)\gamma &= 0,
\end{aligned} \tag{13}
$$

die für λ die cubische Gleichung

$$
\begin{vmatrix}
X_x - \lambda, & X_y, & X_z\\
Y_x, & Y_y - \lambda, & Y_z\\
Z_x, & Z_y, & Z_z - \lambda
\end{vmatrix} = 0
$$

ergeben. Die 3 Wurzeln derselben entsprechen den 3 Halbachsen und sind den reciproken Quadraten dieser gleich, wie man sieht, wenn man die Gleichungen 13) mit α, β, γ multiplicirt, addirt und das Resultat mit 12) vergleicht. Die Gleichungen 10) werden aber identisch mit den Gleichungen 13), wenn man

$$p = \lambda, \quad \cos(nx) = \alpha, \quad \cos(ny) = \beta, \quad \cos(nz) = \gamma$$

setzt. Daraus folgt, dass die Hauptachsen der Fläche 11) die Normalen von Flächenelementen sind, die senkrechte Drucke erleiden. Die Grössen dieser Drucke sind den reciproken Quadraten der Halbachsen dieser Fläche gleich. Man nennt sie die *Hauptdrucke*; ihre Richtungen die *Hauptdruckachsen*.

Bezeichnet man die Hauptdrucke durch p_1, p_2, p_3 und die Cosinus der Winkel, welche die Hauptdruckachsen mit den Coordinatenachsen bilden, durch α, β, γ mit den Indices 1, 2, 3, so ist, wie aus den Gleichungen 13) in Verbindung mit den Relationen folgt, welche aussprechen, dass die Hauptachsen einer Fläche zweiten Grades senkrecht auf einander stehen,

$$\begin{aligned} X_x &= p_1\alpha_1^2 + p_2\alpha_2^2 + p_3\alpha_3^2 \\ Y_y &= p_1\beta_1^2 + p_2\beta_2^2 + p_3\beta_3^2 \\ Z_z &= p_1\gamma_1^2 + p_2\gamma_2^2 + p_3\gamma_3^2 \\ Y_z = Z_y &= p_1\beta_1\gamma_1 + p_2\beta_2\gamma_2 + p_3\beta_3\gamma_3 \\ Z_x = X_z &= p_1\gamma_1\alpha_1 + p_2\gamma_2\alpha_2 + p_3\gamma_3\alpha_3 \\ X_y = Y_x &= p_1\alpha_1\beta_1 + p_2\alpha_2\beta_2 + p_3\alpha_3\beta_3. \end{aligned} \qquad 14)$$

§ 4.

An der Berührungsfläche zweier Körper können die Druckcomponenten X_x, X_y . . Sprünge erleiden; bedeutet n eine Normale der Berührungsfläche, so sind aber X_n, Y_n, Z_n stetig, vorausgesetzt, dass auf die Theile der Körper an der Berührungsfläche nicht unendlich grosse Kräfte wirken. Um diese Behauptung zu beweisen, betrachten wir einen beliebigen, endlichen Theil der Berührungsfläche, denken uns in allen Punkten dieses die Normalen nach beiden Seiten hin gezogen und auf ihnen Strecken von der unendlich kleinen Länge ε abgetragen. Auf den Raum, den diese Strecken erfüllen, wenden wir die Gleichungen 1) an. Die hier vorkommenden, nach $d\tau$ zu nehmenden Integrale sind unendlich klein von der Ordnung von ε; die nach ds zu nehmenden Integrale müssen von derselben Ordnung unendlich klein sein; hierzu ist erforderlich, dass die Werthe von X_n, Y_n, Z_n auf beiden Seiten der Berührungsfläche keine endlichen Unterschiede haben. Bei diesem Schlusse ist zu beachten, dass, während in den Gleichungen 1) unter n die nach dem Innern des betrachteten Raumes gerichtete Nornale von ds verstanden wurde, wir hier n als eine der beiden Normalen eines Elementes der Berührungsfläche definirt haben; die Folge davon ist, dass n auf der einen Seite der Berührungsfläche hier und dort dieselbe Bedeutung hat, auf der andern aber entgegengesetzte Richtungen bezeichnet.

§ 5.

Als wir in der zweiten Vorlesung die Lagrange'schen Differentialgleichungen der Bewegung für ein System discreter materieller Punkte aufgestellt hatten, leiteten wir in der dritten aus diesen das d'Alembert'sche Princip und hieraus das Hamilton'sche ab. Mit den

Differentialgleichungen, die wir nun für die Bewegung eines Körpers angegeben haben, wollen wir Operationen vornehmen, welche denen entsprechen, die uns dort zu dem Hamilton'schen Principe geführt haben. Wir bezeichnen, wie bisher, durch x, y, z die Coordinaten eines gewissen materiellen Punktes des Körpers zur Zeit t und nennen δx, δy, δz die Componenten einer unendlich kleinen, virtuellen Verrückung dieses Punktes. Virtuelle Verrückungen sind hier ganz beliebige, die nur stetig mit dem Orte sich ändern müssen. Wir multipliciren die Gleichungen 8) mit δx, δy, δz, addiren sie, multipliciren dann mit dem Element des Raumes, den der Körper zur Zeit t einnimmt, $d\tau$, und integriren über diesen Raum. Wir beziehen dabei $d\tau$ auf einen gewissen Complex von materiellen Punkten, dessen Masse wir dm nennen, so dass

$$\mu\, d\tau = dm \tag{15}$$

ist. Wir benutzen, dass

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}\,\delta x = \frac{\partial (X_x \delta x)}{\partial x} - X_x \frac{\partial \delta x}{\partial x},$$

und transformiren in entsprechender Weise die 8 ähnlichen Glieder. Es tritt dann bei Benutzung der Gleichungen 6) und 7) die Summe

$$\int dm\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) + \int ds\,(X_n \delta x + Y_n \delta y + Z_n \delta z) \tag{16}$$

auf, wo ds ein Element der Oberfläche des Körpers bedeutet; diese Summe ist die Arbeit, welche die Kräfte und Druckkräfte, die auf die Theile und die Oberfläche des Körpers wirken, bei der gedachten Verrückung leisten; wir bezeichnen sie durch U'. Man erhält dann bei Rücksicht auf die Gleichungen 9)

$$0 = \int dm \left(\frac{d^2 x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2 y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2 z}{dt^2}\,\delta z \right) - U' - F', \tag{17}$$

wenn

$$\begin{aligned} F' = \int d\tau\, \Big\{ & X_x \frac{\partial \delta x}{\partial x} + Y_y \frac{\partial \delta y}{\partial y} + Z_z \frac{\partial \delta z}{\partial z} \\ & + Y_z \left(\frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y} \right) + Z_x \left(\frac{\partial \delta z}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial z} \right) + X_y \left(\frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right) \Big\} \end{aligned} \tag{18}$$

gesetzt wird.

Die Gleichung 17) spricht das d'Alembert'sche Princip für unseren Körper aus. Für den Fall des Gleichgewichts giebt sie die Bedingung

$$0 = U' + F', \tag{19}$$

die das Princip der virtuellen Verrückungen ausdrückt.

Bei dieser Rechnung ist die Voraussetzung wesentlich, dass in dem betrachteten Körper die Druckcomponenten X_x, Y_y, . . und die Verrückungen δx, δy, δz sich überall stetig mit dem Orte ändern,

weil ohne dieselbe die Anwendung der Gleichungen 6) nicht gerechtfertigt ist. Denken wir uns nun ein System von Körpern, von denen für jeden einzelnen diese Voraussetzung erfüllt ist; an der Berührungsfläche je zweier sollen aber jene Druckcomponenten und Verrückungen Sprünge erfahren können, wie sie in § 4 dieser Vorlesung und in § 6 der vorigen betrachtet sind. Das Eigenthümliche dieser Sprünge ist, dass X_n, Y_n, Z_n, wenn n für jeden der beiden Körper die nach seinem Innern gerichtete Normale bedeutet, für beide entgegengesetzte Werthe haben, und dass die Componenten der Verrückungen (δx, δy, δz) nach der einen Normale einander gleich sind. Wir denken uns die Gleichung 17), nachdem für U' und F' aus 16) und 18) ihre Werthe substituirt sind, für jeden der Körper gebildet und dann von ihr die Summe in Bezug auf alle Körper genommen. Die Summe entsprechender Integrale, unter deren Zeichen dm oder $d\tau$ vorkommt, lässt sich darstellen als *ein* Integral, das über die Masse oder das Volumen des ganzen Systemes auszudehnen ist. Die Summe der Integrale, unter deren Zeichen ds steht, setzt sich zusammen aus einem Integral (von derselben Form), welches über die Oberfläche des ganzen Systemes auszudehnen ist, und Integralen, welche sich auf die Berührungsflächen je zweier Körper beziehen. Jedes Element ds einer solchen kommt in dem entsprechenden Integrale zweimal vor, da es zur Oberfläche zweier Körper gehört. Betrachtet man nur solche Verrückungen δx, δy, δz, die auch in den Berührungsflächen der Körper keine Sprünge erleiden, so hat der Factor von ds

$$X_n \delta x + Y_n \delta y + Z_n \delta z \tag{20}$$

diese beiden Male entgegengesetzte Werthe; es verschwinden in Folge davon die auf die Berührungsflächen bezüglichen Integrale, und es gilt die Gleichung 17), mithin auch die Gleichung 19) bei den in 16) und 18) angegebenen Werthen von U' und F' auch für ein System von Körpern, an deren Berührungsflächen die Druckcomponenten Sprünge erleiden. Das findet im Allgemeinen nicht statt für Verrückungen, deren Stetigkeit in diesen Flächen unterbrochen ist; es findet aber auch für diese in einem Falle statt, den wir ausführlich werden zu erörtern haben, in dem Falle nämlich, dass der Druck, dessen Componenten X_n, Y_n, Z_n sind, immer ein senkrechter ist. In diesem Falle hat nämlich der Ausdruck 20) in den beiden Bedeutungen, in denen er auftritt, auch entgegengesetzte Werthe, da er gleich ist dem Product aus der Grösse der Resultante der Druckcomponenten X_n, Y_n, Z_n in die Componente der Verrückung (δx, δy, δz) nach der einen oder andern der beiden Normalen von ds, und diese Componenten entgegengesetzte Werthe haben müssen.

Multipliciren wir die Gleichung 17) mit dt und integriren sie über einen beliebigen Zeitraum, so erhalten wir durch Schlüsse und

bei einer Bezeichnungsweise, wie wir sie bei Betrachtung eines Systemes von discreten materiellen Punkten benutzt haben,

$$\left[\int dm\left(\frac{dx}{dt}\,\delta x+\frac{dy}{dt}\,\delta y+\frac{dz}{dt}\,\delta z\right)\right]_{t_0}^{t_1}=\int_{t_0}^{t_1} dt\,(\delta T+U'+F'), \quad 21)$$

wo T die lebendige Kraft bezeichnet, d. h. wo

$$T=\tfrac{1}{2}\int dm\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)$$

ist.

Setzen wir über die Variationen δx, δy, δz noch voraus, dass sie alle für $t=t_0$ und $t=t_1$ verschwinden, so wird die Gleichung 21)

$$0=\int_{t_0}^{t_1} dt\,(\delta T+U'+F'). \quad 22)$$

Hierdurch ist das Hamilton'sche Princip für die jetzt betrachteten Fälle ausgesprochen.

Wir sehen, dass, wenn man das d'Alembert'sche Princip, das Princip der virtuellen Verrückungen oder das Hamilton'sche Princip auf Körper anwenden will, deren Theile relative Verschiebungen erfahren, man zu der Arbeit U' der Kräfte X, Y, Z und der Druckkräfte, welche auf die Oberfläche wirken, die durch die Gleichung 18) definirte Grösse F' hinzufügen muss. Es kann diese auch als die Arbeit gewisser Kräfte für die gedachte Verrückung angesehen werden; man nennt bisweilen diese Kräfte *innere*, und im Gegensatze dazu die Kräfte, deren Arbeit durch U' bezeichnet ist, *äussere*.

§ 6.

Die Erfahrung hat gelehrt, dass man, um zu einer einfachen Beschreibung der Bewegung der Körper zu gelangen, annehmen darf, dass die Druckcomponenten X_x, X_y, . . für jeden unendlich kleinen Theil eines Körpers nur abhängig sind von dem Zustande und der Zustandsänderung *dieses* Theiles. Die Ausdrücke, die man für die Druckcomponenten aufstellen darf, sind verschieden für die verschiedenen Klassen der Körper. Fassen wir zuerst die *Flüssigkeiten* ins Auge. Wenn man absieht von den Erscheinungen, welche man als eine Folge der *Reibung* bezeichnet, so kann man hier setzen

$$Y_z=Z_x=X_y=0$$
$$X_x=Y_y=Z_z.$$

Den gemeinsamen Werth von X_x, Y_y, Z_z bezeichnen wir durch p und nennen ihn schlechthin den *Druck* in dem betrachteten Punkte zur Zeit t. Die Gleichungen 7) zeigen, dass ein Flächenelement von

beliebiger Richtung denselben senkrechten Druck p erleidet. Dieser Fall ist derjenige, auf welchen bei der Discussion des Ausdrucks 20) hingewiesen wurde. Die Gleichungen 8) werden

$$\begin{aligned} \mu \frac{d^2 x}{dt^2} &= \mu X - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \mu \frac{d^2 y}{dt_2} &= \mu Y - \frac{\partial p}{\partial y} \\ \mu \frac{d^2 z}{dt^2} &= \mu Z - \frac{\partial p}{\partial z}\,. \end{aligned} \tag{23}$$

Diesen 3 Gleichungen zwischen den 5 Unbekannten x, y, z, μ, p ist als vierte eine Relation zwischen dem Drucke p und der Dichtigkeit μ, die durch die Natur der Flüssigkeit bedingt ist, hinzuzufügen und als fünfte eine, die die folgende Betrachtung ergiebt. Ist $d\tau$ das Volumen eines gewissen Complexes von materiellen Punkten zur Zeit t, so ist $\mu\, d\tau$ die Masse dieses Complexes (wie schon in 15) ausgesprochen ist), also unabhängig von der Zeit. Bezeichnet man die Aenderungen, die μ und $d\tau$ in dem Zeitelement dt erfahren, durch ein vorgesetztes d, so ist hiernach

$$\frac{d\mu}{\mu} + \frac{d\,d\tau}{d\tau} = 0.$$

Das zweite Glied auf der linken Seite dieser Gleichung ist aber die räumliche Dilatation, die in der Zeit dt vor sich geht, also nach 29) der vorigen Vorlesung

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dt,$$

wenn u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit zur Zeit t im Punkte x, y, z bedeuten, d. h.

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt}$$

ist. Daraus folgt

$$\frac{d\mu}{dt} + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0. \tag{24}$$

Für die durch 18) bestimmte Grösse F' erhält man

$$F' = \int d\tau\, p \left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\right). \tag{25}$$

Durch eine Betrachtung, die derjenigen ganz ähnlich ist, durch die wir die Gleichung 24) abgeleitet haben, findet man aber

$$\frac{\delta \mu}{\mu} + \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} = 0;$$

man hat daher auch

$$F' = -\int d\tau\, p \frac{\delta \mu}{\mu} = -\int dm\, p\, \frac{\delta \mu}{\mu^2}\,.$$

Denkt man sich mit Hülfe der zwischen p und μ bestehenden Relation

$$f = \int p \frac{d\mu}{\mu^2}$$

gebildet, wobei der unteren Grenze des Integrals irgend ein fester Werth gegeben sein möge, so hat man

$$\delta f = p \frac{\delta \mu}{\mu^2},$$

mithin

$$F' = -\delta \int f \, dm.$$

Da F' die Arbeit der inneren Kräfte bedeutet, so ist hieraus zu schliessen, dass für unsere Flüssigkeit die inneren Kräfte ein Potential haben, das

$$= -\int f \, dm$$

ist.

In vielen Fällen sind die Aenderungen der Dichtigkeit so unbedeutend, dass man sie vernachlässigen, die Flüssigkeit als *incompressibel* betrachten darf. In den Gleichungen 23) ist dann μ eine Constante und die Gleichung 24) wird

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \qquad 26)$$

Nach dem in 25) für F' gegebenen Ausdrucke ist $F' = 0$, wenn

$$\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} = 0$$

ist, d. h. wenn die Variation der Dichtigkeit $= 0$ ist. Versteht man unter virtuellen Verrückungen bei einer incompressiblen Flüssigkeit nur solche, die die Dichtigkeit nicht ändern, so ist also für eine incompressible Flüssigkeit für alle virtuellen Verrückungen $F' = 0$, und es gilt das d'Alembert'sche Princip, das Princip der virtuellen Verrückungen und das Hamilton'sche Princip in derselben Form, wie für ein System discreter materieller Punkte.

§ 7.

Wir betrachten nun einen elastischen festen Körper, indessen allein unter der Voraussetzung, dass alle Punkte desselben nur unendlich kleine Verrückungen aus Lagen erhalten, bei denen die sämmtlichen Druckcomponenten gleich Null sind. Wir wollen zunächst ferner voraussetzen, dass der Körper, wie man sagt, sich nach verschiedenen Richtungen gleich verhält, oder *isotrop* ist. Für einen solchen Körper nimmt man an, dass die Hauptdrucke dieselben Richtungen haben, wie die Hauptdilatationen, und lineare, homogene

Functionen dieser sind. Wir bezeichnen die Hauptdrucke durch p_1, p_2, p_3, die entsprechenden Hauptdilatationen durch λ_1, λ_2, λ_3 und setzen

$$\begin{aligned} p_1 &= -2K(\lambda_1 + \theta[\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3]) \\ p_2 &= -2K(\lambda_2 + \theta[\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3]) \\ p_3 &= -2K(\lambda_3 + \theta[\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3]), \end{aligned} \tag{27}$$

indem wir unter K und θ zwei von der Natur des Körpers abhängige Constanten verstehen. Diese Gleichungen sind so gebildet, dass sie in einander übergehen, wenn man die Indices 1, 2, 3 irgendwie mit einander vertauscht. Sind α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3 die Cosinus der Winkel, welche die Richtungen der Hauptdrucke und Hauptdilatationen mit den Coordinatenachsen bilden, so gelten die Gleichungen 14), und es gelten auch die Gleichungen 21) der vorigen Vorlesung, wenn man hier für a_{11}, a_{12}, . . gewisse Werthe setzt. Diese Werthe sind mit Hülfe der Gleichungen 26) der vorigen Vorlesung zu bilden. Die dort gebrauchten Bezeichnungen wollen wir ändern; es sollen x, y, z die Coordinaten eines materiellen Punktes des Körpers bei dem, von uns vorausgesetzten, Zustande desselben sein, bei dem die sämmtlichen Druckcomponenten gleich Null sind, $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ die Coordinaten desselben materiellen Punktes zur Zeit t, also ξ, η, ζ die, als unendlich klein angenommenen Verrückungen des Punktes zur Zeit t. Die genannten Gleichungen ergeben dann:

$$\begin{aligned} a_{11} - 1 &= \frac{\partial \xi}{\partial x}, & a_{12} &= \frac{\partial \xi}{\partial y}, & a_{13} &= \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ a_{21} &= \frac{\partial \eta}{\partial x}, & a_{22} - 1 &= \frac{\partial \eta}{\partial y}, & a_{23} &= \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ a_{31} &= \frac{\partial \zeta}{\partial x}, & a_{32} &= \frac{\partial \zeta}{\partial y}, & a_{33} - 1 &= \frac{\partial \zeta}{\partial z}. \end{aligned} \tag{27a}$$

Verbindet man die Gleichungen, in welche hierdurch die Gleichungen 21) der vorigen Vorlesung übergehen, mit den Gleichungen 14) und 27) der jetzigen, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} X_x &= -2K\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \theta\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)\right) \\ Y_y &= -2K\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \theta\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)\right) \\ Z_z &= -2K\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \theta\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)\right) \\ Y_z &= -K\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) \\ Z_x &= -K\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) \\ X_y &= -K\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right). \end{aligned} \tag{28}$$

Wie aus der Ableitung dieser Gleichungen hervorgeht, gelten sie ungeändert für jedes Coordinatensystem.

Die Gleichungen 8) werden bei der veränderten Bezeichnung

$$\begin{aligned}
\mu \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= \mu X - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z} \\
\mu \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= \mu Y - \frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\
\mu \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= \mu Z - \frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z}.
\end{aligned} \qquad 29)$$

Hätten wir die Annahme nicht gemacht, dass ξ, η, ζ unendlich klein seien, (die erfordert, dass auch X, Y, Z es sind,) so hätte man auf den rechten Seiten dieser Gleichungen überall für x, y, z gesetzt zu denken $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$; die erwähnte Annahme macht das unnöthig; sie berechtigt auch dazu, μ in diesen Gleichungen als constant zu betrachten.

Berechnen wir noch die durch die Gleichung 18) definirte Grösse F'. Setzen wir der Kürze wegen

$$\begin{aligned}
x_x &= \frac{\partial \xi}{\partial x}, & y_z &= z_y = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\
y_y &= \frac{\partial \eta}{\partial y}, & z_x &= x_z = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \\
z_z &= \frac{\partial \zeta}{\partial z}, & x_y &= y_x = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x},
\end{aligned}$$

so wird diese Gleichung

$$F' = \int d\tau \left\{ X_x \delta x_x + Y_y \delta y_y + Z_z \delta z_z + Y_z \delta y_z + Z_x \delta z_x + X_y \delta x_y \right\}.$$

Macht man

$$f = -K\left(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \tfrac{1}{2} y_z^2 + \tfrac{1}{2} z_x^2 + \tfrac{1}{2} x_y^2 + \theta [x_x + y_y + z_z]^2\right), \qquad 30)$$

oder, was dasselbe ist,

$$f = -K\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \theta [\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3]^2\right),$$

so findet man

$$\begin{aligned}
X_x &= \frac{\partial f}{\partial x_x}, & Y_z &= \frac{\partial f}{\partial y_z} \\
Y_y &= \frac{\partial f}{\partial y_y}, & Z_x &= \frac{\partial f}{\partial z_x} \\
Z_z &= \frac{\partial f}{\partial z_z}, & X_y &= \frac{\partial f}{\partial x_y}.
\end{aligned} \qquad 31)$$

Hieraus folgt

$$F' = \int d\tau \, \delta f,$$

oder, da bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung $d\tau$ als unveränderlich anzusehen ist,

$$F' = \delta \int f\, d\tau .$$

Es folgt daraus, dass auch hier die inneren Kräfte ein Potential haben, nämlich das Potential $\int f\, d\tau$.

Dasselbe gilt auch für Körper, welche nicht isotrop sind, z. B. für Krystalle; auch für solche bestehen die Gleichungen 31), in denen f eine homogene Function zweiten Grades der 6 Argumente $x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y$ bezeichnet, die aber eine andere Form, als der in 30) angegebene Ausdruck besitzt.

§ 8.

Wir kehren nun noch einmal zur Betrachtung einer Flüssigkeit zurück und stellen die Ausdrücke der Druckcomponenten X_x, Y_y, . . für den Fall auf, dass die *Reibung* der Flüssigkeit berücksichtigt werden soll. Bezeichnen wir durch u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit im Punkte (x, y, z) zur Zeit t, so hängen nach den in der vorigen Vorlesung gemachten Auseinandersetzungen die relativen Bewegungen innerhalb eines unendlich kleinen Theiles der Flüssigkeit zur Zeit t von den 6 Grössen

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{32}$$

ab; es findet hier keine relative Bewegung, sondern nur eine Verschiebung und eine Drehung des Theiles statt, wenn diese verschwinden. Wir nehmen an, dass dann auch keine Reibung vorhanden ist, dass dann also die Grössen

$$X_x - p, \quad Y_y - p, \quad Z_z - p, \quad Y_z, \; Z_x, \; X_y \tag{33}$$

bei passender Bestimmung von p verschwinden, die Grössen, von denen wir in § 6 bei Vernachlässigung der Reibung angenommen haben, dass sie immer $= 0$ sind. Wir nehmen weiter an, dass die Grössen 33) lineare Functionen der Grössen 32) sind, und setzen

$$\begin{aligned}
X_x &= p - 2k\,\frac{\partial u}{\partial x}, & Y_z &= -\,k\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\\
Y_y &= p - 2k\,\frac{\partial v}{\partial y}, & Z_x &= -\,k\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\\
Z_z &= p - 2k\,\frac{\partial w}{\partial z}, & X_y &= -\,k\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),
\end{aligned}$$

wo k eine Constante der Flüssigkeit bedeutet. Diese Gleichungen haben, wie die ähnlich gebildeten Gleichungen 28), die Eigenschaft,

unverändert zu gelten, wenn das Coordinatensystem beliebig verlegt wird.

Die 3 Gleichungen, die man erhält, wenn man diese Werthe der Druckcomponenten in 8) substituirt, enthalten, wenn die Flüssigkeit als incompressibel anzusehen ist, (und auf die Betrachtung dieses Falles beschränken wir uns,) 4 unbekannte Functionen, nämlich x, y, z, p, da u, v, w die Differentialquotienten von x, y, z nach t sind. Ihnen hinzuzufügen ist die Bedingung der Incompressibilität

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Die Ausdrücke, die wir in den 3 letzten Paragraphen für die Druckcomponenten aufgestellt haben, sind anzusehen als willkürliche Annahmen. Sie konnten gemacht werden, weil bei irgend welcher Annahme über die Druckcomponenten eine jede Bewegung eines Körpers durch die Gleichungen 8) dargestellt wird, falls die Kräfte X, Y, Z passend gewählt werden. Die gemachten Annahmen zeichnen sich dadurch aus, dass bei ihnen die wirklichen Bewegungen der Körper, wenn auch nicht genau, so doch mit einem hohen Grade der Annäherung, durch sehr einfache Werthe dieser Kräfte sich ergeben.

Der Gegenstand der folgenden Vorlesungen wird es sein, die aufgestellten Gleichungen unter den einfachsten Annahmen über die genannten Kräfte zu verfolgen; wir werden dadurch zu Erscheinungen kommen, welche mit der Wirklichkeit in naher Uebereinstimmung sind.

Zwölfte Vorlesung.

(Hydrostatik. Gleichgewicht einer Flüssigkeit ist nur bei Kräften möglich, die ein einwerthiges Potential haben. Die freie Oberfläche ist eine Fläche gleichen Potentials. Schwere Flüssigkeit. Schwere rotirende Flüssigkeit. Rotirende Flüssigkeit, deren Theile von einem Punkte oder von einander nach dem Newton'schen Gesetze angezogen werden. Abplattung der Erde. Druckkräfte, welche eine Flüssigkeit auf ein Gefäss, in dem sie enthalten ist, oder auf einen eingetauchten Körper ausübt. Archimedisches Princip.)

§ 1.

Wir gehen jetzt näher auf die Mechanik der Flüssigkeiten ein, zunächst auf die *Hydrostatik*, d. i. die Lehre vom Gleichgewichte der Flüssigkeiten. Für das Gleichgewicht einer Flüssigkeit erhält man aus den Gleichungen 23) der vorigen Vorlesung, die sich auf die Bewegung einer solchen beziehen,

$$X = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$$
$$Y = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad 1)$$
$$Z = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z},$$

wo p den Druck, μ die Dichtigkeit, X, Y, Z die Componenten der auf die Masseneinheit bezogenen Kraft im Punkte (x, y, z) bedeuten; hierzu ist eine Relation zwischen p und μ zu fügen, die die eine dieser Grössen als Function der anderen auszudrücken erlaubt. Denkt man sich in den Gleichungen 1) μ als Function von p ausgedrückt, so stellen dieselben X, Y, Z als die partiellen Differentialquotienten nach x, y, z *einer* Function dar; in der That geben sie

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

wenn

$$U = \int \frac{dp}{\mu} \qquad 2)$$

gesetzt wird. Hierdurch ist ausgesprochen, dass die Kräfte X, Y, Z ein *Potential* haben; nur unter der Bedingung, dass das der Fall ist, ist ein Gleichgewicht möglich. Es ist hierzu ferner erforderlich, dass das Potential U eine *einwerthige* Function der Coordinaten x, y, z

innerhalb des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes ist; denn die Gleichung 2), in der μ eine einwerthige Function von p bedeutet, stellt auch U als eine einwerthige Function von p dar, und p hat in jedem Punkte des genannten Raumes *einen* Werth. Ist U gegeben, so lehrt die Gleichung 2) den Druck als Function von U kennen, indessen nur bis auf eine Constante, die unbekannt bleibt. In jeder Fläche gleichen Potentials ist hiernach der Druck derselbe. Ist die Flüssigkeit als incompressibel zu betrachten, also μ als constant, so giebt die Gleichung 2)

$$p = p_0 + \mu U,$$

wo p_0 die unbekannte Constante bedeutet. Bei einem Gase ist näherungsweise, dem Mariotte'schen Gesetze zufolge,

$$p = c\mu,$$

wenn c eine Constante bezeichnet; hieraus findet man

$$\lg \frac{p}{p_0} = \frac{1}{c} U.$$

Berühren sich in einer Fläche zwei verschiedenartige Flüssigkeiten, so muss, nach den in § 4 der eilften Vorlesung gemachten Auseinandersetzungen, für jeden Punkt dieser Fläche in beiden Flüssigkeiten p denselben Werth haben. Wir wollen annehmen, dass das Potential U für beide dasselbe, die Dichtigkeit, die demselben Drucke entspricht, aber verschieden ist; μ_1 sei die Dichtigkeit der einen, μ_2 die der andern. Nennen wir dp und dU die Aenderungen, die p und U erfahren, wenn man von einem Punkte der Berührungsfläche zu einem unendlich nahen Punkte dieser Fläche übergeht, so haben wir nach 2)

$$\mu_1 dU = dp \quad \text{und} \quad \mu_2 dU = dp;$$

diese Gleichungen ergeben

$$dp = 0 \quad \text{und} \quad dU = 0;$$

d. h. die Berührungsfläche ist eine Fläche gleichen Druckes und gleichen Potentials; sie steht deshalb auch senkrecht auf der Richtung der Kraft in jedem ihrer Punkte.

Grenzt eine Flüssigkeit an einen leeren Raum, so geschieht das auch in einer Fläche gleichen Druckes; wir werden annehmen, dass hier der Druck $= 0$ ist.

§ 2.

Ist die Schwere die einzige wirkende Kraft und ist der Radius der Erde als unendlich gross zu betrachten, so ist die Trennungsfläche zweier heterogener Flüssigkeiten, oder die Oberfläche, welche eine Flüssigkeit von dem leeren Raume abgrenzt, eine horizontale Ebene.

Wir wollen nun die Oberfläche einer Flüssigkeit in einigen complicirteren Fällen berechnen. Wir stellen uns zunächst eine schwere Flüssigkeit in einem Gefässe vor und nehmen an, dass dieses System um eine verticale Achse mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit so rotirt, dass die relative Lage der Theile ungeändert bleibt. Wir können diesen Fall hier behandeln, da wir, nach den in § 1 der neunten Vorlesung gemachten Auseinandersetzungen, von der Rotation absehen dürfen, falls wir die ihr entsprechende Centrifugalkraft den wirkenden Kräften hinzuzählen. Die z-Achse unseres Coordinatensystemes legen wir in die Rotationsachse und nehmen sie nach unten gekehrt an; die Schwere nennen wir g, und w die Winkelgeschwindigkeit, so dass, wenn T die Dauer einer Umdrehung bedeutet,

$$w = \frac{2\pi}{T}$$

ist; das Potential der Schwere können wir dann $= gz$, das der Centrifugalkraft $= \frac{w^2}{2}(x^2 + y^2)$ setzen; daraus folgt

$$U = gz + \frac{w^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Setzt man diesen Ausdruck von U einer Constanten gleich, so erhält man die Gleichung der Oberfläche der Flüssigkeit; diese ist also ein Rotationsparaboloid, dessen Achse die z-Achse ist.

In ähnlicher Weise lässt der folgende Fall sich behandeln. Eine flüssige Masse, deren Theile von dem Anfangspunkte der Coordinaten nach dem Newton'schen Gesetze angezogen werden, rotirt mit der constanten Winkelgeschwindigkeit w um die z-Achse; welches ist ihre Gleichgewichtsgestalt? Nennen wir G die Grösse der Anziehung, welche die Masseneinheit in der Entfernung R vom Anfangspunkte der Coordinaten erfährt, und r die Entfernung eines variabeln Punktes der Flüssigkeit von diesem Punkte; wir haben dann hier

$$U = \frac{GR^2}{r} + \frac{w^2}{2}(x^2 + y^2);$$

dieser Ausdruck einer Constanten gleich gesetzt giebt die Gleichung der gesuchten Oberfläche. Wir transformiren dieselbe, indem wir

$$z = r \sin \varphi$$

machen und R so gewählt annehmen, dass in der Oberfläche $r = R$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist. Diese Annahme bestimmt die Constante, die in der Gleichung der Oberfläche unbestimmt geblieben war, und giebt

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \frac{w^2 r^2}{2GR^2} \cos^2 \varphi.$$

Wir wollen voraussetzen, dass die Winkelgeschwindigkeit w so klein

ist, dass das zweite Glied der rechten Seite dieser Gleichung als unendlich klein gegen das erste angesehen werden kann, und wollen nur die unendlich kleinen Grössen niedrigster Ordnung berücksichtigen. Die gefundene Gleichung lässt sich dann schreiben

$$r = R\left(1 + \frac{w^2 R}{2G} \cos^2 \varphi\right).$$

Sie stellt ein an den Polen abgeplattetes Sphäroid dar; das, was man die *Abplattung* desselben nennt, ist der Bruch $\frac{w^2 R}{2G}$; es ist das der Unterschied des Polar- und des Aequatorialdurchmessers, dividirt durch den einen von diesen. Die *Erde* ist auch ein wenig abgeplattetes Sphäroid; setzen wir bei unserer Flüssigkeit R = dem Polarhalbmesser und G = der Schwere am Pole der Erde; nach einer am Ende des § 1 der neunten Vorlesung durchgeführten Rechnung ergiebt sich dann die Abplattung des flüssigen Sphäroids $= \frac{1}{582}$; die Abplattung der Erde ist durch die Gradmessungen fast doppelt so gross gefunden. Die Theile der Erde werden aber auch nicht nach dem Newton'schen Gesetze vom Erdmittelpunkte angezogen, sondern ziehen einander nach diesem Gesetze an.

Um den Verhältnissen näher zu kommen, die bei der Erde stattfinden, wollen wir die Gleichgewichtsfigur einer flüssigen Masse berechnen, die um die z-Achse unseres Coordinatensystemes mit der Winkelgeschwindigkeit w rotirt, und deren Theile gegen einander gravitiren. Diese Aufgabe können wir aber nur lösen unter der Voraussetzung, dass die Flüssigkeit incompressibel und homogen ist, und auch dann nicht vollständig. Wenn w zwischen gewissen Grenzen liegt, so ist, wie die Rechnung zeigt, ein *Ellipsoid* eine Gleichgewichtsfigur der Flüssigkeit; indem man von der Annahme ausgeht, dass die Flüssigkeit ein Ellipsoid bildet, kann man die Achsen desselben bestimmen. Was die vorliegende Aufgabe so viel schwerer macht, als die vorher behandelten, ist, dass hier nicht, wie dort, das Potential der wirkenden Kräfte von vornherein gegeben, sondern von der zu findenden Gestalt der Flüssigkeit abhängig ist.

Wir denken uns ein Ellipsoid, dessen Oberfläche die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad 3)$$

hat, mit Masse von der Dichtigkeit 1 erfüllt; Einheit der Masse soll dabei diejenige sein, die auf eine gleiche Masse in der Einheit der Entfernung wirkend nach dem Gesetze der Gravitation die Einheit der Kraft ausübt. Das Potential dieses Ellipsoids in Bezug auf den Punkt (x, y, z) nennen wir Ω, d. h. wir setzen

$$\Omega = \int \frac{d\tau}{r}$$

wo $d\tau$ ein Element des Volumens des Ellipsoids und r die Entfernung dieses von dem Punkte (x, y, z) bedeutet. Es ist dann, falls dieser Punkt im Innern oder an der Oberfläche des Ellipsoids liegt, wie wir bei einer späteren Gelegenheit (im § 1 der achtzehnten Vorlesung) nachweisen werden,

$$\Omega = \text{Const.} - \pi(Ax^2 + By^2 + Cz^2),$$

wo

$$A = abc\int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)N}, \quad B = abc\int_0^\infty \frac{du}{(b^2+u)N}, \quad C = abc\int_0^\infty \frac{du}{(c^2+u)N}, \tag{4}$$

$$N = \sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}.$$

Nun sei das durch die Gleichung 3) bestimmte Ellipsoid die Gleichgewichtsfigur unserer Flüssigkeit; dann ist

$$U = \mu\Omega + \frac{w^2}{2}(x^2 + y^2),$$

und dieses U hat denselben Werth für alle Punkte, die der Gleichung 3) entsprechen. Ist das der Fall, so muss eine Grösse M so sich bestimmen lassen, dass

$$-\mu\pi A + \frac{w^2}{2} = \frac{M}{a^2}$$

$$-\mu\pi B + \frac{w^2}{2} = \frac{M}{b^2}$$

$$-\mu\pi C \qquad = \frac{M}{c^2}$$

ist. Eliminirt man aus diesen Gleichungen M und setzt

$$v = \frac{w^2}{2\pi\mu}, \tag{5}$$

so erhält man

$$a^2(A - v) = b^2(B - v) = c^2 C. \tag{6}$$

Diese Doppelgleichung dient zur Bestimmung der Verhältnisse $a:b:c$; die Grössen A, B, C sind nämlich nur von diesen Verhältnissen abhängig, denn setzt man na, nb, nc, n^2u resp. an Stelle von a, b, c, u in den Gleichungen 4), so bleiben A, B, C ungeändert. Sind die Verhältnisse $a:b:c$ ermittelt, so findet man die Halbachsen selbst aus dem Volumen der Flüssigkeit.

Es liegt nahe anzunehmen, dass das gesuchte Ellipsoid ein Rotationsellipsoid ist, dessen Rotationsachse mit der z-Achse zusammenfällt. Bei dieser Annahme wird

$$a = b \quad \text{und} \quad A = B.$$

Dadurch verwandeln sich die beiden Gleichungen 6) in die eine

$$a^2(A - v) = c^2 C. \tag{7}$$

Da a^2, c^2, A, C und v positive Grössen sind, so erfordert dieselbe, dass $a^2 A > c^2 C$ ist, und die in 4) für A und C aufgestellten Ausdrücke zeigen, dass daher $a^2 > c^2$ sein muss; das Ellipsoid ist also ein *abgeplattetes*.

Bei einem dreiachsigen Ellipsoide sind die für A, B, C aufgestellten Integrale elliptische; in unserm Falle sind sie durch Kreisfunctionen ausdrückbar. Setzt man

$$\lambda = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{c^2}}$$

und führt an Stelle von u eine neue, positive Integrationsvariable, die x genannt werden möge, durch die Gleichung

$$u = c^2 \frac{\lambda^2 - x^2}{x^2}$$

ein, so findet man leicht

$$A = \frac{1}{\lambda^3}\Big((1 + \lambda^2) \operatorname{arc\,tg} \lambda - \lambda\Big)$$

$$C = 2\,\frac{1 + \lambda^2}{\lambda^3}\Big(\lambda - \operatorname{arc\,tg} \lambda\Big),$$

wo $\operatorname{arc\,tg} \lambda$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ zu wählen ist. Die Gleichung 7) wird hiernach

$$v = \frac{(3 + \lambda^2) \operatorname{arc\,tg} \lambda - 3\lambda}{\lambda^3}. \qquad 8)$$

Wir führen an, ohne es zu beweisen, dass diese Gleichung bei keinem positiven Werthe von v mehr als zwei reelle Wurzeln hat und dass sie zwei solche besitzt, wenn v zwischen 0 und 0,2246 liegt. In diesem Falle giebt es also zwei abgeplattete Rotationsellipsoide, welche die Gestalt der Flüssigkeit bilden können. Ist v als unendlich klein anzusehen, so sind diese leicht zu finden. Eine von den beiden reellen Wurzeln der Gleichung 8) ist dann unendlich klein, die andere unendlich gross; für jene ist

$$\operatorname{arc\,tg} \lambda = \lambda - \frac{\lambda^3}{3} + \frac{\lambda^5}{5} - \cdots$$

und daher

$$v = \tfrac{4}{15}\lambda^2 \quad \text{oder} \quad \lambda = \tfrac{1}{2}\sqrt{15\, v}, \qquad 9)$$

für diese

$$\operatorname{arc\,tg} \lambda = \frac{\pi}{2}$$

und daher

$$v = \frac{\pi}{2\lambda} \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{\pi}{2v}.$$

Nähert sich v der Null, so nähert sich das eine Rotationsellipsoid einer Kugel, das andere einer unendlichen Scheibe.

Die Gleichungen 6) erfordern nicht nothwendig, dass das Ellipsoid, für welches sie gelten sollen, ein Rotationsellipsoid ist. Wie Jacobi

zuerst bemerkt hat, giebt es, wenn v unterhalb einer gewissen Grenze liegt (und zwar unterhalb 0,1871) auch ein *dreiachsiges* Ellipsoid, welches eine Gleichgewichtsfigur der Flüssigkeit bildet. Nähert sich v der Null, so nähert sich dieses einem unendlichen, kreisförmigen Cylinder, dessen Achse senkrecht zu der Achse ist, um welche die Flüssigkeit rotirt.

Die Erde ist ein wenig abgeplattetes Rotationsellipsoid; sehen wir zu, ob ihre Abplattung sich richtig ergiebt, wenn wir unsere Flüssigkeit mit ihr identificiren. Dabei handelt es sich zunächst darum den Werth zu suchen, der der Grösse v dann zu geben ist. Dieser ist aus der Gleichung 5) zu bestimmen. Hier ist für w die Drehungsgeschwindigkeit der Erde, für μ ihre mittlere Dichtigkeit zu setzen; die letztere ist aber in *der* Einheit auszudrücken, die dadurch bestimmt ist, dass wir als Einheit der Masse diejenige Masse festgesetzt haben, die in der Einheit der Entfernung eine gleiche Masse nach dem Gesetze der Gravitation mit der Einheit der Kraft anzieht. Wir finden den Werth von μ am leichtesten, wenn wir die Schwere am Pole, die wir wieder G nennen wollen, in die Rechnung einführen. Nennen wir den Polarhalbmesser der Erde R und nehmen, was hier erlaubt ist, die Erde als kugelförmig an, so haben wir

$$G = \frac{4\pi}{3} R\mu.$$

Daraus folgt

$$v = \frac{2}{3} \frac{w^2 R}{G} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{291} = \frac{1}{436}.$$

Sehen wir diesen Bruch als unendlich klein an, so erhalten wir aus 9)

$$\lambda^2 = \frac{1}{116}.$$

Aus der Definition von λ ergiebt sich zugleich

$$a = c\left(1 + \frac{\lambda^2}{2}\right),$$

woraus folgt, dass $\frac{\lambda^2}{2}$ die Abplattung ist. Hiernach wäre die Abplattung der Erde $= \frac{1}{232}$; die Gradmessungen haben sie $=$ nahe $\frac{1}{300}$ ergeben. Den Grund dieses Mangels an Uebereinstimmung hat man darin zu suchen, dass die Erde nicht homogen ist, dass die Dichtigkeit in ihr bei der Annäherung an den Mittelpunkt zunimmt.

§ 3.

Wir wollen nun die Druckkräfte betrachten, welche eine Flüssigkeit auf einen starren Körper, mit dem sie in Berührung ist, ausübt,

und die Summen ihrer Componenten nach den Coordinatenachsen und ihre Drehungsmomente in Bezug auf diese aufsuchen.

Wir denken uns zunächst eine Flüssigkeit, die ein geschlossenes Gefäss ganz erfüllt. Um für diesen Fall die genannte Aufgabe zu lösen, gebrauchen wir die Gleichungen, durch welche wir allgemein den Begriff des Druckes definirt haben, also die Gleichungen 1) und 2) der eilften Vorlesung. Diese sagen aus, dass, wenn das Gleichgewicht besteht, die Componentensummen und Drehungsmomente der Drucke, welche das Gefäss auf die Flüssigkeit ausübt, den Componentensummen und Drehungsmomenten der Kräfte gleich und entgegengesetzt sind, die auf die Theile der Flüssigkeit wirken. Aber die Drucke, welche die Flüssigkeit auf das Gefäss ausübt, sind den Drucken gleich und entgegengesetzt, welche das Gefäss auf die Flüssigkeit ausübt; wie mit andern Worten und in grösserer Allgemeinheit im § 4 der eilften Vorlesung bemerkt ist. Daraus folgt, dass die Componentensummen und Drehungsmomente der Drucke, welche das Gefäss von der Flüssigkeit erleidet, den Componentensummen und Drehungsmomenten der Kräfte gleich sind, welche auf die Theile der Flüssigkeit wirken.

Dieser Satz gilt auch, wenn das Gefäss nicht geschlossen oder nicht ganz von der Flüssigkeit erfüllt ist, und diese eine freie Oberfläche darbietet, in der sie an den leeren Raum grenzt. Man überzeugt sich hiervon, wenn man beachtet, dass der Druck in der freien Oberfläche dann $= 0$ ist.

Stellen wir uns nun einen starren Körper vor, der in einer Flüssigkeit untergetaucht ist. Es sei ds ein Element seiner Oberfläche, n die nach seinem Innern gerichtete Normale von ds, $X_n ds$, $Y_n ds$, $Z_n ds$ die Componenten des Druckes, den die Flüssigkeit auf ds ausübt; es ist dann

$$X_n = p \cos(nx), \quad Y_n = p \cos(ny), \quad Z_n = p \cos(nz).$$

Die Componentensummen und Drehungsmomente, die wir suchen, sind daher

$$\begin{aligned} &\int p \cos(nx)\, ds \quad \text{und} \quad \int p \Big(y \cos(nz) - z \cos(ny)\Big) ds \\ &\int p \cos(ny)\, ds \qquad\quad \int p \Big(z \cos(nx) - x \cos(nz)\Big) ds \\ &\int p \cos(nz)\, ds \qquad\quad \int p \Big(x \cos(ny) - y \cos(nx)\Big) ds. \end{aligned}$$

Diese Integrale lassen sich unter einer gewissen Bedingung in solche verwandeln, die über das Volumen des Körpers auszudehnen sind, mit Hülfe des Satzes, der durch die Gleichungen 6) der eilften Vor-

lesung ausgesprochen ist. Es ist hierzu erforderlich, dass für den Raum, den der feste Körper einnimmt, eine Function der Coordinaten eines Punktes gefunden werden kann, die eindeutig und stetig ist und in der Oberfläche des genannten Raumes dieselben Werthe wie p hat. Gesetzt, es gäbe eine solche Function. Bezeichnet man sie auch durch p und durch $d\tau$ ein Element des genannten Raumes, so sind nach dem angeführten Satze jene Integrale

$$-\int \frac{\partial p}{\partial x}\,d\tau \quad \text{und} \quad -\int\left(y\,\frac{\partial p}{\partial z} - z\,\frac{\partial p}{\partial y}\right)d\tau$$

$$-\int \frac{\partial p}{\partial y}\,d\tau \qquad -\int\left(z\,\frac{\partial p}{\partial x} - x\,\frac{\partial p}{\partial z}\right)d\tau$$

$$-\int \frac{\partial p}{\partial z}\,d\tau \qquad -\int\left(x\,\frac{\partial p}{\partial y} - y\,\frac{\partial p}{\partial x}\right)d\tau.$$

Hiernach sind die Componentensummen und Drehungsmomente der Drucke, welche die Flüssigkeit auf den Körper ausübt, gleich und entgegengesetzt den Componentensummen und Drehungsmomenten von Kräften, welche auf die Theile des Körpers derart wirken, dass auf das Volumenelement $d\tau$ desselben eine Kraft kommt, deren Componenten $\frac{\partial p}{\partial x}\,d\tau$, $\frac{\partial p}{\partial y}\,d\tau$, $\frac{\partial p}{\partial z}\,d\tau$ sind.

Dieser Satz lässt sich so verallgemeinern, dass er auch für den Fall gilt, dass die Flüssigkeit eine freie Oberfläche, in der der Druck $= 0$ ist, darbietet, und der Körper nicht in der Flüssigkeit untergetaucht, sondern in sie eingetaucht ist. Für diesen Fall setzen wir voraus, dass eine Function von x, y, z gefunden sei, die in den Punkten der Berührungsfläche des Körpers und der Flüssigkeit dieselben Werthe hat, wie der Druck in dieser, und die eindeutig und stetig in einem *Theile* des vom Körper eingenommenen Raumes ist, der begrenzt wird von der ebengenannten Fläche und einer Fläche, in der die Function $= 0$ ist — einer Fläche, die durch die Linie begrenzt sein muss, in der die freie Oberfläche der Flüssigkeit die Oberfläche des Körpers schneidet. Die für einen untergetauchten Körper angestellten Betrachtungen gelten dann ohne weitere Aenderung, wenn man sie nur bezieht, statt auf den ganzen vom Körper eingenommenen Raum, auf den eben bezeichneten Theil desselben.

Der bewiesene Satz führt zu dem sogenannten Archimedischen Principe, wenn man annimmt, dass auf die Flüssigkeit keine andere Kraft, als die Schwere wirkt. Nehmen wir die z-Achse als vertical abwärts gerichtet an und bezeichnen die Schwere durch g, so ist der Druck in der Flüssigkeit aus den Gleichungen

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = g\mu$$

und der Beziehung, die zwischen p und μ besteht, zu bestimmen. Die für den von dem festen Körper eingenommenen Raum zu ermittelnde Function p findet man aus *denselben* Gleichungen; mit andern Worten: in jedem Punkte dieses Raumes hat man p so gross anzunehmen, wie es in derselben Horizontalebene in der Flüssigkeit ist. Hieraus folgt dann, dass, wie man sagt, die von der Flüssigkeit auf den Körper ausgeübten Druckkräfte eine Resultante haben, die dem Gewichte der *verdrängten* Flüssigkeit gleich und entgegengesetzt ist, und in dem Schwerpunkte dieser ihren Angriffspunkt hat.

Dreizehnte Vorlesung.

(Capillarerscheinungen. Potential der Capillarkräfte. Hauptkrümmungsradien und Krümmungslinien. Vergrösserung, welche eine Fläche bei unendlich kleinen Verrückungen ihrer Punkte erleidet. Differentialgleichung der Berührungsfläche zweier schweren Flüssigkeiten. Grenzbedingung. Grösse der Kraft, welche einen Körper im Gleichgewicht hält, der in einer Richtung verschiebbar ist, und der zwei Flüssigkeiten berührt. Beispiele für diese Kraft.)

§ 1.

Die tropfbaren Flüssigkeiten zeigen gewisse Erscheinungen, die man *Capillar-Erscheinungen* nennt und als Wirkungen der *Capillarkräfte* ansieht. Dieselben bestehen theils darin, dass die freie Oberfläche einer solchen Flüssigkeit oder — wie wir allgemeiner und präciser sagen wollen — die Trennungsfläche zweier Flüssigkeiten nicht eine horizontale Ebene ist, theils darin, dass auf einen festen Körper, der zum Theil in eine tropfbare Flüssigkeit eingetaucht ist, oder — wie wir zu sagen vorziehen — der mit zwei Flüssigkeiten in Berührung ist, eine Kraft ausgeübt werden muss, um ihn im Gleichgewicht zu halten, die nicht durch das Archimedische Princip genau angegeben wird. Laplace hat die erste Theorie der Capillarerscheinungen aufgestellt und ist bei dieser von der Hypothese ausgegangen, dass die Capillarkräfte Kräfte sind, mit denen die Theile der Körper einander anziehen, und die bei wachsender Entfernung so schnell abnehmen, dass sie bei messbarer Entfernung nicht mehr merklich sind. Dieselbe Hypothese hat später Gauss*) strenger verfolgt, als es von Laplace geschehen ist, und ist dadurch zu einem Principe geführt, das wir folgendermassen aussprechen können:

Wenn zwei verschiedenartige Körper in einer Fläche sich berühren, so wirken in Folge hiervon Kräfte, die ein Potential haben, welches gleich der Grösse der Berührungsfläche, multiplicirt mit einer von der Natur der beiden Körper abhängigen Constanten ist. Diese Kräfte sind die Capillarkräfte.

Dieses Princip soll die Grundlage für die Betrachtungen bilden, die wir in Bezug auf die Capillarerscheinungen hier anstellen wollen;

---

*) Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii; Carl Friedrich Gauss' Werke, Bd. V p. 29.

wir werden bei ihnen annehmen, dass neben den Capillarkräften auf die Flüssigkeiten nur die Schwere wirkt, und werden die Flüssigkeiten als incompressibel, die festen Körper als starr ansehen. Das Princip der virtuellen Verrückungen soll den Ausgangspunkt bilden; um dasselbe auf den Fall, dass Capillarkräfte wirken, anwenden zu können, müssen wir zunächst einen Ausdruck für die Vergrösserung ableiten, die eine Fläche dadurch erfährt, dass ihre Punkte unendlich kleine Verrückungen erleiden. Wir könnten uns dabei auf die Gleichungen 12) der zehnten Vorlesung stützen, doch ziehen wir es vor, die Aufgabe auf eine directere Weise zu lösen.

§ 2.

Wir denken uns eine gerade Linie, die durch den Punkt (x, y, z) geht, und deren eine Richtung mit den Coordinatenachsen Winkel bildet, deren Cosinus α, β, γ sind; ξ, η, ζ seien die Coordinaten eines variabeln Punktes dieser Linie; dann ist

$$\xi - x = r\alpha, \quad \eta - y = r\beta, \quad \zeta - z = r\gamma,$$

wo r die positiv oder negativ genommene Entfernung der beiden Punkte ist, je nachdem der Punkt (ξ, η, ζ) von dem Punkte (x, y, z) in *der* Richtung liegt, welche durch α, β, γ bestimmt ist, oder in der entgegengesetzten. Wir denken uns ferner eine zweite Linie, deren Gleichungen bei entsprechender Bezeichnung

$$\xi - x_1 = r_1\alpha_1, \quad \eta - y_1 = r_1\beta_1, \quad \zeta - z_1 = r_1\gamma_1$$

sind. Die beiden Linien schneiden sich im Allgemeinen nicht; sie schneiden sich, falls den 6 aufgestellten Gleichungen durch passende Wahl der 5 Grössen ξ, η, ζ, r, r_1, oder, was dasselbe ist, falls den 3 Gleichungen

$$\begin{aligned} x - x_1 &= r_1\alpha_1 - r\alpha \\ y - y_1 &= r_1\beta_1 - r\beta \\ z - z_1 &= r_1\gamma_1 - r\gamma \end{aligned}$$

durch passende Wahl der 2 Grössen r und r_1 genügt werden kann. Ist das der Fall, so sind r und r_1 die positiv oder negativ zu nehmenden Entfernungen des Durchschnittspunktes von den Punkten (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1).

Nun seien (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) zwei unendlich nahe Punkte der Oberfläche eines Körpers, α, β, γ und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Cosinus der Winkel, welche die ihnen entsprechenden, nach dem Innern des Körpers gerichteten Normalen derselben mit den Coordinatenachsen bilden. Wenden wir das Zeichen d an, um die Vergrösserungen zu bezeichnen, die die in Betracht kommenden Grössen erleiden, wenn man von dem ersten Punkte zum zweiten übergeht, so wird hiernach

die Bedingung dafür, dass die beiden Normalen sich schneiden, die, dass den Gleichungen

$$\begin{aligned} -dx &= r\,d\alpha + \alpha\,dr \\ -dy &= r\,d\beta + \beta\,dr \\ -dz &= r\,d\gamma + \gamma\,dr \end{aligned}$$

durch passende Bestimmung von r und dr genügt werden kann. Multiplicirt man diese Gleichungen mit α, β, γ, addirt sie und berücksichtigt, dass nach den gemachten Festsetzungen

$$\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz = 0$$

und

$$\alpha\,d\alpha + \beta\,d\beta + \gamma\,d\gamma = 0$$

ist, so ergiebt sich

$$dr = 0;$$

die zu erfüllenden Gleichungen sind also

$$dx = -r\,d\alpha, \quad dy = -r\,d\beta, \quad dz = -r\,d\gamma.$$

Eine von diesen Gleichungen ist die Folge der beiden andern, da eine identische Gleichung entsteht, wenn man sie mit α, β, γ multiplicirt und addirt; dass zwei von ihnen durch passende Wahl von r erfüllt werden können, ist also die Bedingung dafür, dass die beiden Normalen sich schneiden.

Wir nehmen nun an, dass die Gleichung der Oberfläche, um die es sich handelt, in der Form

$$z - z(x, y) = 0, \tag{1}$$

wo das zweite z ein Functionszeichen sein soll, gegeben sei, und wählen x und y zu den zwei unabhängigen Variabeln, welche einen Punkt der Oberfläche und die ihm entsprechenden Werthe von α, β, γ bestimmen. Die beiden ersten jener 3 Gleichungen werden dann

$$dx = -r\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\,dy\right)$$

$$dy = -r\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \beta}{\partial y}\,dy\right)$$

oder

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{1}{r}\right) dx + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\,dy &= 0 \\ \frac{\partial \beta}{\partial x}\,dx + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{1}{r}\right) dy &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Sie können durch einen passenden Werth des Verhältnisses von $dy : dx$ erfüllt werden, falls r eine Wurzel der quadratischen Gleichung

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{1}{r}\right)\left(\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{1}{r}\right) - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\,\frac{\partial \beta}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

ist. Es seien r' und r'' die Wurzeln dieser Gleichung, dx', dy' und dx'', dy'' ihnen entsprechende, den Gleichungen 2) genügende Werthe von dx, dy; r' und r'' sind dann die *Hauptkrümmungsradien* der Oberfläche des Körpers im Punkte (x, y), und die Linienelemente der Oberfläche, deren Projectionen dx', dy' und dx'', dy'' sind, sind Elemente der beiden durch diesen Punkt gehenden *Krümmungslinien.*

Die Hauptkrümmungsradien sind stets reell und die Krümmungslinien schneiden sich senkrecht. Bei dem Beweise dieser Behauptungen wollen wir über das bis jetzt willkürlich gelassene Coordinatensystem eine gewisse Annahme machen; es ist das erlaubt, da die Hauptkrümmungsradien und die Krümmungslinien nach den durchgeführten Betrachtungen eine von jedem Coordinatensystem unabhängige Bedeutung haben. Allgemein folgt aus der Gleichung 1), die die Oberfläche, um die es sich handelt, darstellt,

$$\alpha : \beta : \gamma = -\frac{\partial z}{\partial x} : -\frac{\partial z}{\partial y} : 1, \tag{4}$$

also

$$\frac{\alpha}{\gamma} = -\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\beta}{\gamma} = -\frac{\partial z}{\partial y},$$

mithin

$$\frac{\partial \frac{\alpha}{\gamma}}{\partial y} = \frac{\partial \frac{\beta}{\gamma}}{\partial x},$$

oder

$$\gamma\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x}\right) = \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \beta \frac{\partial \gamma}{\partial x}.$$

Legen wir nun das Coordinatensystem so, dass $\gamma = 1$ ist, d. h. so dass die z-Achse parallel ist der nach dem Innern des Körpers gerichteten Normale seiner Oberfläche in dem betrachteten Punkte; es verschwinden dann α und β, und die abgeleitete Gleichung giebt

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial x}. \tag{5}$$

Hieraus folgt, dass das letzte Glied der linken Seite der Gleichung 3) ein Quadrat ist, und daraus weiter, dass diese linke Seite negativ ist, wenn

$$\frac{1}{r} = -\frac{\partial \alpha}{\partial x} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{r} = -\frac{\partial \beta}{\partial y}$$

ist; sie ist aber positiv, wenn r unendlich klein angenommen wird; daraus ist zu schliessen, dass die Gleichung 3) zwei reelle Wurzeln hat. Es können dieselben aber positiv oder negativ sein. Es ist ein Hauptkrümmungsradius positiv, wenn der entsprechende Krümmungsmittelpunkt (d. i. der Punkt, dessen Coordinaten wir bei der im Anfange dieses § gebrauchten Bezeichnung ξ, η, ζ zu nennen hätten) von dem Punkte (x, y, z) aus in der Richtung der nach dem Innern des Körpers gezogenen Normale liegt; negativ im entgegengesetzten

Falle. Beide Hauptkrümmungsradien sind positiv, wenn die Oberfläche des Körpers eine convexe ist, beide negativ, wenn sie eine concave ist; einer ist positiv, der andere negativ, wenn die Fläche in einem Sinne convex, in einem andern concav ist.

Um zu beweisen, dass die Krümmungslinien sich senkrecht schneiden, gehen wir von den Gleichungen

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{1}{r'}\right) dx' = -\frac{\partial \alpha}{\partial y} dy'$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} dx'' = -\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{1}{r''}\right) dy''$$

aus, die aus den Gleichungen 2) folgen. Wir multipliciren dieselben mit einander und benutzen, dass

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{1}{r'} = -\left(\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{1}{r''}\right),$$

da, wie aus der Gleichung 3) folgt,

$$\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} = -\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y}\right). \qquad 6)$$

So ergiebt sich

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} dx' dx'' + \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy' dy'' = 0.$$

Führt man nun das Coordinatensystem ein, für welches die Gleichung 5) besteht und $\gamma = 1$ ist, so wird diese Gleichung

$$dx' dx'' + dy' dy'' = 0.$$

Da die Projectionen der beiden betrachteten Elemente der Krümmungslinien auf die z-Achse des jetzt benutzten Coordinatensystems (die mit dz' und dz'' zu bezeichnen wären) $= 0$ sind, so ist hierdurch ausgesprochen, dass die beiden Elemente senkrecht auf einander stehen.

Mit Hülfe der Begriffe der Hauptkrümmungsradien und der Krümmungslinien wird es nun leicht sein die Vergrösserung zu berechnen, welche ein Theil der Oberfläche eines Körpers erfährt, wenn seine Punkte unendlich kleine Verrückungen erleiden. Wir nehmen zuerst an, dass die Verrückungen überall in den Richtungen der Normalen stattfinden; ν möge die Grösse einer Verrückung in der Richtung der nach Aussen gekehrten Normale sein, eine Grösse, die stetig von einem Punkte der Fläche zum andern variirt. Wir denken uns die Fläche durch zwei Systeme unendlich naher Krümmungslinien in unendlich kleine Rechtecke getheilt; dl' und dl'' seien aneinanderstossende Seiten eines solchen Rechtecks bei dem ursprünglichen Zustande der Fläche, $dl'\,dl''$ also die Fläche des Rechtecks. Bei der Verrückung wird $dl'\left(1 + \frac{\nu}{r'}\right)$ aus dl' und $dl''\left(1 + \frac{\nu}{r''}\right)$ aus dl''; es

gilt das, welche Vorzeichen r' und r'' auch haben mögen; die Fläche des Rechtecks erhält daher bei der Verrückung den Zuwachs

$$dl'\,dl''\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}\right)\nu,$$

und die ganze Fläche, deren Element wir ds nennen wollen, den Zuwachs

$$\int ds\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}\right)\nu.$$

Wir betrachten zweitens den Fall, dass die Punkte der Fläche in dieser selbst und wieder so verschoben werden, dass die Verrückungen stetig sich ändern. Die Vergrösserung der Fläche wird dann durch ein nach dem Umfang zu nehmendes Integral ausdrückbar sein. Wir nennen dl ein Element des Umfangs, m die Normale von dl, welche die Fläche tangirt und nach ihrem Innern gekehrt ist, μ die Projection der Verrückung von dl auf die dem m entgegengesetzte Richtung; die Vergrösserung der Fläche ist dann

$$\int dl\,\mu.$$

Nun mögen die Punkte der Oberfläche des Körpers beliebige unendlich kleine und stetig sich ändernde Verrückungen erleiden; ε sei der Grösse und Richtung nach eine Verrückung; dieselbe lässt sich ansehen als zusammengesetzt aus zwei solchen Verrückungen, wie wir sie betrachtet haben; daraus folgt, dass die Vergrösserung, die ein Theil der Oberfläche erfährt, gleich der Summe der beiden aufgestellten Integrale ist, wenn für ν und μ in ihnen gewisse Werthe gesetzt werden; es ist zu setzen

$$\nu=-\varepsilon\cos(n\varepsilon),\quad \mu=-\varepsilon\cos(m\varepsilon),$$

wo n die nach dem Innern des Körpers gerichtete Normale von ds bedeutet. Es ist daher die gesuchte Vergrösserung eines Theiles der Oberfläche des Körpers

$$-\int ds\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}\right)\varepsilon\cos(n\varepsilon)-\int dl\,\varepsilon\cos(m\varepsilon). \qquad 7)$$

§ 3.

Das gewonnene Resultat setzt uns in den Stand, die Arbeit der Capillarkräfte für eine unendlich kleine Verrückung der Theile des Systemes, auf welche sie wirken, zu finden. Neben den Capillarkräften nehmen wir die Schwere als wirksam an und müssen daher auch die Arbeit dieser für eine solche Verrückung aufsuchen. Wir nehmen die z-Achse des Coordinatensystems vertical abwärts gerichtet an, bezeichnen die Schwere durch g, durch $d\tau$ ein Element

des Volumens eines der Körper und durch μ die Dichtigkeit dieses. Das Potential der Schwere in Bezug auf den Körper ist dann

$$g\int \mu z\, d\tau, \tag{8}$$

und die Veränderung, die der Werth dieses Integrals durch die gedachte Verrückung erfährt, die Arbeit, die wir zu berechnen haben. Wie bereits bemerkt, werden wir voraussetzen, dass der Körper incompressibel ist; überdies soll für ihn μ überall denselben Werth haben; in Folge hiervon lässt sich die Veränderung, die das Integral 8) für irgend welche virtuelle Verrückungen erleidet, darstellen als ein nach der Oberfläche des Körpers zu nehmendes Integral, in dem nur die Verrückungen der Theile der Oberfläche vorkommen. In der That lässt sich bei den genannten Voraussetzungen die Aenderung des Integrales 8) ansehen als bewirkt durch alleinige Aenderung der Grenzen der Integration. Es sei ds ein Element der Oberfläche des Körpers, ε die Verrückung, n die nach dem Innern des Körpers gerichtete Normale von ds; dann ist

$$ds\, \varepsilon \cos(n\varepsilon)$$

ein Volumenelement, welches ausgeschaltet wird, wenn $\cos(n\varepsilon)$ positiv ist, und eines, welches eingeschaltet wird, wenn $\cos(n\varepsilon)$ negativ ist. Der Zuwachs jenes Integrales oder die in Rede stehende Arbeit der Schwere ist daher

$$-g\mu\int ds\, z\, \varepsilon \cos(n\varepsilon). \tag{9}$$

Die Verrückungen ε sind wegen der Incompressibilität des Körpers durch eine Bedingungsgleichung mit einander verbunden. Es muss das Integral

$$\int d\tau$$

ungeändert bleiben; durch eine Ueberlegung, wie wir sie eben angestellt haben, sieht man ein, dass diese Bedingung durch die Gleichung

$$0 = \int ds\, \varepsilon \cos(n\varepsilon) \tag{10}$$

ausgesprochen wird.

Wir sind nun in der Lage, einige Eigenschaften der Trennungsflächen verschiedener Flüssigkeiten ableiten zu können. Es mögen 1 und 2 zwei sich berührende Flüssigkeiten sein, A_{12} diejenige Constante, die mit der Grösse der Berührungsfläche multiplicirt das Potential der Capillarkräfte giebt, die in Folge ihrer Berührung wirksam sind, μ_1, μ_2 ihre Dichtigkeiten; wir fassen einen beliebigen, endlichen Theil ihrer Berührungsfläche ins Auge, nennen ds_{12} ein

Element dieses Theiles, n_1 die nach dem Innern der Flüssigkeit 1 gerichtete Normale von ds_{12}, r' und r'' die Hauptkrümmungsradien dieses Elements, positiv gerechnet, wenn die Oberfläche der Flüssigkeit 1 eine convexe ist; die Punkte des gewählten Theiles denken wir uns unendlich wenig verrückt, während alle übrigen Punkte der vorhandenen Berührungsflächen heterogener Körper an ihren Orten bleiben; so verrückt, dass die Punkte des Randes ihre Stellen behalten und dass die Volumina der beiden Flüssigkeiten nicht geändert werden. Ist ε die Verrückung von ds_{12}, so erfordert, der Gleichung 10) zufolge, die letzte Festsetzung, dass

$$\int ds_{12}\, \varepsilon \cos(n_1 \varepsilon) \tag{11}$$

verschwindet. Ist diese Bedingung erfüllt, so muss nach dem Princip der virtuellen Verrückungen, wie aus der Bedeutung der Ausdrücke 7) und 9) hervorgeht, auch

$$\int ds_{12}\, \varepsilon \cos(n_1 \varepsilon) \left\{ A_{12} \left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} \right) + g(\mu_1 - \mu_2) z \right\} \tag{12}$$

verschwinden. Hierzu ist erforderlich, dass die in 11) und 12) unter den Integralzeichen stehenden Ausdrücke einander proportional sind, d. h. dass

$$A_{12} \left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} \right) + g(\mu_1 - \mu_2) z = \lambda \tag{13}$$

ist, wo λ eine Constante bedeutet. Es ist dieses eine Differentialgleichung für die Trennungsfläche der beiden Flüssigkeiten. Dieselbe lässt sich auf eine etwas einfachere Form bringen, wenn man die xy-Ebene passend wählt; verändert man diese, so verändert man das auf einen bestimmten Punkt bezogene z, während das erste Glied der linken Seite der Gleichung 13) ungeändert bleibt; man verändert also auch λ und kann dieses verschwinden machen, wenn man die xy-Ebene passend wählt. Dadurch wird dann die Gleichung 13)

$$A_{12} \left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} \right) + g(\mu_1 - \mu_2) z = 0. \tag{14}$$

Die Ebene, die die xy-Ebene sein muss, damit diese Gleichung gelte, hat man die *Niveau-Ebene* genannt; hat die Trennungsfläche der beiden Flüssigkeiten Theile, welche als eben zu betrachten, für welche also r' und r'' unendlich gross sind, so liegen diese in der Niveau-Ebene, wie aus 14) ersichtlich ist.

Betrachten wir nun eine Linie, in der drei Flüssigkeiten zusammenstossen. Wir nennen dieselben 1, 2, 3, bezeichnen durch dl_{123} ein Element der Linie, durch m_{12} die Normale dieses Elementes, die die Trennungsfläche von 1 und 2 berührt und nach dem Innern der-

selben gerichtet ist, und geben den Zeichen m_{23}, m_{31} und A_{23}, A_{31} analoge Bedeutungen, wie wir sie den Zeichen m_{12} und A_{12} beigelegt haben. Die Punkte der genannten Linie denken wir uns unendlich wenig verschoben, so dass das Element dl_{123} die Verschiebung ε erhält; die der Linie unendlich nahen Flüssigkeitstheilchen müssen dann auch Verschiebungen erleiden; *nur* diese sollen solche erleiden und zwar der Art, dass das Volumen keiner der Flüssigkeiten dadurch geändert wird. Bei Rücksicht auf den Ausdruck 7) hat man dann aus dem Princip der virtuellen Verrückungen zu schliessen, dass

$$\int dl_{123}\,\varepsilon \left\{A_{12} \cos (m_{12}\,\varepsilon) + A_{23} \cos (m_{23}\,\varepsilon) + A_{31} \cos (m_{31}\,\varepsilon)\right\} = 0$$

ist, woraus, da ε ganz beliebig ist, folgt:

$$A_{12} \cos (m_{12}\,\varepsilon) + A_{23} \cos (m_{23}\,\varepsilon) + A_{31} \cos (m_{31}\,\varepsilon) = 0, \qquad 15)$$

wo ε eine beliebige Richtung bedeutet. Diese Gleichung ist dieselbe wie diejenige, welche ausspricht, dass drei Kräfte, deren Grössen A_{12}, A_{23}, A_{31}, deren Richtungen die auf dl_{123} senkrechten Richtungen m_{12}, m_{23}, m_{31} sind, und die auf *einen* Punkt wirken, einander das Gleichgewicht halten. Man bezeichne die Winkel $(m_{31}\,m_{12})$, $(m_{12}\,m_{23})$, $(m_{23}\,m_{31})$ durch w_1, w_2, w_3; sie sind die Winkel, welche je zwei der drei Ebenen mit einander bilden, die an dem Orte von dl_{123} die drei Trennungsflächen berühren; die Gleichung 15) spricht dann aus, dass ein Dreieck, dessen Seiten sich wie $A_{23} : A_{31} : A_{12}$ zu einander verhalten, die Winkel $\pi - w_1$, $\pi - w_2$, $\pi - w_3$ hat, oder dass

$$\sin w_1 : \sin w_2 : \sin w_3 = A_{23} : A_{31} : A_{12} \qquad 16)$$

ist.

Wir fassen nun einen Fall ins Auge, der dem eben behandelten ähnlich ist, von ihm aber dadurch sich unterscheidet, dass der Körper 3 nicht eine Flüssigkeit, sondern starr, oder, was hier dasselbe bedeuten soll, fest ist; seine Oberfläche soll überdies da, wo sie von der Trennungsfläche der Flüssigkeit 1 und 2 getroffen wird, keine scharfe Kante darbieten; die Richtungen m_{23} und m_{31} sind dann entgegengesetzte. Die Verrückung ε nehmen wir parallel mit m_{31} an; auch dann gilt die Gleichung 15) und wird

$$\cos w_1 = \frac{A_{23} - A_{31}}{A_{12}}\,. \qquad 17)$$

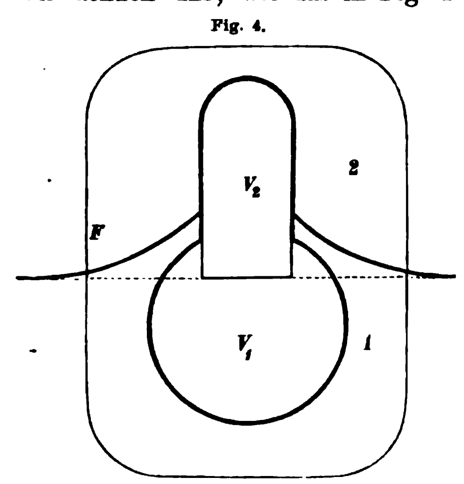
Die Gleichungen, welche nach dem Muster von 16) und 17) gebildet werden können, sind die Grenzbedingungen, welche zur näheren Bestimmung der Integrale der Differentialgleichungen dienen, die nach dem Muster von 13) oder 14) zu bilden sind.

§ 4.

Bevor wir unter gewissen Voraussetzungen die Differentialgleichung für die Trennungsfläche zweier Flüssigkeiten integriren, wollen wir einen Ausdruck für die Kraft aufstellen, die auf einen festen Körper ausgeübt werden muss, um ihn im Gleichgewicht zu halten, wenn derselbe mit zwei Flüssigkeiten in Berührung und in einer gegebenen Richtung beweglich ist. Wir nennen wiederum den festen Körper 3, die Flüssigkeiten 1 und 2. Ein Beispiel bildet ein fester Körper, der in Wasser eingetaucht ist. Dieses Beispiel wollen wir der Betrachtung zu Grunde legen und durch 1 das Wasser, durch 2 die Luft bezeichnen.

Wir nehmen zuerst an, dass ein Theil der Oberfläche des festen Körpers, in welchem der Rand der Wasseroberfläche (also die Linie, deren Element wir dl_{123} genannt haben) liegt, ein Theil eines verticalen Cylinders von beliebigem Querschnitt, und dass der Körper in verticaler Richtung beweglich ist. Wir suchen die Kraft Z, die vertical abwärts, also in der Richtung der z-Achse, ausser seinem Gewichte auf ihn wirken muss, damit das Gleichgewicht besteht. Wir finden dieselbe, indem wir das Princip der virtuellen Verrückungen auf eine gewisse Verrückung unseres Systemes anwenden. Wir denken uns, wie das in Fig. 4 angedeutet ist, eine Fläche F, welche den festen Körper umschliesst und von jeder Flüssigkeit einen Theil abgrenzt; alle Punkte, die ausserhalb dieser Fläche, oder in ihr liegen, sollen an ihren Orten bleiben; der feste Körper werde um ε' vertical abwärts verschoben, die Theilchen der Flüssigkeiten werden so bewegt, dass die Punkte des Randes der Wasseroberfläche keine Verrückungen erleiden und das Volumen jeder Flüssigkeit ungeändert bleibt. Wir wollen annehmen, dass dabei allen Flüssigkeitstheilchen, welche mit dem festen Körper in Berührung sind, bis auf diejenigen, die der Grenzfläche beider Flüssigkeiten unendlich nahe sind, dieselbe Verschiebung ertheilt werde, wie dem festen Körper. Für diese Verrückung ist die Arbeit der Kraft Z

Fig. 4.



$$= Z\varepsilon'. \qquad 18)$$

Um die Arbeit der Capillarkräfte und der Schwere angeben zu

können, behalten wir die früher gebrauchten Zeichen bei, verstehen unter ds_{12} aber nur ein Element des Theiles der Trennungsfläche von 1 und 2, der innerhalb der Fläche F liegt, und nennen U den Umfang des horizontalen Querschnittes *des* Cylinders, von dem ein Theil der Annahme nach einen Theil der Oberfläche des festen Körpers ausmacht. Bei der gedachten Verrückung vergrössert sich dann die Berührungsfläche von 3 und 1 um $U\varepsilon'$, während die Berührungsfläche von 3 und 2 um ebensoviel sich verkleinert. In Folge hiervon und bei Rücksicht auf den Ausdruck 7) ergiebt sich die Arbeit der Capillarkräfte

$$= (A_{31} - A_{32})\, U\varepsilon' - A_{12}\int ds_{21}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right)\varepsilon \cos(n_1 \varepsilon). \qquad 19)$$

Die Arbeit der Schwere endlich findet man mit Hülfe des Ausdrucks 9)

$$= g\,(\mu_1 - \mu_3)\,\varepsilon'\int ds_{31}\, z \cos(n_3 z) + g\,(\mu_2 - \mu_3)\,\varepsilon'\int ds_{23}\, z \cos(n_3 z)$$
$$- g\,(\mu_1 - \mu_2)\int ds_{12}\, z\varepsilon \cos(n_1 \varepsilon). \qquad 20)$$

Die Summe der Ausdrücke 18), 19) und 20) muss verschwinden. Wählt man zur xy-Ebene die Niveau-Ebene und berücksichtigt, dass dann die Gleichung 14) gilt, so ergiebt sich hieraus

$$\begin{aligned} 0 = Z + (A_{31} - A_{23})\, U + g\,(\mu_1 - \mu_3)\int ds_{31}\, z \cos(n_3 z) \\ + g\,(\mu_2 - \mu_3)\int ds_{23}\, z \cos(n_3 z). \end{aligned} \qquad 21)$$

Wir geben dieser Gleichung noch eine andere Gestalt. Bezeichnet ds ein Element der Oberfläche eines vollständig begrenzten Raumes, n die nach dem Innern desselben gerichtete Normale von ds, so ist das Integral

$$\int ds\, z \cos(nz),$$

ausgedehnt über die ganze Oberfläche, gleich dem negativ genommenen Volumen des Raumes, wie der durch die Gleichungen 6) der eilften Vorlesung ausgesprochene Satz lehrt. Bemerkt man, dass dasselbe Integral, ausgedehnt über einen beliebigen Theil eines der z-Achse parallelen Cylinders oder über einen beliebigen Theil der xy-Ebene, verschwindet, so kann man den Werth finden, den es erhält, wenn es über einen begrenzten Theil jener geschlossenen Oberfläche ausgedehnt wird; man darf nämlich diesen Theil zu einer geschlossenen Oberfläche machen durch Hinzufügung einer Fläche, die aus einem Stücke eines der z-Achse parallelen Cylinders und einem Stücke der xy-Ebene besteht. Die beiden in der Gleichung 21) vor-

kommenden Integrale lassen sich hiernach durch zwei Volumina ausdrücken. Wir construiren die Fläche, welche durch die Randcurve des Wassers begrenzt und zusammengesetzt ist aus einem Theile eines verticalen Cylinders und einem Theile der Niveau-Ebene; wir setzen voraus, dass diese Fläche ganz innerhalb des festen Körpers liegt; dann theilt sie denselben in zwei Theile, von denen der eine mit der Flüssigkeit 1, der andere mit beiden Flüssigkeiten in Berührung ist; die Volumina dieser Theile nennen wir V_1 und V_2; dann ist

$$\int ds_{31}\, z \cos(n_3 z) = -V_1 \quad \text{und} \quad \int ds_{23}\, z \cos(n_3 z) = -V_2.$$

Führt man noch durch 17) den Winkel w_1 ein, so wird hiernach die Gleichung 21)

$$Z = g(\mu_1 - \mu_3)V_1 + g(\mu_2 - \mu_3)V_2 + A_{12} \cos w_1 U.$$

§ 5.

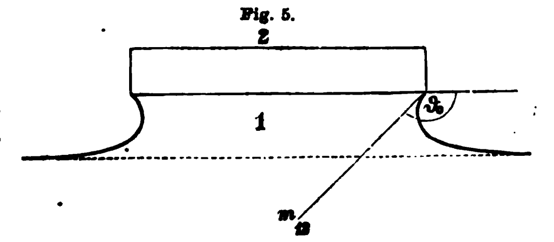
Wir wollen nun einen Fall betrachten, der den eben behandelten als speciellen in sich schliesst; der feste Körper 3 habe eine beliebige Gestalt und sei in einer beliebigen Richtung, die wir p nennen wollen, verschiebbar. Es soll die Kraft P gefunden werden, die auf den Körper in der Richtung p ausser der betreffenden Componente seines Gewichtes wirken muss, damit das Gleichgewicht besteht. Wir denken uns den Körper in der Richtung p um ε' verschoben; die Flüssigkeitstheilchen, welche ihn berühren, sollen alle die gleiche Verschiebung erfahren, während die Theilchen, welche in und ausserhalb der Fläche F (s. Fig. 4) liegen, an ihren Orten bleiben und die Elemente ds_{12} solche Verschiebungen ε erleiden, dass der Bedingung der Incompressibilität genügt wird. Die Flächen, deren Elemente durch ds_{31} und ds_{23} bezeichnet sind, erleiden dann keine Aenderung ihrer Grösse, dagegen erfährt der Rand der Trennungsfläche der beiden Flüssigkeiten eine Verschiebung. Nimmt man hierauf Rücksicht, so erhält man durch eine Betrachtung, die im Uebrigen derjenigen gleich ist, durch welche wir die Gleichung 21) abgeleitet haben, wenn man wiederum die Niveau-Ebene zur xy-Ebene wählt,

$$\begin{aligned} 0 = P &+ g(\mu_1 - \mu_3)\int ds_{31}\, z \cos(n_3 p) \\ &+ g(\mu_2 - \mu_3)\int ds_{23}\, z \cos(n_3 p) \\ &- A_{12}\int dl_{123} \cos(m_{12} p). \end{aligned} \tag{22)}$$

Wir wenden diese Gleichung zuerst auf einen Fall an, in dem die Richtung p wieder mit der Richtung von z übereinstimmt. Der Körper 3 sei eine horizontale Platte, deren Randfläche ein Theil

eines kreisförmigen verticalen Cylinders ist. Ihre untere Fläche soll mit der Flüssigkeit 1 in Berührung sein, so dass der Rand derselben die Linie ist, deren Element wir dl_{123} genannt haben. Fassen wir den Rand der unteren Fläche als eine unendlich schmale Fläche von unendlich grosser Krümmung auf, so haben wir statt dessen zu sagen, dass die genannte Linie in diesem Rande liegen soll. Das Resultat der Gleichung 22) ist ersichtlich bei der einen Auffassung dasselbe, wie bei der andern. Nennt man V das Volumen der Platte, f die Grösse, U den Umfang ihrer Grundfläche, z_0 den Werth von z für ihre untere Fläche, ϑ_0 den in Fig. 5 bezeichneten Winkel, den die Richtung m_{12} mit der Verlängerung des Radius der Platte bildet, wobei

Fig. 5.



$$(m_{12}\, p) = \vartheta_0 - \frac{\pi}{2}$$

wird, und nimmt man an, dass die Trennungsfläche der beiden Flüssigkeiten eine Rotationsfläche ist, deren Achse mit der Achse der Platte zusammenfällt, so wird die Gleichung 22)

$$0 = P + g\,(\mu_3 - \mu_2)\, V - g\,(\mu_1 - \mu_2)\, z_0 f - A_{12}\, U \sin \vartheta_0. \qquad 23)$$

Der Werth von z_0 kann innerhalb gewisser Grenzen geändert werden; mit ihm ändert sich auch ϑ_0; wie diese beiden Grössen zusammenhängen, werden wir bei der Untersuchung der Gestalt der Trennungsfläche zweier Flüssigkeiten finden.

Wir wollen nun die Gleichung 22) auf den Fall anwenden, dass die Richtung p eine horizontale ist; sie sei die Richtung der x-Achse. Ist ds ein Element der Oberfläche eines vollkommen begrenzten Raumes, n die nach dem Innern dieses gerichtete Normale von ds, so verschwindet das Integral

$$\int ds\, z \cos (nx), \qquad 24)$$

wie die erste der Gleichungen 6) der eilften Vorlesung zeigt. Hieraus folgt, dass der Coefficient von μ_3 in 22) verschwindet, und dass die beiden Glieder dieser Gleichung, welche Flächenintegrale enthalten, sich in das eine

$$g\,(\mu_1 - \mu_2) \int ds_{31}\, z \cos (n_3 x) \qquad 25)$$

zusammenziehen. Das hier vorkommende Integral lässt sich weiter darstellen als eines, das auszudehnen ist über den Theil der Oberfläche des festen Körpers, der zwischen der xy-Ebene und der Grenze der Trennungsfläche der beiden Flüssigkeiten liegt, wenn man noch

benutzt, dass das Integral 24) auch verschwindet, wenn es über einen Theil der xy-Ebene genommen wird. Wir wollen annehmen, dass die Grenze der Trennungsfläche der beiden Flüssigkeiten die xy-Ebene nicht schneidet, also ganz oberhalb oder ganz unterhalb derselben liegt. In beiden Fällen wollen wir durch ds_3 ein Element des genannten Theils der Oberfläche des festen Körpers bezeichnen; der Ausdruck 25) ist dann

$$= \pm g (\mu_1 - \mu_2) \int ds_3 \, z \cos (n_3 x),$$

wo das obere Zeichen in dem ersten, das untere in dem zweiten der beiden Fälle gilt, vorausgesetzt, dass die untere Flüssigkeit wieder die Flüssigkeit 1 ist. Hiernach ist die Gleichung 22)

$$0 = P \pm g (\mu_1 - \mu_2) \int ds_3 \, z \cos (n_3 x) - A_{12} \int dl_{123} \cos (m_{12} x). \quad 26)$$

Wir wollen die Rechnung weiter führen unter der Voraussetzung, dass der feste Körper eine zur x-Achse senkrechte Platte ist, die in der Richtung der y-Achse die sehr grosse Länge b besitzt. In ihrer Nähe, auf der Seite der negativen x, befinde sich eine ihr parallele, feste Platte von gleicher oder noch grösserer Länge. Die beiden Fälle, die in der Gleichung 26) zu unterscheiden sind, sind in Fig. 6 und Fig. 7 dargestellt.

Fig. 6.

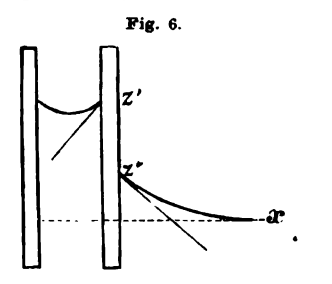
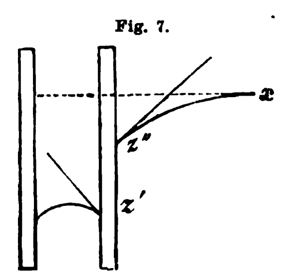


Fig. 7.



Die Elemente ds_3 und dl_{123} sind zum grössten Theile der y-Achse parallel; diejenigen, die es nicht sind, können bei der Bildung der beiden Integrale, um die es sich handelt, vernachlässigt werden. Auf der äusseren Seite der beweglichen Platte ist

$$\pm (m_{12} x) = w_1 - \frac{\pi}{2},$$

auf der inneren

$$= w_1 + \frac{\pi}{2};$$

daher verschwindet das nach dl_{123} zu nehmende Integral in 26). Ferner ist auf der äusseren Seite der Platte

$$\cos (n_3 x) = -1,$$

auf der inneren

$$= +1.$$

Endlich kann man $ds_3 = b\,dz$ setzen, wenn man die Bestimmung hinzufügt, dass die untere Grenze des Integrals der kleinere Grenzwerth von z, die obere der grössere sein soll. Hiernach wird die Gleichung 26) in den beiden unterschiedenen Fällen

$$P = g\,(\mu_1 - \mu_2)\,b\,\frac{z'^2 - z''^2}{2},$$

wenn der Werth von z für die Grenze der beiden Flüssigkeiten an der inneren Fläche der beweglichen Platte mit z', an der äusseren mit z'' bezeichnet wird. Je nachdem dieser Ausdruck von P positiv oder negativ ist, üben die beiden Platten scheinbar eine Anziehung oder eine Abstossung auf einander aus. Wie die Grössen z' und z'' abhängen von der Natur der Flüssigkeiten und der Platten, sowie dem Abstande der letzteren, lehrt die Untersuchung der Gestalt der Trennungsfläche zweier Flüssigkeiten.

Vierzehnte Vorlesung.

(Integration der Differentialgleichung für die Berührungsfläche zweier schweren Flüssigkeiten in dem Falle, dass dieselbe eine Rotationsfläche ist und die Abstände der betrachteten Punkte von der Rotationsachse sehr klein oder sehr gross sind. Erste und zweite Näherung.)

§ 1.

Wir wollen uns jetzt mit der Integration der Differentialgleichung beschäftigen, die wir für die Trennungsfläche der beiden Flüssigkeiten 1 und 2 gefunden haben. Legen wir die xy-Ebene in die Niveauebene, so ist dieselbe die Gleichung 14) der vorigen Vorlesung, nämlich

$$z = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right), \qquad 1)$$

wenn

$$a^2 = -2\,\frac{A_{12}}{g(\mu_1 - \mu_2)}$$

gesetzt wird. Wir nehmen die Constante A_{12} als negativ an. Nur unter dieser Bedingung ist ein stabiles Gleichgewicht möglich; denn nach den in § 2 der vierten Vorlesung gemachten Auseinandersetzungen erfordert ein solches, dass das Potential der wirkenden Kräfte ein Maximum sei, und ein Maximum findet nicht bei der positiv genommenen Oberfläche einer incompressibeln Flüssigkeit statt — diese kann ins Unendliche wachsen —, wohl aber bei der negativ genommenen. Wir bezeichnen ferner die dichtere Flüssigkeit durch 1, die weniger dichte durch 2; dann ist a^2 positiv. Ist auch a positiv, was wir festsetzen, so ist dieses, wie aus der Gleichung 1) ersichtlich, eine Länge. Nach den Gleichungen 4) und 6) der vorigen Vorlesung ist nun

$$\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} = -\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y}\right)$$

und

$$\alpha : \beta : \gamma = -\frac{\partial z}{\partial x} : -\frac{\partial z}{\partial y} : 1,$$

wo α, β, γ die Cosinus der Winkel bedeuten, die die nach dem Innern der Flüssigkeit 1 gezogene Normale der Oberfläche dieser mit den Coordinatenachsen bildet. Es folgt hieraus

$$\alpha = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}, \quad \beta = -\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$$

und nach 1

$$z = \frac{a^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}, \tag{2}$$

wo der vorkommenden Wurzelgrösse das positive oder negative Vorzeichen zu geben ist, je nachdem γ positiv oder negativ ist. Diese partielle Differentialgleichung für z verwandeln wir in eine gewöhnliche durch die Annahme, dass die Oberfläche, um die es sich handelt, ein Theil einer Rotationsfläche ist, deren Rotationsachse mit der z-Achse zusammenfällt. Setzen wir

$$u = \sqrt{x^2+y^2},$$

wo die Wurzelgrösse positiv zu nehmen ist, so ist dann

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{u}\frac{dz}{du}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{u}\frac{dz}{du}$$

und die Gleichung 2) wird

$$z = \frac{a^2}{2}\frac{1}{u}\frac{d}{du}\frac{u\frac{dz}{du}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{du}\right)^2}}. \tag{3}$$

z und u können wir hierbei als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der Curve ansehen, in der die Oberfläche von einer durch die z-Achse gelegten Ebene geschnitten wird. Die Gleichung 3) wollen wir dadurch umgestalten, dass wir in sie einen Winkel ϑ einführen, zu dessen Definition wir zunächst

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{du}\right)^2}} = \cos\vartheta$$

setzen; wir vervollständigen dieselbe durch die Gleichung

$$\frac{\frac{dz}{du}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{du}\right)^2}} = \sin\vartheta.$$

Hierdurch ist ϑ bis auf ein Vielfaches von 2π bestimmt; dabei können und wollen wir festsetzen, dass ϑ sich stetig ändert, wenn man auf der Curve stetig fortgeht. Aus den für $\cos\vartheta$ und $\sin\vartheta$ aufgestellten Ausdrücken folgt

$$\frac{dz}{du} = \operatorname{tg}\vartheta, \tag{4}$$

d. h. ϑ ist ein Winkel, den die Tangente der Curve mit der u-Achse bildet, und den eine Linie beschreibt, die von der u-Achse aus in *dem* Sinne gedreht wird, bis sie der Tangente parallel ist, in dem sie um $\frac{\pi}{2}$ gedreht werden muss, um die Richtung der z-Achse zu erhalten. Bei Rücksicht auf die Gleichung $\gamma = \cos\vartheta$ kann man hierfür auch sagen: ϑ ist ein Winkel, den die nach dem Innern der dichteren Flüssigkeit gezogene Normale, n_1, mit der z-Achse bildet, und den eine Linie beschreibt, die von der z-Achse aus in *demselben* Sinne gedreht wird, bis sie die Richtung von n_1 hat. Die Gleichung 3) wird dann

$$z = \frac{a^2}{2}\frac{1}{u}\frac{d}{du}(u \sin\vartheta). \qquad 5)$$

Wir wollen die Gleichungen 4) und 5), die zusammen die Gleichung 3) ersetzen, nur für die Fälle integriren, dass u sehr klein oder sehr gross für die Punkte der betrachteten Fläche ist.

§ 2.

Wir nehmen zuerst an, dass u als unendlich klein zu betrachten ist. Dieser Fall ist näherungsweise verwirklicht z. B. bei der Flüssigkeitsoberfläche in einer engen, verticalen Röhre von kreisförmigem Querschnitt, die in eine grössere Wassermasse getaucht ist, oder bei der Oberfläche eines kleinen Quecksilbertropfens, der auf einer horizontalen Glasplatte ruht. Aus 5) folgt, dass dann im Allgemeinen z unendlich gross ist; wir nehmen an, dass dieses stattfindet, dass die Unterschiede der Werthe von z für die verschiedenen Punkte der zu betrachtenden Curve aber nicht unendlich gross sind; bezeichnen wir durch z_0 einen dieser Werthe, so können wir hiernach für 5) schreiben

$$z_0 = \frac{a^2}{2}\frac{1}{u}\frac{d(u\sin\vartheta)}{du}$$

oder

$$z_0 u + \frac{\text{const.}}{u} = a^2 \sin\vartheta,$$

wo const. die Constante der Integration bedeutet. Diese muss verschwinden, wenn, wie wir annehmen wollen, die z-Achse die Flüssigkeitsoberfläche schneidet, weil sonst für $u = 0$ die linke Seite der gefundenen Gleichung unendlich werden würde, die rechte aber nicht unendlich werden kann. Zugleich wollen wir in Betreff der Bedeutung von z_0 festsetzen, dass

$$z = z_0 \quad \text{für} \quad u = 0$$

sein soll. Wir haben dann

$$u = \frac{a^2}{z_0}\sin\vartheta. \qquad 6)$$

Dabei ist

$$\vartheta = 0 \quad \text{für} \quad u = 0,$$

wenn, wie wir annehmen wollen und wie es in den beiden angeführten Beispielen der Fall ist, an dem Punkte ($u = 0$, $z = z_0$) die dichtere Flüssigkeit die *untere* ist.

Differentiiren wir die Gleichung 6) und multipliciren das Resultat mit der Gleichung 4), so erhalten wir

$$dz = \frac{a^2}{z_0} \sin \vartheta \, d\vartheta,$$

und hieraus durch Integration bei Rücksicht darauf, dass $z = z_0$ für $\vartheta = 0$ ist,

$$z - z_0 - \frac{a^2}{z_0} = - \frac{a^2}{z_0} \cos \vartheta. \tag{7}$$

Die Gleichungen 6) und 7) zeigen, dass die Flüssigkeitsoberfläche eine Kugel ist, deren Radius dem absoluten Werthe von $\frac{a^2}{z_0}$ gleich ist, und deren Mittelpunkt die z-Coordinate $z_0 + \frac{a^2}{z_0}$ hat. Die dichtere Flüssigkeit ist hiernach durch eine convexe Oberfläche begrenzt, wenn z_0 positiv, durch eine concave, wenn z_0 negativ ist. Der Werth von z_0 ist durch den Winkel w_1 bedingt, den die Gleichung 17) der vorigen Vorlesung bestimmt. Handelt es sich z. B. um die Oberfläche einer Flüssigkeit in einer verticalen Röhre von dem Radius R, so ist

$$\text{für } u = R \quad \vartheta = w_1 - \frac{\pi}{2};$$

setzt man diese Werthe in die Gleichung 6), so erhält man

$$z_0 = - \frac{a^2}{R} \cos w_1. \tag{8}$$

Ein Fall, der sich oft der Betrachtung darbietet, ist der, dass $w_1 = 0$ ist; er findet statt, wenn der feste Körper, um den es sich handelt, von der Flüssigkeit 1 *benetzt* wird. In diesem Falle giebt die Gleichung 8)

$$z_0 = - \frac{a^2}{R};$$

die Oberfläche der Flüssigkeit in der Röhre wird dabei eine Halbkugel.

Sind die Werthe von U nicht unendlich klein, aber klein, so bilden die entwickelten Gleichungen eine erste Näherung; suchen wir jetzt eine zweite. Aus der Gleichung 5) folgt, wenn wir die Voraussetzung festhalten, dass die z-Achse die Oberfläche schneidet,

$$a^2 \sin \vartheta = \frac{2}{u} \int_0^u z u \, du. \tag{9}$$

Schreiben wir hier $z_0 + (z - z_0)$ für z, wo z_0 wieder den Werth von z für $u = 0$ bedeutet, so erhalten wir

$$a^2 \sin \vartheta = z_0 u + \frac{2}{u} \int_0^u (z - z_0) u \, du.$$

Wir kommen zu den Formeln der ersten Näherung, zunächst zu der Gleichung 6) zurück, wenn wir das Glied, welches das Integralzeichen enthält, vernachlässigen; wir finden eine zweite, wenn wir in diesem Gliede $z - z_0$ und u mit Hülfe der Gleichungen 7) und 6) durch ϑ ausdrücken. Wir erhalten dadurch

$$a^2 \sin \vartheta = z_0 u + 2 \left(\frac{a^2}{z_0}\right)^2 \frac{1}{\sin \vartheta} \int_0^\vartheta (1 - \cos \vartheta) \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta$$

oder

$$z_0 u = a^2 \sin \vartheta - \left(\frac{a^2}{z_0}\right)^2 \left(\sin \vartheta - \frac{2}{3} \frac{1 - \cos^3 \vartheta}{\sin \vartheta}\right). \qquad 10)$$

Differentiirt man diese Gleichung und multiplicirt das Resultat mit der Gleichung 4), so erhält man eine, deren Integration z als Function von ϑ ergiebt.

In dem Falle der verticalen Röhre vom Radius R giebt die Gleichung 10) einen Werth von z_0, der genauer ist, als der durch 8) bestimmte. Um ihn zu finden, kann man in dem Gliede, durch welches die Gleichungen 10) und 6) sich unterscheiden, z_0 durch 8) ausdrücken. Wird die Röhre benetzt, so bekommt man auf diesem Wege

$$- z_0 = \frac{a^2}{R} - \frac{R}{3}.$$

§ 3.

Man kann die Gleichungen 4) und 5) ferner integriren, wenn man u als unendlich gross annimmt. Man setze

$$u = u_0 + x, \qquad 11)$$

wo u_0 eine unendlich grosse Constante bedeutet, die so gewählt ist, dass für die Punkte, die betrachtet werden, x endlich ist. Führt man in 5) die Differentiation nach u aus und vernachlässigt unendlich Kleines gegen Endliches, so erhält man dann

$$z = \frac{a^2}{2} \frac{d \sin \vartheta}{dx}, \qquad 12)$$

und die Gleichung 4) wird

$$dz = \operatorname{tg} \vartheta \, dx. \qquad 13)$$

Es sind dieses dieselben Gleichungen, welche man unmittelbar aus 2) erhalten haben würde, wenn man die rechtwinkligen Coordinaten

x, y, z beibehalten und die Annahme eingeführt hätte; dass z von y unabhängig ist. Multiplicirt man sie mit einander, so erhält man eine integrable Gleichung und durch Integration

$$z^2 = \text{const.} - a^2 \cos \vartheta$$

oder auch

$$z^2 = 2\,a^2 \left(h - \cos^2 \frac{\vartheta}{2}\right), \tag{14)}$$

wo h eine willkürliche Constante bedeutet. Dieselbe ist nothwendig positiv, da z^2 positiv ist, kann aber grösser oder kleiner als 1 sein. Diese Fälle bieten einen wesentlichen Unterschied dar. Ist $h > 1$, so kann z nicht verschwinden, also auch nicht das Zeichen wechseln; dasselbe gilt, der Gleichung 1) wegen, daher auch von der Krümmung der Curve, deren variabler Punkt die Coordinaten x, z hat; dagegen kann ϑ verschwinden oder $= 2\pi$ werden, d. h. es giebt Punkte, in denen die Tangente horizontal ist und die dichtere Flüssigkeit unter der weniger dichten liegt. Das Umgekehrte findet statt, wenn $h < 1$ ist; dann giebt es keine solche Tangente, ϑ kann nicht verschwinden oder $= 2\pi$ werden, aber z kann $= 0$ sein; es giebt Punkte, die in der Niveauebene liegen, und in denen die Krümmung Null ist.

Für den Fall $h > 1$ setzen wir

$$h = \frac{1}{k^2}, \quad \frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2} = \psi; \tag{15)}$$

bezeichnen wir dann wieder die positiv zu nehmende Wurzelgrösse $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}$ mit $\varDelta\psi$, so wird die Gleichung 14)

$$z^2 = \frac{2\,a^2}{k^2}\,\varDelta^2\psi,$$

oder, wenn wir das Maximum von z in dem Falle, dass z positiv ist, und das Minimum von z im entgegengesetzten Falle durch c bezeichnen, wobei

$$c^2 = \frac{2\,a^2}{k^2} \tag{16)}$$

wird,

$$z = c\,\varDelta\psi. \tag{17)}$$

Die Gleichung 12) giebt

$$z = a^2 \cos 2\psi \frac{d\psi}{dx},$$

woraus bei Rücksicht auf 17) folgt

$$dx = k^2\,\frac{c}{2}\,\frac{\cos 2\psi\, d\psi}{\varDelta\psi}$$

oder

$$x = c\left(\left(\frac{k^2}{2} - 1\right)\int^{\psi} \frac{d\psi}{\varDelta\psi} + \int^{\psi} \varDelta\psi\, d\psi\right), \tag{18)}$$

wo die untere Grenze der beiden Integrale eine willkürliche Constante ist.

Für den Fall $h < 1$ setzen wir in 14)

$$h = \cos^2 \frac{i}{2} = k^2, \tag{19}$$

indem wir unter i einen Werth verstehen, den ϑ erreichen, aber nicht überschreiten kann; und ferner

$$\cos \frac{\vartheta}{2} = \cos \frac{i}{2} \sin \psi; \tag{20}$$

da hiernach

$$z^2 = 2a^2 \cos^2 \frac{i}{2} \cos^2 \psi$$

ist, so können wir zur weiteren Bestimmung von ψ festsetzen:

$$z = \sqrt{2}\, a \cos \frac{i}{2} \cos \psi. \tag{21}$$

Für *einen* Punkt der betrachteten Curve kann man ϑ als zwischen 0 und 2π liegend annehmen, also $\frac{\vartheta}{2}$ als zwischen 0 und π liegend; da nach 20) $\sin \frac{\vartheta}{2}$ nicht verschwinden kann, so liegt $\frac{\vartheta}{2}$ dann immer zwischen den genannten Grenzen und wir erhalten aus 20)

$$\sin \frac{\vartheta}{2} = \varDelta \psi.$$

Die Gleichung 12) wird hiernach

$$z = -a^2 (1 - 2\varDelta^2 \psi) \cos \frac{i}{2} \frac{\cos \psi}{\varDelta \psi} \frac{d\psi}{dx},$$

woraus in Verbindung mit 21) sich ergiebt

$$x = -\frac{a}{\sqrt{2}} \int \frac{d\psi}{\varDelta \psi} + a\sqrt{2} \int \varDelta \psi \, d\psi, \tag{22}$$

wo die untere Grenze der beiden Integrale wiederum eine willkürliche Constante ist.

§ 4.

Die abgeleiteten Gleichungen wollen wir jetzt auf die Fälle anwenden, dass der Modul k der elliptischen Integrale, auf die wir geführt sind, unendlich klein oder $= 1$ ist. Setzen wir zunächst in den Gleichungen 17) und 18) k unendlich klein. Durch Entwickelung nach Potenzen von k^2 finden wir dann

$$z = c\left(1 - \frac{k^2}{2} \sin^2 \psi\right) = c\left(1 - \frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{4} \cos 2\psi\right)$$

und, wenn man benutzt, dass

$$\int \sin^2 \psi \, d\psi = \frac{\psi}{2} - \frac{\sin 2\psi}{4} + \text{const.}$$

ist,

$$x = \frac{c k^2}{2} \sin 2\psi + \text{const.}$$

Diese Ausdrücke von z und x zeigen, dass die Curve, um die es sich handelt, ein Kreis ist, dessen Radius gleich ist dem absoluten Werthe von $\frac{ck^2}{4}$ oder nach 16) von $\frac{a^2}{2c}$. Ist die Flüssigkeit zwischen zwei parallele, verticale Platten eingeschlossen, die von ihr benetzt werden und in der Entfernung $2e$ von einander sich befinden, so muss dieser Kreis die Platten berühren; sein Radius muss $= e$, und also, da c dann negativ ist,

$$c = -\frac{a^2}{2e}$$

sein.

In dem Falle, in dem die Gleichungen 21) und 22) gelten, erhält man, wenn man k, also auch $\cos\frac{i}{2}$ unendlich klein annimmt,

$$z = a\sqrt{2}\cos\frac{i}{2}\cos\psi, \quad x = \frac{a}{\sqrt{2}}\psi + \text{const.};$$

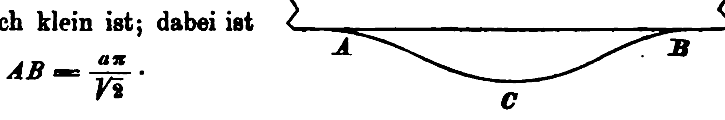
also

$$z = a\sqrt{2}\cos\frac{i}{2}\cos\left(\frac{x\sqrt{2}}{a} + \text{const.}\right).$$

Die hierdurch dargestellte Linie ist eine Sinuslinie. Um ein Beispiel zu erhalten, in dem diese Gleichung gilt, denken wir uns eine horizontale Platte, an deren unterer Fläche eine kleine Menge einer sie benetzenden Flüssigkeit sich befindet; diese kann im Gleichgewicht sein, während ihr Profil die Gestalt ACB hat, abgesehen davon, dass der Abstand des Punktes C von der Geraden AB nicht unendlich klein ist; dabei ist

$$AB = \frac{a\pi}{\sqrt{2}}.$$

Fig. 8.



Für $k = 1$ endlich geben die Gleichungen 17) und 18) dasselbe Resultat wie die Gleichungen 21) und 22); um die Einführung von doppelten Vorzeichen unnöthig zu machen, wollen wir bei der Anwendung jener festsetzen, dass ϑ zwischen 0 und 2π, also nach 15) ψ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ gewählt werde; bei der Anwendung dieser, dass für i, welches 0 oder 2π sein kann, derjenige von diesen beiden Werthen genommen werde, für den das Vorzeichen von $\cos\frac{i}{2}$ mit dem Vorzeichen von z übereinstimmt. Sind diese Bedingungen für *einen* Punkt der zu betrachtenden Curve erfüllt, so sind sie es für alle ihre im Endlichen liegenden Punkte, denn ϑ kann die Grenzen 0 und 2π nicht überschreiten und z das Vorzeichen nicht wechseln, da der Fall, den wir hier betrachten, die Grenze zwischen den beiden Fällen bildet, dass das in der Gleichung

14) vorkommende $h >$ oder < 1 ist. In Folge dieser Festsetzungen ist dann $\cos\psi$ positiv und daher

$$\cos\psi = \Delta\psi.$$

Benutzt man, dass

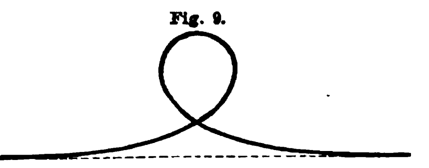
$$\int \frac{d\psi}{\cos\psi} = \lg \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) + \text{const.}$$

ist, so ergiebt sich hieraus

$$\begin{aligned} x &= c\left(\tfrac{1}{2} \lg \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{4} + \cos\frac{\vartheta}{2}\right) + \text{const.} \\ z &= c \sin\frac{\vartheta}{2} \\ z &= \pm a\sqrt{2}. \end{aligned} \qquad 23)$$

Figur 9 soll eine ungefähre Vorstellung von dem Verlauf der durch diese Gleichungen dargestellten Curve geben. Ein Theil derselben kann das Profil der Flüssigkeitsoberfläche bilden; das ist z. B. der Fall, wenn in eine grosse Wassermasse eine ebene Platte in beliebiger Richtung eingetaucht ist.

Fig. 9.



§ 5.

Die in den beiden vorigen Paragraphen entwickelten Gleichungen können als eine erste Näherung für den Fall betrachtet werden, dass die Flüssigkeitsoberfläche eine Rotationsfläche ist, deren Rotationsachse mit der z-Achse zusammenfällt und bei der der Radius u für diejenigen Punkte, die in Betracht kommen, sehr gross ist. Man hat dann, wie es in 11) geschehen ist,

$$u = u_0 + x$$

zu setzen und u_0 als eine sehr grosse Constante zu betrachten. Eine zweite Näherung findet man auf dem folgenden Wege. Die Gleichungen 4) und 5), um deren Integration es sich handelt, lassen sich schreiben

$$z - \frac{a^2 \sin\vartheta}{2u} = \frac{a^2}{2}\frac{d\sin\vartheta}{du}$$

$$dz = \operatorname{tg}\vartheta\, du.$$

Man multiplicire dieselben mit einander und forme das dann auftretende Glied

$$-\frac{a^2 \sin\vartheta\, dz}{u},$$

welches bei der ersten Näherung vernachlässigt ist, dadurch um, dass

man u_0 für u setzt und die Gleichungen benutzt, die bei der ersten Näherung gelten. Dadurch erhält man eine Gleichung, die integrirt werden kann und z als Function von ϑ auszudrücken erlaubt. Ist das geschehen, so kann man mit Hülfe der Gleichung 4) auch u als Function von ϑ darstellen.

Beschränken wir uns auf den Fall, für welchen in erster Näherung die Gleichungen 23) gelten, so finden wir auf dem bezeichneten Wege

$$z\,dz \mp \frac{a^3 \sin\vartheta \cos\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta}{2\sqrt{2}\,u_0} = \frac{a^2}{2}\sin\vartheta\,d\vartheta,$$

wo, wie auch im Folgenden, von den Doppelzeichen das obere oder das untere zu nehmen ist, je nachdem z positiv oder negativ ist. Durch Integration folgt hieraus

$$z^2 = -a^2\cos\vartheta \mp \frac{2\sqrt{2}\,a^3}{3u_0}\cos^3\frac{\vartheta}{2} + \text{const.}$$

Um die Constante der Integration zu bestimmen, hat man zu beachten, dass z verschwinden muss, wenn $x = +\infty$ wird, und dass, wie aus der ersten der Gleichungen 23) hervorgeht, $x = +\infty$ ist, wenn $\vartheta = 2\pi$ oder $= 0$ ist, je nachdem z positiv oder negativ ist. Bestimmt man hiernach die mit const. bezeichnete Grösse, zieht die Quadratwurzel und vernachlässigt die höheren Potenzen von $\frac{a}{u_0}$, so findet man bei Rücksicht auf das Vorzeichen, welches z haben soll,

$$z = \pm a\sqrt{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\left(1 - \frac{a}{3\sqrt{2}\,u_0}\cdot\frac{1 \pm \cos^3\frac{\vartheta}{2}}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\right). \qquad 24)$$

Diese Gleichung kann auf einen Fall angewendet werden, den wir in der vorigen Vorlesung betrachtet haben, und auf den die Gleichung 23) derselben sich bezieht, auf den Fall nämlich, dass eine horizontale kreisförmige Platte mit ihrer unteren Fläche eine Flüssigkeit berührt. Wir setzen von dieser jetzt voraus, dass ihre Oberfläche sich in die Unendlichkeit erstreckt, und nennen u_0 den Radius der Platte, z_0 und ϑ_0 die Werthe von z und ϑ für $u = u_0$. Es haben z_0 und ϑ_0 dann dieselbe Bedeutung, wie an dem angeführten Orte und die Gleichung 24) giebt die Beziehung zwischen diesen beiden Grössen, auf welche dort hingewiesen worden ist.

Wir werden die Capillarerscheinungen nicht weiter verfolgen und bei unseren weiteren Untersuchungen auf die Capillarkräfte keine Rücksicht nehmen. Bei ihrer Erörterung haben wir keinen Gebrauch von dem Begriffe des Druckes gemacht, der in den allgemeinen Gleichungen der Hydrostatik und Hydrodynamik eine wichtige

Rolle spielt. Dieser Begriff hat auch hier seine Bedeutung. Bei einer Flüssigkeit, auf welche Capillarkräfte wirken, ändert sich der Druck im Innern gerade so, als ob diese Kräfte nicht vorhanden wären, aber unendlich nahe an der Oberfläche ändert er sich unendlich schnell. Die Capillarkräfte, die auf ein Theilchen wirken, welches in endlicher Entfernung von der Oberfläche liegt, heben sich nämlich auf, an der Oberfläche aber geben sie unendlich grosse Resultanten. Hierdurch werden bei der Untersuchung der Capillarerscheinungen Schwierigkeiten herbeigeführt, wenn man den genannten Begriff benutzen will; wir haben diese vermieden, indem wir einen anderen, zuerst von Gauss betretenen Weg eingeschlagen haben.

Fünfzehnte Vorlesung.

(Hydrodynamik. Differentialgleichungen von Lagrange und von Euler. Rotationen der Flüssigkeitstheilchen. Wirbellinien und Wirbelfäden. Geschwindigkeitspotential. Mehrwerthiges Geschwindigkeitspotential in einem mehrfach zusammenhängenden Raume.)

§ 1.

Wir wenden uns jetzt zur Hydrodynamik und zunächst zu denjenigen Bewegungen der Flüssigkeiten, bei denen die Reibung sich nicht merklich macht. Wir haben es hier mit der Entwickelung der Gleichungen 23) und 24) der eilften Vorlesung, d. h. der Gleichungen

$$\begin{aligned} \mu \frac{d^2 x}{dt^2} &= \mu X - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \mu \frac{d^2 y}{dt^2} &= \mu Y - \frac{\partial p}{\partial y} \\ \mu \frac{d^2 z}{dt^2} &= \mu Z - \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\frac{d\mu}{dt} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \tag{2}$$

zu thun, zu welchen eine Relation zwischen dem Drucke p und der Dichtigkeit μ hinzukommt.

Wir formen zuerst die Gleichung 2) um, welche ausspricht, dass ein Massenelement bei seiner Bewegung ungeändert bleibt, und welche die *Gleichung der Continuität* genannt zu werden pflegt. Wir nennen x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des materiellen Punktes der Flüssigkeit zur Zeit t_0, der zur Zeit t die Coordinaten x, y, z hat. Das Verhältniss der Volumina, welche dieser Punkt zu den Zeiten t und t_0 einnimmt, ist dann die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0}, & \frac{\partial x}{\partial y_0}, & \frac{\partial x}{\partial z_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0}, & \frac{\partial y}{\partial y_0}, & \frac{\partial y}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z}{\partial x_0}, & \frac{\partial z}{\partial y_0}, & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix},$$

wie aus der Gleichung 13) der zehnten Vorlesung hervorgeht, wenn man erwägt, dass die Grössen, die in den Gleichungen 26) derselben

Vorlesung a, b, c genannt, hier mit x_0, y_0, z_0 bezeichnet sind. Die Bedingung, dass diese Determinante, mit μ multiplicirt, von t unabhängig ist, ist hiernach gleichbedeutend mit der Gleichung 2). Nun sollen a, b, c irgend welche von einander unabhängige Grössen bedeuten, die den materiellen Punkt, dessen Coordinaten zur Zeit t x, y, z sind, bestimmen; es bestehen dann 9 Gleichungen, von denen die übrigen aus der einen

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial x_0}{\partial a} + \frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial a} + \frac{\partial x}{\partial z_0}\frac{\partial z_0}{\partial a}$$

durch Vertauschung von x mit y, z oder von a mit b, c hergeleitet werden können. In Folge dieser Gleichungen ist, wenn

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a}, & \frac{\partial x}{\partial b}, & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a}, & \frac{\partial y}{\partial b}, & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a}, & \frac{\partial z}{\partial b}, & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = D \tag{3}$$

gesetzt wird, nach einem Satze der Determinantentheorie, den wir am Ende des § 2 der zehnten Vorlesung abzuleiten Gelegenheit gehabt haben,

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0}, & \frac{\partial x}{\partial y_0}, & \frac{\partial x}{\partial z_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0}, & \frac{\partial y}{\partial y_0}, & \frac{\partial y}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z}{\partial x_0}, & \frac{\partial z}{\partial y_0}, & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial a}, & \frac{\partial x_0}{\partial b}, & \frac{\partial x_0}{\partial c} \\ \frac{\partial y_0}{\partial a}, & \frac{\partial y_0}{\partial b}, & \frac{\partial y_0}{\partial c} \\ \frac{\partial z_0}{\partial a}, & \frac{\partial z_0}{\partial b}, & \frac{\partial z_0}{\partial c} \end{vmatrix}.$$

Hieraus folgt, dass die Gleichung 2) durch die Bedingung, dass μD von t unabhängig ist, d. h. durch die Gleichung

$$\frac{d(\mu D)}{dt} = 0 \tag{4}$$

ersetzt werden kann.

Die Gleichungen 1) multipliciren wir

$$\text{mit } \frac{\partial x}{\partial a} \text{ oder mit } \frac{\partial x}{\partial b} \text{ oder mit } \frac{\partial x}{\partial c}$$
$$\quad \frac{\partial y}{\partial a} \qquad\qquad \frac{\partial y}{\partial b} \qquad\qquad \frac{\partial y}{\partial c}$$
$$\quad \frac{\partial z}{\partial a} \qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial b} \qquad\qquad \frac{\partial z}{dc}$$

und addiren sie jedesmal; sie werden dann

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial a} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial a} = 0 \\ \left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial b} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial b} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial b} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial b} = 0 \\ \left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial c} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial c} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial c} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial c} = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Die Gleichungen 4) und 5) sind unter dem Namen der Lagrangeschen hydrodynamischen Gleichungen bekannt; man hat bei ihnen x, y, z, p sich als Functionen der unabhängigen Variabeln a, b, c, t vorzustellen.

Die Oberfläche der Flüssigkeit muss nach § 6 der zehnten Vorlesung immer aus denselben Theilchen gebildet sein. Denken wir uns die Gleichung derselben als eine Gleichung zwischen x, y, z, t, so muss daher, wenn man x, y, z durch a, b, c, t ausdrückt, t herausfallen; die Gleichung der Oberfläche muss eine Gleichung zwischen a, b, c sein. Eine zweite Bedingung, die an dieser Oberfläche, d. h. an der Fläche, an der die Flüssigkeit einen andern Körper berührt, zu erfüllen ist, ergiebt sich aus § 4 der eilften Vorlesung: ein Element der Berührungsfläche muss von jeder Seite aus *denselben* Druck erleiden.

Wir nehmen mit den Gleichungen 5) noch eine Aenderung vor. Wir setzen zuerst

$$P = \int \frac{dp}{\mu} \qquad 6)$$

und denken uns dieses Integral ausgeführt mit Hülfe der Relation, die zwischen p und μ besteht, die untere Grenze beliebig gewählt. Wir machen ferner die Annahme, dass die Kräfte X, Y, Z ein Potential, V, haben, so dass

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

ist. Dann vereinfachen sich die Gleichungen 5) zu den folgenden

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial a} &= \frac{\partial (V-P)}{\partial a} \\ \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial b} &= \frac{\partial (V-P)}{\partial b} \\ \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial c} &= \frac{\partial (V-P)}{\partial c}. \end{aligned} \qquad 7)$$

Ist die Flüssigkeit incompressibel, so wird die Gleichung 4)

$$\frac{dD}{dt} = 0 \qquad 8)$$

und nach 6) kann man setzen

$$P = \frac{1}{\mu} p. \qquad 9)$$

§ 2.

Für die Anwendung ist oft eine andere Form der hydrodynamischen Gleichungen, die sogenannte Euler'sche, bequemer als die Lagrange'sche; bei ihr hat man sich die Geschwindigkeiten u, v, w

und den Druck p als Functionen von x, y, z, t vorzustellen. Man hat

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w,$$

also

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dw}{dt};$$

nun bedenke man, dass das Zeichen d den Zuwachs bezeichnet, den die dahinter stehende Grösse, bezogen auf *denselben* materiellen Punkt, in dem Zeitelement dt erleidet, d. h. den Zuwachs, den sie erfährt, während t um dt wächst, a, b, c aber ungeändert bleiben. Bleiben a, b, c ungeändert, so wachsen x, y, z resp. um udt, vdt, wdt, wenn t um dt zunimmt; hieraus folgt

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

und es gelten die Gleichungen, die aus dieser entstehen, wenn man unter den Differentiationszeichen u gegen v oder w oder μ vertauscht. Führt man auch hier die durch 6) definirte Grösse P und die Voraussetzung ein, dass die wirkenden Kräfte das Potential V haben, so werden hiernach die Gleichungen 1) und 2)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial (V-P)}{\partial x}\\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\partial (V-P)}{\partial y}\\
\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial (V-P)}{\partial z}
\end{aligned} \tag{10}$$

und

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial (\mu u)}{\partial x} + \frac{\partial (\mu v)}{\partial y} + \frac{\partial (\mu w)}{\partial z} = 0. \tag{11}$$

Für ein Element der Fläche, in der die Flüssigkeit einen andern Körper berührt, gilt nach Gleichung 32) der zehnten Vorlesung *die* Bedingung, dass die Componente der Geschwindigkeit nach der Normale für beide Körper denselben Werth hat, und zu dieser tritt wieder die zweite hinzu, dass das Element von jeder Seite her denselben Druck erleidet.

Ist die Flüssigkeit incompressibel, so erhält P auch hier den durch 9) bestimmten Werth und die Gleichung 11) wird

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{12}$$

§ 3.

Wir haben in der zehnten Vorlesung gesehen, dass die Veränderung, welche ein unendlich kleiner Theil eines Körpers bei seiner Bewegung erfährt, zusammengesetzt ist aus einer Verschiebung,

einer Drehung und einer Ausdehnung gewisser Art, und haben in 28) Ausdrücke für die Componenten der Drehungsgeschwindigkeit aufgestellt. Nennen wir π, χ, ϱ diese Componenten, so ist, wie wir dort gefunden haben,

$$
\begin{aligned}
2\pi &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\
2\chi &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\
2\varrho &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Wir wollen jetzt in Bezug auf die Drehung der Flüssigkeitstheilchen gewisse Sätze ableiten, welche gelten, sobald die wirkenden Kräfte ein Potential haben, und welche von Helmholtz*) entdeckt worden sind. Wir gehen von den Gleichungen 7) aus.

Differentiirt man die zweite von diesen nach c, die dritte nach b und zieht die Resultate von einander ab, so erhält man eine Gleichung, die nach t integrirt werden kann, da

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial b}\right) - \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial c}\right) &= \frac{\partial x}{\partial b}\frac{d^2 \frac{\partial x}{\partial c}}{dt^2} - \frac{\partial x}{\partial c}\frac{d^2 \frac{\partial x}{\partial b}}{dt^2} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{d\frac{\partial x}{\partial c}}{dt} - \frac{\partial x}{\partial c}\frac{d\frac{\partial x}{\partial b}}{dt}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial u}{\partial c} - \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial u}{\partial b}\right)
\end{aligned}
$$

ist und die beiden Relationen bestehen, die aus dieser hervorgehen, wenn man u und x mit v und y oder w und z vertauscht. Aus dieser einen integrabeln Gleichung erhält man zwei andere, wenn man a, b, c cyklisch vertauscht. Bezeichnet man durch A', B', C' drei von t unabhängige Grössen, so hat man daher

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial v}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial w}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b} - \frac{\partial w}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} &= 2A' \\
\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial c} - \frac{\partial v}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial w}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a} &= 2B' \\
\frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a} - \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a} - \frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a} - \frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b} &= 2C'.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Diese Gleichungen lassen sich auf eine einfachere Form bringen. Zu diesem Zwecke multipliciren wir sie zuerst mit $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial x}{\partial b}$, $\frac{\partial x}{\partial c}$ und addiren sie. Die Glieder, welche u enthalten, heben sich dann fort;

*) Borchardt's Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 55.

die Glieder, welche von v, und diejenigen, welche von w abhängen, ziehen sich zusammen, wenn man die Differentialquotienten von a, b, c nach x, y, z in die Rechnung einführt. Wir denken uns die Gleichungen, welche x, y, z als Functionen von a, b, c, t darstellen, nach a, b, c aufgelöst, so dass diese Grössen als Functionen von x, y, z, t erscheinen. Wir bezeichnen durch da, db, dc und dx, dy, dz entsprechende Aenderungen, welche a, b, c und x, y, z erleiden, während t ungeändert bleibt; die Gleichungen

$$da = \frac{\partial a}{\partial x} dx + \frac{\partial a}{\partial y} dy + \frac{\partial a}{\partial z} dz$$

$$db = \frac{\partial b}{\partial x} dx + \frac{\partial b}{\partial y} dy + \frac{\partial b}{\partial z} dz$$

$$dc = \frac{\partial c}{\partial x} dx + \frac{\partial c}{\partial y} dy + \frac{\partial c}{\partial z} dz$$

sind dann die Auflösungen der Gleichungen

$$dx = \frac{\partial x}{\partial a} da + \frac{\partial x}{\partial b} db + \frac{\partial x}{\partial c} dc$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial a} da + \frac{\partial y}{\partial b} db + \frac{\partial y}{\partial c} dc$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial a} da + \frac{\partial z}{\partial b} db + \frac{\partial z}{\partial c} dc.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial a}{\partial z} = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} - \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c}\right)$$

$$\frac{\partial b}{\partial z} = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial a} - \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a}\right)$$

$$\frac{\partial c}{\partial z} = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b}\right),$$

wo D die in 3) angegebene Bedeutung hat. Hiernach sind die Glieder, welche v enthalten, in der Gleichung, die wir aus den Gleichungen 14) zu bilden beschäftigt sind,

$$D\left(\frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial z}\right)$$

d. h.

$$D\frac{\partial v}{\partial z}.$$

In ähnlicher Weise findet man das von w abhängige Glied derselben Gleichung

$$= - D\frac{\partial w}{\partial y},$$

so dass ihre linke Seite ist

$$D\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right), \text{ oder nach 13) } -2D\varkappa.$$

Setzen wir noch

$$A' = -A\mu D, \quad B' = -B\mu D, \quad C' = -C\mu D,$$

wobei dann auch A, B, C drei von t unabhängige Grössen bedeuten, da nach 4) das Product μD von t unabhängig ist, und fügen der gebildeten Gleichung die beiden hinzu, die aus ihr entstehen, wenn man für x und π setzt y und χ oder z und ϱ, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \pi &= \mu\left(A\frac{\partial x}{\partial a} + B\frac{\partial x}{\partial b} + C\frac{\partial x}{\partial c}\right) \\ \chi &= \mu\left(A\frac{\partial y}{\partial a} + B\frac{\partial y}{\partial b} + C\frac{\partial y}{\partial c}\right) \\ \varrho &= \mu\left(A\frac{\partial z}{\partial a} + B\frac{\partial z}{\partial b} + C\frac{\partial z}{\partial c}\right). \end{aligned} \tag{15)}$$

Wir haben unter a, b, c irgend welche Grössen verstanden, welche ein Flüssigkeitstheilchen bestimmen; bei der Discussion der Gleichungen 15) wollen wir annehmen, dass a, b, c die Coordinaten sind, welche ein Theilchen im Augenblicke $t = 0$ hat, also die Werthe, welche x, y, z für $t = 0$ besitzen. Die Grössen A, B, C haben dann eine leicht angebbare Bedeutung; sie sind die Werthe, welche $\frac{\pi}{\mu}, \frac{\chi}{\mu}, \frac{\varrho}{\mu}$ für $t = 0$ haben. Daraus fliesst zunächst diese Folgerung: Wenn ein Flüssigkeitstheilchen im Augenblick $t = 0$ nicht rotirt, wenn also für dasselbe in diesem Augenblicke π, χ, ϱ gleich Null sind, so müssen für dasselbe A, B, C, also nach 15) π, χ, ϱ zu jeder Zeit, verschwinden; ein Flüssigkeitstheilchen, welches *einmal* nicht rotirt, rotirt *niemals*.

Ein anderer Schluss, der aus den Gleichungen 15) gezogen werden kann, ist der folgende. Es seien a, b, c und $a + da, b + db, c + dc$ die Anfangscoordinaten zweier unendlich naher Theilchen, x, y, z und $x + dx, y + dy, z + dz$ also die Coordinaten derselben Theilchen zur Zeit t; da, db, dc sollen so gewählt sein, dass

$$da : db : dc = A : B : C$$

ist, also so, dass für $t = 0$ die Verbindungslinie der beiden Theilchen mit der Drehungsachse an ihrem Orte zusammenfällt. Diese Doppelproportion ist gleichbedeutend mit den Gleichungen

$$da = A\varepsilon, \quad db = B\varepsilon, \quad dc = C\varepsilon,$$

wo ε eine unendlich kleine, von t unabhängige Grösse bedeutet. Setzt man die hieraus sich ergebenden Werthe von A, B, C in die Gleichungen 15), so werden diese

$$dx = \frac{\pi}{\mu}\varepsilon, \quad dy = \frac{\chi}{\mu}\varepsilon, \quad dz = \frac{\varrho}{\mu}\varepsilon; \tag{16)}$$

d. h. es ist

$$dx : dy : dz = \pi : \chi : \varrho.$$

Hierdurch ist ausgesprochen, dass die Verbindungslinie der beiden betrachteten Theilchen *immer* mit ihrer Drehungsachse zusammenfällt.

Bezeichnen wir mit k die Drehungsgeschwindigkeit, d. h. setzen wir

$$k = \sqrt{\pi^2 + \chi^2 + \varrho^2},$$

so geben die Gleichungen 16)

$$k = \frac{\mu}{\varepsilon} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \tag{17}$$

d. h. die Drehungsgeschwindigkeit ändert sich mit der Zeit so, dass sie proportional mit dem Producte aus dem Abstande der beiden Theilchen in die Dichtigkeit bleibt.

Den durch die Gleichungen 16) und 17) ausgesprochenen Sätzen wollen wir noch eine andere Form geben. Wir denken uns in einem Augenblicke, von einem beliebigen Punkte der Flüssigkeit ausgehend, eine Linie, deren Richtung überall übereinstimmt mit der Richtung der Drehungsachse der Theilchen, die sie eben trifft; eine solche Linie nennen wir mit Helmholtz eine *Wirbellinie*. Die Gleichungen 16) sagen dann aus, dass alle Flüssigkeitstheilchen, welche in *einem* Augenblicke auf einer Wirbellinie liegen, zu jeder Zeit auf einer solchen sich befinden. Wir können hiernach von den Aenderungen reden, die eine Wirbellinie mit der Zeit erfährt, indem wir festsetzen, dass eine Wirbellinie immer durch dieselben Flüssigkeitstheilchen geht.

Um den in der Gleichung 17) bewiesenen Satz auf eine neue Weise auszusprechen, definiren wir noch einen Ausdruck. Unter einem *Wirbelfaden* verstehen wir einen unendlich dünnen Faden, welcher aus der Flüssigkeit durch die Wirbellinien ausgeschnitten wird, die durch die Punkte des Umfanges einer unendlich kleinen Fläche gehen. Wir können von den Aenderungen sprechen, die ein Wirbelfaden mit der Zeit erleidet, indem wir festsetzen, dass ein Wirbelfaden immer dieselben Flüssigkeitstheilchen enthält. Wir betrachten ein unendlich kurzes Stück eines Wirbelfadens und nennen l seine Länge, q seinen Querschnitt; $\mu q l$ ist dann seine Masse und ändert sich also mit der Zeit nicht; nach 17) ist aber die Drehungsgeschwindigkeit k dieses Stückes mit μl proportional; daraus folgt, dass qk constant ist, dass also das Product aus der Drehungsgeschwindigkeit in den Querschnitt eines unendlich kurzen Stückes eines Wirbelfadens mit der Zeit sich nicht ändert.

Wir beweisen noch eine Eigenschaft desselben Productes qk. Es sei $d\tau$ ein Element des Volumens eines beliebigen Theiles der

Flüssigkeit, ds ein Element der Oberfläche dieses Theiles und n die nach seinem Innern gerichtete Normale von ds. Nach einem von uns schon vielfach benutzten Satze ist dann

$$\int d\tau\left(\frac{\partial \pi}{\partial x}+\frac{\partial \chi}{\partial y}+\frac{\partial \varrho}{\partial z}\right)=-\int ds\left(\pi \cos(nx)+\chi\cos(ny)+\varrho\cos(nz)\right)$$

$$\text{oder}\quad =-\int ds\, k\cos(kn)\,, \qquad 18)$$

wenn wir durch k gleichzeitig die Richtung der Drehungsachse und die Grösse der Drehungsgeschwindigkeit bezeichnen. Aus den Gleichungen 13) folgt aber, dass der Factor von $d\tau$, mithin das Integral auf der linken Seite der Gleichung 18) verschwindet; es verschwindet also auch das Integral auf ihrer rechten Seite. Diesen Satz wenden wir auf einen Theil eines Wirbelfadens an, der durch zwei zu seiner Länge senkrechte Querschnitte begrenzt ist; q' und q'' seien die Grössen dieser beiden Querschnitte, k' und k'' die entsprechenden Werthe der Drehungsgeschwindigkeit; für den einen der beiden Querschnitte ist

$$\cos(kn)=1\,,$$

für den andern

$$=-1\,,$$

während für alle anderen Theile der Oberfläche dieser Cosinus verschwindet. Der bewiesene Satz giebt daher

$$q'k'=q''k''.$$

Das Product aus der Drehungsgeschwindigkeit in den Querschnitt eines Wirbelfadens, welches für denselben Theil sich mit der Zeit nicht ändert, ist in demselben Augenblick auch für alle seine Theile dasselbe.

Hieraus ist zu schliessen, dass ein Wirbelfaden im Innern der Flüssigkeit nicht aufhören kann. Ein Wirbelfaden endigt entweder in der Oberfläche der Flüssigkeit oder läuft in sich zurück.

§ 4.

Wenn alle Theilchen der betrachteten Flüssigkeit in einem Augenblicke nicht rotiren, so rotiren sie nach einem der im vorigen Paragraphen bewiesenen Sätze niemals; immer und überall ist dann in Folge der Gleichungen 13)

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial y}\,,\quad \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}\,,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}\,.$$

Diese Gleichungen bilden die Bedingung dafür, dass es eine Function von x, y, z, t giebt, die wir durch φ bezeichnen wollen, die die Eigenschaft hat, dass

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{19)}$$

ist. Diese Function φ ist von Helmholtz mit dem Namen *Geschwindigkeitspotential* belegt. Wenn die Bewegung vollkommen bestimmt ist, also u, v, w bestimmte Functionen von x, y, z, t sind, so ist das Geschwindigkeitspotential noch nicht vollkommen bestimmt; in seinem Ausdrucke bleibt eine additive Function von t willkürlich, da die Gleichungen 19) die einzigen sind, denen φ zu genügen hat, und aus denen es zu berechnen ist.

Setzt man die Werthe von u, v, w aus 19) in die Euler'schen Gleichungen 10), multiplicirt dieselben mit dx, dy, dz und addirt sie, so erhält man eine integrable Gleichung, und durch Integration

$$V - P = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right) + C,$$

wo C eine Grösse bedeutet, die von x, y, z unabhängig ist, aber von t abhängen kann. Differentiirt man diese Gleichung partiell nach x, y oder z, so kommt man in der That zu den Gleichungen, die aus 10) durch 19) entstehen. Ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, kann man die Grösse $C = 0$ setzen, so dass man hat

$$V - P = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right), \tag{20)}$$

indem man über die additive Function von t, die in φ vorkommt, passend verfügt denkt; dadurch wird dann für einen bestimmten Fall φ bestimmt bis auf eine additive, sowohl von t, als von x, y, z unabhängige Grösse, die willkürlich bleibt; vorausgesetzt, dass V vollständig gegeben ist, dass also über die additive, willkürliche Function von t verfügt ist, die in seinem Ausdrucke vorkommt, wenn nur die wirkenden Kräfte gegeben sind.

Die Gleichung der Continuität in der Euler'schen Form, die Gleichung 11) nämlich, wird durch Einführung des Geschwindigkeitspotentials

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial\left(\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\mu \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)}{\partial z} = 0. \tag{21)}$$

Das Geschwindigkeitspotential φ ist nicht immer eine einwerthige Function von x, y, z, t; es kann vielwerthig sein, aber nur unter einer gewissen Bedingung, und auch dann nur in gewisser Weise, wie wir jetzt zeigen wollen.

Gesetzt φ' und φ'' seien zwei Werthe von φ für ein Werthsystem von x, y, z, t; die Differenz $\varphi' - \varphi''$ muss dann ungeändert bleiben, wenn bei ungeändertem t der Punkt (x, y, z) stetig in der Flüssigkeit verrückt wird und für φ' und φ'' immer diejenigen

Werthe von φ genommen werden, die sich stetig an einander schliessen; es müssen nämlich die Differentialquotienten nach x, y, z von φ' und φ'' einander gleich sein, da sie die Geschwindigkeiten u, v, w sind. Wenn das Potential der wirkenden Kräfte, V, einwerthig ist, so kann jene Differenz $\varphi' - \varphi''$ auch mit der Zeit sich nicht ändern; denn da P nach seiner in 6) gegebenen Definition, wie p und μ, einwerthig ist, so folgt dann aus 20), dass auch $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ nur *einen* Werth haben kann.

Wir haben nun noch die Bedingung aufzusuchen, unter der eine Vielwerthigkeit von φ stattfinden kann; da $\varphi' - \varphi''$ von der Zeit und vom Orte, wie wir eben gesehen haben, unabhängig ist, vorausgesetzt, dass die ganze betrachtete Flüssigkeit eine zusammenhängende ist, so brauchen wir nur festzustellen, unter welcher Bedingung diese Differenz in einem Augenblicke und in einem Punkte von Null verschieden sein kann. *Einen* Werth von φ können wir hier beliebig wählen wegen der additiven Constanten, die in φ willkürlich geblieben ist; wir setzen ihn $= 0$, und haben dann zuzusehen, ob hier φ einen von Null verschiedenen Werth haben kann. Für einen Punkt (x, y, z), der von dem gewählten verschieden ist, (und für den betrachteten Augenblick) finden wir einen Werth von φ, indem wir ihn mit diesem durch eine beliebige Linie, die nur nicht die Grenze der Flüssigkeit überschreiten darf, verbinden und über diese Linie das Integral

$$\int (u dx + v dy + w dz) \tag{22}$$

ausdehnen. Lassen wir diese Linie bis zu dem ursprünglich gewählten Punkte zurücklaufen, so kann das Integral 22) einen von Null verschiedenen Werth von φ für denselben Punkt geben; ist das der Fall, so ist φ mehrwerthig; ist aber das Integral 22) für *alle* Linien der bezeichneten Art $= 0$, so ist φ einwerthig. Denken wir uns nun, dass eine solche Linie stetig in eine andere übergeführt werde, ohne dass bei einer Zwischenlage die für sie angegebene Bedingung verletzt wird; das betrachtete Integral ändert sich dabei stetig oder gar nicht; der erste Fall kann nicht eintreten, da eine mehrwerthige Function für ein Werthsystem ihrer Argumente eine Reihe von stetig sich aneinander schliessenden Werthen nicht darbieten kann; das Integral ändert sich also gar nicht. Ist die Linie unendlich klein, so ist das Integral Null; es ist daher für jede Linie Null, die sich in der bezeichneten Weise in eine unendlich kleine überführen lässt. Das Resultat dieser Schlüsse ist, dass das Geschwindigkeitspotential einwerthig sein muss, wenn eine jede geschlossene Linie, die in der Flüssigkeit in einem Augenblicke durch einen Punkt gezogen werden kann, sich stetig und ohne aus der Flüssig-

keit herauszutreten in diesen Punkt zusammenziehen lässt. Ob diese Bedingung erfüllt ist, hängt von der Gestalt des Raumes ab, den die Flüssigkeit einnimmt. Man nennt einen Raum, für den sie erfüllt ist, einen *einfach zusammenhängenden*. Dieser Name beruht auf einer andern Eigenschaft eines solchen Raumes, die mit der angegebenen nothwendig verbunden ist, auf der Eigenschaft, durch jeden *Querschnitt* in zwei getrennte Theile zu zerfallen. Unter einem Querschnitt ist dabei eine Fläche zu verstehen, die ganz im Innern des Raumes liegt, sich selbst nicht schneidet und vollkommen begrenzt ist durch ihren Schnitt mit der Oberfläche des Raumes. Ein Beispiel eines einfach zusammenhängenden Raumes ist eine volle Kugel oder eine Kugel, aus der eine kleinere ausgeschnitten ist. Das zweite Beispiel soll darauf aufmerksam machen, dass ein einfach zusammenhängender Raum nicht durch *eine* zusammenhängende Fläche begrenzt zu sein braucht. Einem einfach zusammenhängenden Raume steht gegenüber ein *zweifach*, *dreifach* überhaupt *mehrfach* zusammenhängender. Ein zweifach zusammenhängender Raum ist ein solcher, der durch *einen* passend gewählten Querschnitt in einen einfach zusammenhängenden verwandelt wird; ein dreifach zusammenhängender kann durch *einen* Querschnitt zu einem zweifach zusammenhängenden gemacht werden, u. s. f. Ein Beispiel eines zweifach zusammenhängenden Raumes bildet ein Ring oder eine Kugel, aus der ein Ring ausgeschnitten ist. Es ist hier nicht erforderlich, den Begriff des Zusammenhanges eines Raumes allgemein mit Strenge zu begründen und dabei den Nachweis zu führen, dass immer die beiden für einen einfach zusammenhängenden Raum angegebenen Merkmale mit einander verbunden sind; in den einfachen Fällen, in denen wir von jenem Begriff Gebrauch zu machen haben werden, ist er der Anschauung unmittelbar zugänglich.

Sechszehnte Vorlesung.

(Incompressible Flüssigkeiten. Potential von Massen, die in Punkten concentrirt, oder in einem Raume oder in einer Fläche stetig verbreitet sind. Potential einer Doppelschicht. Der Green'sche Satz. Darstellung einer Function V, die in einem Raume der Gleichung $\Delta V = 0$ genügt und mit ihren ersten Differentialquotienten einwerthig und stetig ist, durch die Summe der Potentiale einer einfachen Massenschicht und einer Doppelschicht in der Oberfläche des Raumes. Bedingungen, welche zur Bestimmung von V genügen. Stromlinien und Stromfäden. Fall, dass der zu betrachtende Raum sich in die Unendlichkeit erstreckt. Mehrwerthige Lösungen der Gleichung $\Delta \varphi = 0$. Massenpotentiale, die nur von zwei Coordinaten abhängig sind.)

§ 1.

Wir werden uns jetzt mit der Bewegung einer incompressibeln Flüssigkeit unter der Voraussetzung, dass ein Geschwindigkeitspotential existirt, beschäftigen. Die Gleichung 21) der vorigen Vorlesung, die für dieses gilt, geht für eine incompressible Flüssigkeit über in

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Mit den Lösungen dieser partiellen Differentialgleichung, die wir der Kürze wegen

$$\Delta \varphi = 0 \tag{1}$$

schreiben wollen, werden wir es hier zu thun haben. Wir leiten zuerst gewisse Eigenschaften der *einwerthigen* Lösungen derselben ab.

Ist r die Entfernung des Punktes (x, y, z) von einem Punkte (a, b, c), d. h. ist

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

und m eine Constante, so ist

$$\frac{m}{r} \tag{2}$$

eine particuläre Lösung der Gleichung 1); denn es ist

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{a-x}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = 3\frac{(a-x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}.$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} = \frac{b-y}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} = 3\frac{(b-y)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} = \frac{c-z}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} = 3\frac{(c-z)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3},$$

also

$$\varDelta \frac{1}{r} = 0, \quad \text{mithin auch } \varDelta \frac{m}{r} = 0.$$

Wir wollen, wie wir es früher gethan haben, den Ausdruck 2) das *Potential* der *Masse* m in Bezug auf den Punkt (x, y, z) nennen, dabei aber eine Masse als positiv oder negativ annehmen. Dieses Potential ist stetig im ganzen Raume mit Ausnahme des Punktes, in dem die Masse sich befindet, wo es unendlich wird. In der Unendlichkeit werden das Potential und seine Differentialquotienten unendlich klein. Nennen wir dasselbe U und bezeichnen durch R der Grösse und Richtung nach die Linie, die vom Anfangspunkte der Coordinaten nach dem Punkte (x, y, z) gezogen ist, so nähern sich, wenn R ins Unendliche wächst, die Grössen

$$RU, \quad R^2 \frac{\partial U}{\partial x}, \quad R^2 \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R^2 \frac{\partial U}{\partial z}$$

den Werthen $m, \; -m\cos(Rx), \; -m\cos(Ry), \; -m\cos(Rz)$,

vorausgesetzt, dass der Punkt (a, b, c) ebenso wie der Anfangspunkt der Coordinaten im Endlichen liegen.

Die Gleichung 1) ist linear und homogen; daraus folgt, dass eine Summe von Lösungen wieder eine Lösung derselben ist; es ist also auch

$$\sum \frac{m}{r}$$

eine Lösung, wo die einzelnen Glieder der Summe sich durch verschiedene Werthe von a, b, c und m unterscheiden. Wir werden diesen Ausdruck das Potential der Massen m, die in den Punkten (a, b, c) liegen, zu nennen haben. Es ist überall stetig, ausser in diesen Punkten, wo es unendlich ist. Bezeichnen wir es durch U und lassen dem Buchstaben R die Bedeutung, in der wir ihn eben gebraucht haben, so nähern sich, wenn R ins Unendliche wächst, die Grössen

$$RU, \quad R^2 \frac{\partial U}{\partial x}, \quad R^2 \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R^2 \frac{\partial U}{\partial z}$$

den Werthen

$$\sum m, \; -\cos(Rx)\sum m, \; -\cos(Ry)\sum m, \; -\cos(Rz)\sum m. \qquad 3)$$

§ 2.

Wir werden nun das Potential, U, von Massen betrachten, die einen Raum stetig erfüllen; $d\tau$ sei ein Element dieses Raumes, k die Dichtigkeit in ihm und r seine Entfernung vom Punkte (x, y, z), so dass

$$U = \int \frac{k\,d\tau}{r}.$$

Für alle Punkte (x, y, z), die ausserhalb des mit Masse erfüllten Raumes, in nicht verschwindender Entfernung von seiner Oberfläche liegen, verhält sich dieses Potential wie das vorher betrachtete; es genügt nämlich der Gleichung 1), ist überall stetig, und, wenn der Punkt (x, y, z) in die Unendlichkeit rückt, so behalten die Ausdrücke 3) ihre Bedeutung, falls man Σm durch $\int k\,d\tau$ ersetzt. Aber auch *in* dem mit Masse erfüllten Raume ist U eine stetige Function von x, y, z; die freilich, wie wir später sehen werden, der Gleichung 1) nicht genügt. Führt man nämlich statt der rechtwinkligen Coordinaten a, b, c, nach denen zu integriren ist, Polarcoordinaten ein, indem man setzt

$$a = x + r \sin\vartheta \cos w$$
$$b = y + r \sin\vartheta \sin w$$
$$c = z + r \cos\vartheta,$$

so wird

$$d\tau = r^2\,dr \sin\vartheta\,d\vartheta\,dw$$

und

$$U = \int\int\int k\,r\,dr \sin\vartheta\,d\vartheta\,dw.$$

Die untere Grenze von r ist Null, wenn der Punkt (x, y, z) innerhalb des Raumes liegt, dem dz angehört, von Null verschieden im entgegengesetzten Falle, und dann endlich oder unendlich klein, je nachdem der gedachte Punkt in endlicher oder unendlich kleiner Entfernung von der Oberfläche dieses Raumes sich befindet. Da aber die mit den Differentialen $dr\,d\vartheta\,dw$ multiplicirte Grösse für unendlich kleine Werthe von r nicht unendlich gross wird, so hat U in allen diesen Fällen einen angebbaren, endlichen Werth und ändert sich immer stetig, wenn der Punkt (x, y, z) verrückt wird.

Wir wollen nun einen der ersten Differentialquotienten von U untersuchen und wählen hierzu $\frac{\partial U}{\partial z}$. Es ist

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \int k \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\,d\tau,$$

oder, da r, also auch $\frac{1}{r}$, eine Function von $z - c$ ist,

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\int k \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} d\tau,$$

also auch

$$= -\int \frac{\partial \frac{k}{r}}{\partial c} d\tau + \int \frac{\partial k}{\partial c} \frac{d\tau}{r},$$

oder endlich

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \int ds \frac{k}{r} \cos(nz) + \int \frac{\partial k}{\partial c} \frac{d\tau}{r}, \qquad 5)$$

wenn ds ein Element der Oberfläche des mit Masse erfüllten Raumes, n die nach dem Innern dieses gerichtete Normale von ds bedeutet. Das zweite der in der Gleichung 5) vorkommenden Integrale ist ein Potential von derselben Art, wie U, nur ist die Dichtigkeit der Masse, von der es herrührt, im Punkte (a, b, c) nicht k, sondern $\frac{\partial k}{\partial c}$; das erste können wir bezeichnen als das Potential einer Masse, die auf der Fläche, der ds angehört, mit der *Dichtigkeit* $k \cos(nz)$ ausgebreitet ist; wir gebrauchen dabei das Wort Dichtigkeit in einer andern Bedeutung als bisher.

Es sei V das Potential in Bezug auf den Punkt (x, y, z) einer Masse, die mit der Dichtigkeit h auf einer Fläche, deren Element ds ist, verbreitet ist, so dass

$$V = \int \frac{h\,ds}{r}. \qquad 6)$$

Es soll h endlich sein und sich stetig auf der Fläche ändern, diese endliche Dimensionen haben und nirgends eine unendlich grosse Krümmung besitzen. Wir wollen beweisen, dass auch für Punkte, die unendlich nahe an der Fläche liegen, V endlich ist und keinen Sprung erleidet, wenn der Punkt, auf den es sich bezieht, durch die Fläche hindurch geführt wird. Das Coordinatensystem, das wir beliebig wählen können, legen wir so, dass der Anfangspunkt in der Fläche sich befindet, nehmen den Punkt, auf den sich V bezieht, in der z-Achse an und diese als senkrecht auf der Fläche; wir haben dann den Werth von V für unendlich kleine, positive und negative Werthe von z zu untersuchen. Wir denken uns aus der Fläche einen Theil ausgeschnitten durch einen kreisförmigen Cylinder, dessen Achse die z-Achse ist und der den Radius R hat, einen Radius, der unendlich klein, aber gegen z unendlich gross und von diesem unabhängig sein soll. Den Theil von V, welcher von der Masse herrührt, die auf dem ausgeschnittenen Flächenstücke sich befindet, nennen wir V_1. Der andere Theil von V, also $V - V_1$, wird nicht unendlich oder unstetig dadurch, dass $z = 0$ wird oder durch Null hindurchgeht; wir haben zu untersuchen, ob V_1 dieselbe Eigenschaft hat. Wir wollen hierbei die Längeneinheit anders wählen, als bisher, nämlich so, dass z endlich wird; es wird dann R unendlich gross,

und von noch höherer Ordnung werden es die Krümmungsradien der Fläche; das ausgeschnittene Flächenstück wird daher eine ebene Kreisfläche von dem unendlich grossen Radius R; die Dichtigkeit h ist auf derselben als constant zu betrachten. Hiernach ist

$$V_1 = 2\pi h \int_0^R \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + z^2}}$$

d. h.

$$V_1 = 2\pi h\left(\sqrt{R^2 + z^2} - \sqrt{z^2}\right), \tag{7}$$

wo $\sqrt{z^2}$ den absoluten Werth von z bedeutet. Kehren wir zu der ursprünglichen Längeneinheit zurück, bei der R und z unendlich klein sind und bei der V im Allgemeinen endlich ist, so ergiebt sich bei Vernachlässigung von unendlich Kleinem

$$V_1 = 0;$$

hieraus folgt, dass V endlich und stetig bleibt, wenn der Punkt, auf den es sich bezieht, durch die Fläche, auf der die Masse sich befindet, hindurchgeht.

Wir ziehen aus der Gleichung 7) noch einen andern Schluss. Es folgt aus ihr

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} = 2\pi h\left(\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2}}\right),$$

oder, da R unendlich gross gegen z ist,

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} = -2\pi h \frac{z}{\sqrt{z^2}},$$

d. h.

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} = -2\pi h, \text{ wenn } z \text{ positiv,}$$

$$= 2\pi h, \text{ wenn } z \text{ negativ ist.}$$

$\frac{\partial (V - V_1)}{\partial z}$ ändert sich stetig, wenn z durch Null hindurchgeht; daraus ergiebt sich, dass $\frac{\partial V}{\partial z}$ sprungweise um $-4\pi h$ wächst, wenn z vom Negativen zum Positiven durch Null hindurchgeht. Wir fügen hinzu, dass, da V selbst keinen Sprung dabei erleidet, $\frac{\partial V}{\partial x}$ und $\frac{\partial V}{\partial y}$ stetig bleiben.

Um uns unabhängig von dem speciellen Coordinatensystem zu machen, das bei der Ableitung dieses Satzes benutzt ist, bezeichnen wir, im Einklang mit der früher gebrauchten Weise, durch n das, was wir jetzt z genannt haben, und lassen das Coordinatensystem der x, y, z unbestimmt. Wenn der Punkt (x, y, z) im Sinne der Normale n durch das Flächenelement ds hindurchgeht, so wächst $\frac{\partial V}{\partial n}$ um $-4\pi h$ und es wachsen, wie aus Formeln hervorgeht, die sich auf die Verwandlung rechtwinkliger Coordinaten beziehen,

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad \frac{\partial V}{\partial z}$$

um $\quad -4\pi h \cos(nx), \quad -4\pi h \cos(ny), \quad -4\pi h \cos(nz).$ 8)

Bezeichnen wir von den beiden Seiten der mit Masse belegten Fläche die eine als die *innere*, die andere als die *äussere* und nennen n_i und n_a die nach ihnen gerichteten Normalen von ds, so ergiebt sich

$$\frac{\partial V}{\partial n_i} + \frac{\partial V}{\partial n_a} = -4\pi h. \tag{9}$$

Wir kehren nun zur Betrachtung des durch die Gleichung 4) definirten Potentials, U, einer in einem Raume verbreiteten Masse zurück. Wir haben schon gesehen, dass an der Oberfläche dieses Raumes U selbst stetig ist; wir sehen jetzt, dass dasselbe von $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ gilt; es folgt dieses aus der Gleichung 5) und den beiden Gleichungen, die aus dieser entstehen, wenn man z, c gegen x, a oder y, b vertauscht, da das durch die Gleichung 6) definirte V keinen Sprung an der Fläche, deren Element ds ist, erfährt. Die Stetigkeit der ersten Differentialquotienten von U an der Oberfläche des mit Masse erfüllten Raumes hätten wir auch durch Einführung von Polarcoordinaten beweisen können, wie wir die Stetigkeit von U selbst bewiesen haben. Anders aber verhält es sich mit den zweiten Differentialquotienten von U. Aus 5) und 9) folgt

$$\frac{\partial^2 U}{\partial n_i \partial z} + \frac{\partial^2 U}{\partial n_a \partial z} = -4\pi k \cos(n_i z), \tag{10}$$

und mit Hülfe der Ausdrücke 8) findet man, dass, wenn der Punkt (x, y, z) aus dem äusseren Raume in den mit Masse erfüllten tritt,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

sprungweise die Vergrösserungen

$$-4\pi k \cos^2(nx), \quad -4\pi k \cos^2(ny), \quad -4\pi k \cos^2(nz)$$

$$-4\pi k \cos(ny)\cos(nz), \quad -4\pi k \cos(nz)\cos(nx), \quad -4\pi k \cos(nx)\cos(ny)$$

resp. erleiden. Der Sprung, den dabei ΔU $\left(\text{d. h. } \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)$ erfährt, ist daher $-4\pi k$; nun ist im äusseren Raume $\Delta U = 0$, und daher in dem mit Masse erfüllten unendlich nahe an der Oberfläche

$$\Delta U = -4\pi k. \tag{11}$$

Diese Gleichung gilt aber nicht allein unendlich nahe an der Oberfläche, sondern in dem ganzen mit Masse erfüllten Raume. Um das zu beweisen, denke man sich diesen Raum in zwei Theile zer-

legt durch eine Fläche, die bei dem Punkte (x, y, z) unendlich nahe vorbeigeht, und nenne U_1 den Theil von U, der von der Masse in *dem* Theile, in dem der Punkt (x, y, z) sich befindet, herrührt. Man hat dann

$$\Delta(U - U_1) = 0$$

und

$$\Delta U_1 = -4\pi k,$$

woraus die Gleichung 11) hervorgeht.

§ 3.

Wir wollen jetzt das Potential einer Massenvertheilung untersuchen, die wir auf folgende Weise definiren. Es sei ds ein Element einer mit Masse belegten Fläche, n die nach der einen Seite der Fläche gerichtete Normale desselben; auf den Normalen n sämmtlicher Punkte der Fläche denken wir uns unendlich kleine Längen abgetragen, die stetig variiren können; dadurch entsteht eine zweite, der ersten unendlich nahe Fläche, deren Elemente denen der ersten entsprechen; ein jedes Element dieser zweiten Fläche denken wir uns mit einer Masse belegt, die eben so gross, aber von entgegengesetztem Vorzeichen als diejenige ist, die sich auf dem entsprechenden Elemente der ersten Fläche befindet. Das negativ genommene Product aus der Dichtigkeit der Masse auf dem Elemente ds der ersten Fläche in den, in der Richtung von n positiv gerechneten Abstand des entsprechenden Elements der zweiten Fläche von ds wollen wir durch i bezeichnen und als eine endliche Grösse annehmen. Das Potential, W, dieser Massenvertheilung in Bezug auf den Punkt (x, y, z) ist dann, wenn a, b, c wieder die Coordinaten von ds bedeuten, bestimmt durch

$$W = \int i \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} ds, \tag{12}$$

wo die Differentiation nach n sich auf eine Verschiebung des Punktes (a, b, c) bezieht. Die in Rede stehende Massenvertheilung wollen wir eine *Doppelschicht* nennen, und im Gegensatze dazu eine Massenvertheilung, wie die, deren Potential durch 6) bestimmt ist, eine *einfache* Schicht; die Grösse i möge die *Dichtigkeit* der Doppelschicht heissen.

Der in 12) für W gegebene Ausdruck kann umgestaltet werden. Es ist

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = -\frac{1}{r^2} \cos(rn),$$

wo (rn) den Winkel bezeichnet, den die von dem Punkte (x, y, z) nach dem Orte von ds gezogene Grade mit der Richtung von n

bildet. Bezeichnet man durch dK die *scheinbare Grösse* des Flächenelementes ds vom Punkte (x, y, z) aus gesehen, d. h. das Stück einer Kugelfläche, die um (x, y, z) als Mittelpunkt mit einem der Längeneinheit gleichen Radius beschrieben ist, welches von einem Kegel ausgeschnitten wird, der in (x, y, z) seine Spitze hat und durch den Umfang von ds gelegt ist, so ist hiernach

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} ds = \mp dK,$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $\cos(rn)$ positiv oder negativ ist. Aendert dieser Cosinus sein Vorzeichen nicht innerhalb der ganzen Fläche, der ds angehört (eine Bedingung, die immer erfüllt ist, wenn vom Punkte (x, y, z) aus keine Tangenten an die Fläche gezogen werden können), so ist daher

$$W = \mp \int i\, dK, \qquad 13)$$

wo wieder das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem $\cos(rn)$ positiv oder negativ ist. Ist jene Bedingung nicht erfüllt, so lässt die Fläche sich so in Theile zerlegen, dass jeder Theil ihr genügt, und man kann W als eine Summe solcher Ausdrücke darstellen, wie der in 13) für W angegebene einer ist.

Wir wollen untersuchen, wie es sich mit der Stetigkeit von W in dem Falle verhält, dass der Punkt (x, y, z) unendlich nahe an die Fläche, der ds angehört, heran oder durch sie hindurchtritt. Wenn eine Unstetigkeit hierbei stattfindet, so kann sie nur von den Theilen der Fläche herrühren, denen der Punkt (x, y, z) unendlich nahe kommt. Wir legen wieder den Anfangspunkt der Coordinaten in die Fläche, wie wir es bei der Ableitung der Gleichung 7) gemacht haben, geben der z-Achse die Richtung von n und untersuchen den Werth von W für den Fall, dass $x = 0$, $y = 0$ und z unendlich klein ist. Aus der Fläche denken wir uns ein Stück ausgeschnitten durch einen Kreiscylinder, dessen Achse die z-Achse, dessen Radius $= R$ ist, und nehmen an, dass R unendlich klein gegen die Dimensionen der Fläche, aber unendlich gross gegen z und von diesem unabhängig ist; wir nennen W_1 den Theil von W, der von diesem Stücke der Fläche herrührt. Da 4π die Oberfläche einer Kugel vom Radius 1 ist, so giebt die Gleichung 13), wenn man unendlich Kleines vernachlässigt,

für ein negatives z $\quad W_1 = -2\pi i$

für ein positives z $\quad W_1 = +2\pi i.$

Da in jedem dieser beiden Fälle W_1 von z unabhängig ist, so kann W nicht unendlich gross sein, wenn z unendlich klein ist, und, da

W_1 um $4\pi i$ sprungweise zunimmt, wenn z wachsend durch Null hindurchgeht, so findet dasselbe bei W statt.

Um $\frac{\partial W_1}{\partial z}$ finden zu können, wollen wir für W_1 einen Ausdruck aufstellen, bei dem Grössen, die mit z verschwinden, nicht vernachlässigt sind. Wir gelangen zu einem solchen leicht mit Hülfe der Gleichung 12); diese giebt

$$W_1 = -i\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} ds = 2\pi i \int_0^R \frac{z\varrho\, d\varrho}{(\varrho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= 2\pi i \left(\frac{z}{\sqrt{z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right).$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial W_1}{\partial z} = -2\pi i \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

oder, da z gegen R unendlich klein ist,

$$\frac{\partial W_1}{\partial z} = -2\pi i \frac{1}{R}.$$

Daraus, dass $\frac{\partial W_1}{\partial z}$ von z unabhängig ist und auch denselben Werth für positive und negative Werthe von z besitzt, folgt, dass $\frac{\partial W}{\partial z}$ für $z = 0$ endlich und stetig ist.

Das durch die Gleichung 12) definirte Potential einer Doppelschicht, W, ist also an dieser endlich, erleidet aber sprungweise die Vergrösserung $4\pi i$, wenn der Punkt (x, y, z) in der Richtung von n durch sie hindurchgeht; der Differentialquotient $\frac{\partial W}{\partial n}$ dagegen ist an ihr endlich und stetig.

Wenn das Coordinatensystem ein beliebig gewähltes ist, so werden die Differentialquotienten $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$, $\frac{\partial W}{\partial z}$ bei dem Durchgange durch die gedachte Fläche im Allgemeinen Sprünge erleiden, weil der Sprung, den dabei W erfährt, im Allgemeinen, d. h. wenn i auf der Fläche sich ändert, nach dem Orte, an dem der Durchgang stattfindet, ein verschiedener ist. Wenn i aber eine Constante ist, so erleiden jene Differentialquotienten an der Fläche keine Sprünge; wir werden hieran zu erinnern haben bei der Bestimmung eines mehrwerthigen Geschwindigkeitspotentials in einem mehrfach zusammenhängenden Raume.

§ 4.

Wir wollen jetzt einen Satz ableiten, der mit dem Namen des Green'schen Satzes belegt ist, und aus dem die wichtigsten Eigen-

schaften der Functionen, welche ein Geschwindigkeitspotential sein können, sich erschliessen lassen.

Es sei $d\tau$ ein Element eines vollständig begrenzten Raumes, x, y, z seien die Coordinaten desselben und U und V zwei Functionen von x, y, z. Die identischen Gleichungen

$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + U\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(U\frac{\partial V}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} + U\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(U\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

addiren wir, multipliciren mit $d\tau$ und integriren nach diesem; wir setzen voraus, dass U und $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ einwerthig und stetig in dem Raume sind, dem $d\tau$ angehört, und bezeichnen durch ds ein Element der Oberfläche dieses Raumes, durch n die nach dem Innern desselben gerichtete Normale von ds; nach den so oft schon benutzten Gleichungen 6) der eilften Vorlesung erhalten wir dann

$$\int d\tau\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} + U\Delta V\right)$$

$$= -\int ds\, U\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(ny) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(nz)\right)$$

oder

$$\int d\tau\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) = -\int d\tau\, U\Delta V - \int ds\, U\frac{\partial V}{\partial n}. \quad 14)$$

Diese Gleichung heisst der *Green'sche Satz.* Sind auch V und $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ in dem betrachteten Raume einwerthig und stetig, so kann man in den Schlüssen, durch welche 14) abgeleitet ist, U und V mit einander vertauschen und erhält dann

$$\int ds\left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right) = \int d\tau\,(V\Delta U - U\Delta V).$$

Sind überdies U und V Lösungen der Gleichung 1), so folgt hieraus

$$\int ds\left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right) = 0. \quad 15)$$

Wir wollen nun durchweg in dieser Vorlesung durch V eine Function bezeichnen, die in dem betrachteten Raume der Gleichung $\Delta V = 0$ genügt und mit ihren ersten Differentialquotienten einwerthig und stetig ist. Setzen wir ferner in der Gleichung 15), was gestattet ist, U einer Constanten gleich, so wird sie

$$\int ds\frac{\partial V}{\partial n} = 0. \quad 16)$$

Sieht man V als ein von der Zeit unabhängiges Geschwindigkeitspotential an, so hat diese Gleichung eine leicht in Worten ausdrückbare und auch von anderer Seite erweisliche Bedeutung; sie spricht aus, dass das Volumen der in der Zeiteinheit in den betrachteten Raum eintretenden Flüssigkeit gleich Null ist, wenn man ein Volumen austretender Flüssigkeit als negatives Volumen eintretender in Rechnung bringt.

Setzen wir ferner in der Gleichung 15)

$$U = \frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

Das ist erlaubt, wenn der Punkt (a, b, c) ausserhalb des Raumes liegt, dessen Elemeht $d\tau$ genannt worden ist. Es soll nun der Punkt (a, b, c) *innerhalb* des ursprühglich gedachten Raumes liegen, die Gleichung 15) aber auf den Theil desselben angewandt werden, der übrig bleibt, wenn eine unendlich kleine Kugel, die um (a, b, c) als Mittelpunkt beschrieben ist, von ihm ausgeschlossen wird; die Oberfläche dieser Kugel ist bei der Bildung der genannten Gleichung dann zu berücksichtigen. Es sei dS ein Element derselben, während ds ein Element der Oberfläche des ursprünglich gedachten Raumes bedeuten soll; man erhält dann

$$\int \frac{dS}{r^2} V + \int \frac{dS}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = \int ds\, V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \int \frac{ds}{r} \frac{\partial V}{\partial n},$$

wo auf der linken Seite des Gleichheitszeichens r dem unendlich kleinen Radius der Kugel gleichzusetzen ist. Das zweite Integral auf dieser Seite verschwindet daher, da, wenn man Polarcoordinaten einführt,

$$dS = r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, dw$$

gesetzt werden kann; das erste wird

$$= 4\pi V,$$

wo V sich auf den Punkt (a, b, c) bezieht. Man hat hiernach für dieses V

$$V = \frac{1}{4\pi} \int ds\, V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{4\pi} \int \frac{ds}{r} \frac{\partial V}{\partial n}. \tag{17}$$

Diese Gleichung stellt den Werth von V für einen beliebigen Punkt des gedachten Raumes als die Summe der Potentiale einer einfachen Massenschicht und einer Doppelschicht dar, die in der Oberfläche des Raumes liegen und deren Dichtigkeit in dem Elemente ds resp. $-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n}$ und $\frac{1}{4\pi} V$ sind. Sie zeigt, dass auch die höheren Differentialquotienten von V nach den Coordinaten in dem ganzen Raume stetig sind.

Wir setzen jetzt in der Gleichung 14)

$$U = V;$$

sie wird dann

$$\int d\tau \left(\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right) = -\int ds\, V \frac{\partial V}{\partial n}. \qquad 18)$$

Sehen wir V als ein Geschwindigkeitspotential und nehmen die Dichtigkeit der Flüssigkeit $= 1$ an, so ist die linke Seite dieser Gleichung das Doppelte der lebendigen Kraft derselben; wir haben diese lebendige Kraft also durch ein über die Oberfläche zu nehmendes Integral ausgedrückt.

§ 5.

Wir wollen nun aus den im vorigen § aufgestellten Gleichungen Folgerungen ziehen; hauptsächlich werden wir darauf ausgehen, Bedingungen zu finden, die zur vollständigen Bestimmung einer Function V genügen, dabei aber auch auf Eigenschaften dieser Functionen aufmerksam machen, die in anderer Hinsicht von Interesse sind.

Die Gleichung 17) erlaubt für jeden Punkt des betrachteten Raumes V zu berechnen, wenn für alle Punkte der Oberfläche die Werthe von V und $\frac{\partial V}{\partial n}$ gegeben sind. Es können aber nicht alle diese Werthe willkürlich gegeben werden; es ist vielmehr für den ganzen Raum V vollkommen bestimmt, wenn für die ganze Oberfläche V, oder für einen Theil der Oberfläche V, für den andern $\frac{\partial V}{\partial n}$ gegeben ist, und es ist V bis auf eine additive Constante bestimmt, wenn man $\frac{\partial V}{\partial n}$ für die ganze Oberfläche kennt. Es ergiebt sich dieses aus der Gleichung 18). Ist nämlich für einen Theil der Oberfläche $V = 0$, für den andern $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$, so verschwindet die rechte Seite dieser Gleichung; es verschwindet also auch die linke, und da diese eine Summe von Gliedern ist, die nicht negativ sein können, so ist daher jedes dieser Glieder $= 0$, d. h. es ist V in dem ganzen Raume constant; da es weiter in einem Theile der Oberfläche $= 0$ ist, so hat es diesen Werth überall. Sind nun die Werthe von V für den einen Theil und von $\frac{\partial V}{\partial n}$ für den andern Theil der Oberfläche nicht $= 0$, aber gegeben, und sind V_1 und V_2 zwei Functionen, die diesen Werthen entsprechen, so genügt $V_1 - V_2$ den vorher über V gemachten Voraussetzungen; es folgt daraus für den ganzen Raum $V_1 = V_2$. Dieselbe Betrachtung zeigt, dass, wenn für die ganze Oberfläche $\frac{\partial V}{\partial n}$ verschwindet, V einer unbekannt bleibenden Constanten

gleich, und wenn für die ganze Oberfläche $\frac{\partial V}{\partial n}$ gegeben, V bis auf eine additive Constante für den ganzen Raum bestimmt ist.

Wir knüpfen hieran die Bemerkung, dass von allen Functionen $V + U$, welche an der Oberfläche des betrachteten Raumes gegebene Werthe annehmen und in ihm einwerthig und stetig sind, die Function V, welche diese Werthe an der Oberfläche hat, dem Integral

$$\Omega = \int d\tau \left(\left(\frac{\partial (V+U)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial (V+U)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial (V+U)}{\partial z} \right)^2 \right)$$

den kleinsten Werth giebt, welchen es annehmen kann. In der That hat man

$$\begin{aligned} \Omega = & \int d\tau \left(\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right) \\ & + 2 \int d\tau \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \\ & + \int d\tau \left(\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right). \end{aligned} \qquad 19)$$

Die Richtigkeit der ausgesprochenen Behauptung ergiebt sich daraus, dass das dritte von diesen Integralen stets positiv ist und das zweite der Gleichung 14) zufolge verschwindet, da $\Delta V = 0$ und an der Oberfläche $U = 0$ ist. Bezeichnet man das zweite von den 3 Gliedern auf der rechten Seite der Gleichung 19), welches, wenn U unendlich klein, im Allgemeinen von derselben Ordnung, wie dieses ist, durch $\delta \Omega$, so ist $\delta \Omega = 0$, sobald V die hier vorausgesetzten Eigenschaften besitzt. Diese Bemerkung ist von Nutzen, wenn es sich darum handelt, in der Gleichung $\Delta V = 0$ statt der rechtwinkligen Coordinaten andere einzuführen; wir werden bei einer solchen Gelegenheit von ihr Gebrauch machen.

§ 6.

Um den Punkt (a, b, c) als Mittelpunkt denken wir uns eine Kugel mit dem beliebigen Radius R beschrieben, die ganz innerhalb des betrachteten Raumes liegt, und wenden auf diese die Gleichung 17) an. Das zweite Integral derselben verschwindet dann in Folge von 16) und es wird

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \frac{1}{R^2};$$

wir erhalten daher

$$V = \frac{1}{4\pi R^2} \int V ds. \qquad 20)$$

Diese Gleichung lässt sich in Worten dahin aussprechen, dass der Werth von V im Mittelpunkte der Kugel dem arithmetischen Mittel seiner Werthe in den Punkten ihrer Oberfläche gleich ist. Jener

Werth liegt daher zwischen dem grössten und dem kleinsten dieser Werthe. Da das gilt, wie klein auch die Kugel gewählt wird, so kann V in dem ganzen betrachteten Raume, welches auch seine Gestalt sein möge, kein Maximum und kein Minimum haben; alle Werthe, die es erhält, liegen zwischen dem grössten und dem kleinsten der Werthe, die es in der Oberfläche hat. Sind diese $= 0$, so ist überall $V = 0$, und ist V an der Oberfläche gegeben, so ist es überall bestimmt. Wir haben so auf einem zweiten Wege einen Satz bewiesen, der schon im vorigen § abgeleitet ist; dieser Weg hat vor dem dort eingeschlagenen einen gewissen Vorzug, auf den im nächsten § aufmerksam gemacht werden wird.

Aus dem Satze, dass V innerhalb des betrachteten Raumes kein Maximum und kein Minimum hat, lässt sich ferner beweisen, dass auch

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2$$

hier kein Maximum besitzt, obwohl es Minima haben kann; dass also, wenn wir uns V als ein Geschwindigkeitspotential vorstellen, die grösste Geschwindigkeit in der Grenze des Raumes stattfinden muss. Um das zu zeigen, denken wir uns in dem betrachteten Raume wieder eine Kugel; ihren Mittelpunkt wollen wir 0 und $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0$, $\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0$ die Werthe von $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ in ihm nennen, die letzteren Zeichen aber auf Punkte der Kugelfläche beziehen. Wir haben den ausgesprochenen Satz bewiesen, wenn wir dargethan haben, dass nicht für alle diese Punkte

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 < \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0^2 \qquad 21)$$

sein kann. Wenn $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0$, $\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0$ gleichzeitig verschwinden, so ist die Richtigkeit dieser Behauptung unmittelbar ersichtlich; wir können diesen besonderen Fall also ausschliessen. Geschieht das, so kann man immer dadurch, dass man der x-Achse eine passende Richtung giebt, bewirken, dass

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 = 0 \text{ und } \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 = 0$$

ist. Der Differentialquotient $\frac{\partial V}{\partial x}$ hat dieselben Eigenschaften, welche bei V vorausgesetzt sind; hieraus folgt, dass, wenn nicht für alle Punkte der Kugelfläche $\frac{\partial V}{\partial x}$ constant ist, es Punkte auf derselben giebt, für welche

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 > \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0^2$$

ist. Bei der Wahl des Coordinatensystemes, die wir getroffen haben, ist aber

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 \geqq \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0^2$$
$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \geqq \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0^2. \qquad 22)$$

Man braucht diese drei Relationen nur zu addiren, um die Richtigkeit der zu beweisenden Behauptung für den Fall einzusehen, dass $\frac{\partial V}{\partial x}$ nicht auf der ganzen Kugelfläche constant ist. Ist dieses aber constant, so ist für alle Punkte der Kugelfläche

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0^2.$$

Wenn dabei $\frac{\partial V}{\partial y}$ *und* $\frac{\partial V}{\partial z}$ nicht für alle diese Punkte verschwinden, so giebt es Punkte, für welche wenigstens in einer der beiden Relationen 22) das obere Zeichen gilt, und für diese besteht dann die Ungleichung, die der Ungleichung 21) widerspricht. Wenn endlich für alle Punkte der Kugelfläche $\frac{\partial V}{\partial x}$ constant und $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$ ist, so sind die beiden Grössen, die in 21) mit einander verglichen sind, immer einander gleich; in diesem Falle haben die drei Differentialquotienten von V für alle Punkte im Innern der Kugel dieselben Werthe; die Geschwindigkeit hat dann hier überall dieselbe Grösse und dieselbe Richtung.

Wir knüpfen noch einen andern Schluss an die Gleichung 20). Wir nehmen an, dass in einem Theile des betrachteten Raumes $V = 0$ ist; ist es nicht in dem ganzen Raume Null, so wird es einen Theil desselben geben, der an jenen angrenzt, und in dem V von Null verschieden ist und sein Vorzeichen nicht wechselt. Wir denken uns eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt in dem Raume liegt, in dem $V = 0$ ist, und die selbst theils in diesem Raume, theils in demjenigen sich befindet, in dem V von Null verschieden und von gleichbleibendem Vorzeichen ist. Aus der Gleichung 20) folgt dann, dass im Mittelpunkte der Kugel V von Null verschieden ist. Dieser Widerspruch zeigt, dass, wenn V in einem Theile des betrachteten Raumes verschwindet, es in dem ganzen Raume verschwinden muss. Eine Schlussweise, die im vorigen § auseinandergesetzt ist, ergiebt weiter, dass, wenn V für einen Theil des Raumes gegeben ist, es für den ganzen Raum bestimmt ist. Ist es in einem Theile constant, so hat es für den ganzen Raum denselben Werth.

Wenn in einem Theile des Raumes die 3 Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ verschwinden, also V constant ist, so folgt hieraus

unmittelbar, dass sie in dem ganzen Raume verschwinden. Wir wollen beweisen, dass dieses auch dann stattfinden muss, wenn nur in allen Punkten einer Fläche $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ gleich Null sind. Zu diesem Zwecke verfolgen wir eine Linie, die von einem beliebigen Punkte ausgeht und den Differentialgleichungen

$$dx : dy : dz = \frac{\partial V}{\partial x} : \frac{\partial V}{\partial y} : \frac{\partial V}{\partial z}$$

genügt, die also die Flächen $V = \text{const.}$ senkrecht schneidet; wir wollen sie eine *Stromlinie* nennen, da, wenn wir uns V als ein von der Zeit unabhängiges Geschwindigkeitspotential vorstellen, in ihr eine Strömung stattfindet. Ihre Fortsetzung kann nur da zweifelhaft werden, wo die 3 Differentialquotienten von V verschwinden, d. h. die Geschwindigkeit gleich Null ist; durch jeden Punkt, in dem das nicht der Fall ist, geht eine Stromlinie. Einen Raum, der von Stromlinien gebildet ist, die sich stetig aneinander schliessen, wollen wir mit dem Namen eines *Stromfadens* belegen. Giebt es eine Fläche, für deren sämmtliche Punkte die Geschwindigkeit Null ist, während in ihrer Nachbarschaft Bewegung stattfindet, so giebt es Stromfäden, die in jener Fläche endigen. Wir betrachten einen Theil eines solchen Stromfadens, der einerseits durch die gedachte Fläche, andererseits durch einen Querschnitt begrenzt ist, der die Eigenschaft hat, dass für alle seine Elemente $\frac{\partial V}{\partial n}$ von Null verschieden und von gleichem Vorzeichen ist; auf diesen Theil wenden wir die Gleichung 16) an. Erwägt man, dass für jedes Element einer Fläche, die aus Stromlinien gebildet ist, $\frac{\partial V}{\partial n}$ verschwindet, so ergiebt sich, dass das Integral

$$\int ds \frac{\partial V}{\partial n},$$

ausgedehnt über den bezeichneten Querschnitt, gleich Null ist. Es widerspricht das der Bedingung, der gemäss dieser Querschnitt gewählt werden sollte und gewählt werden konnte; es folgt daraus, dass es keine Fläche giebt, in der die Geschwindigkeit gleich Null ist, wenn überhaupt Bewegung stattfindet, d. h. V von einer Constanten verschieden ist. Es kann dann also die Geschwindigkeit nur in Linien oder Punkten verschwinden. Aber auch in diesen können *Stromfäden* nicht endigen, wie eine Betrachtung zeigt, die mit der eben durchgeführten vollkommen übereinstimmt. Der ganze Raum, auf den sich V bezieht, ist daher aus Stromfäden zusammengesetzt, die in seiner Oberfläche endigen; in sich zurücklaufen kann ein Stromfaden nämlich nicht, da wir V als eine *einwerthige, stetige* Function von x, y, z vorausgesetzt haben, und da auf einer Stromlinie in der Richtung der Strömung V immer wächst.

Fassen wir ein Stück eines Stromfadens ins Auge, das einerseits durch eine Fläche $V = \text{const.}$, andererseits durch die Oberfläche des Raumes begrenzt ist, um den es sich handelt; dS und ds seien Elemente der beiden Endflächen, N und n ihre nach Innen gerichteten Normalen. Aus der Gleichung 16) folgt dann

$$\int dS \frac{\partial V}{\partial N} + \int ds \frac{\partial V}{\partial n} = 0, \tag{23}$$

und dabei ist

$$\frac{\partial V}{\partial N} = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2},$$

wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem die Normalen N die Richtungen haben, in denen V wächst, oder die entgegengesetzten. Ist für alle Punkte der Oberfläche des betrachteten Raumes $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$, so zeigt die Gleichung 23), dass für alle Punkte im Innern $\frac{\partial V}{\partial N} = 0$, d. h. V einer Constanten gleich ist. So sind wir auch zu diesem, im vorigen § bewiesenen Satze auf einem zweiten Wege gelangt.

§ 7.

Wir haben bisher vorausgesetzt, dass der Raum, in dem wir V zu betrachten haben, vollkommen begrenzt ist; wir wollen nun annehmen, dass derselbe sich in die Unendlichkeit erstreckt, also nur theilweise begrenzt ist durch geschlossene endliche Flächen oder ungeschlossene Flächen, die in die Unendlichkeit hinausgehen. Wir denken uns die Begrenzung eines Raumes vervollständigt durch eine oder mehrere Flächen, die im Unendlichen liegen. Auf diesen Raum können wir dann alle im Vorigen entwickelten Sätze anwenden; nur müssen wir dabei beachten, dass die Oberfläche desselben unendlich gross ist, und dass daher eine verschwindend kleine Grösse, wenn sie mit dem Element der Oberfläche multiplicirt und integrirt wird, eine endliche Grösse geben kann.

Wir haben in § 5 bewiesen, dass, wenn an der Oberfläche V verschwindet, überall $V = 0$ ist; die Betrachtungen, durch welche wir dort zu diesem Satze geführt wurden, sind hier aber aus dem eben angeführten Grunde nicht anwendbar, wenn man nicht auf die Untersuchung der Grössenordnungen eingehen will, von denen V und $\frac{\partial V}{\partial n}$ in der Unendlichkeit sind. Dagegen behalten die Schlüsse, durch welche wir in § 6 denselben Satz abgeleitet haben, auch hier ihre volle Gültigkeit. Als einen speciellen Fall von besonderer Wichtigkeit heben wir hervor, dass, wenn in dem ganzen unbegrenzten Raume V die Eigenschaften besitzt, die wir ihm beigelegt haben, und man weiss, dass es in der Unendlichkeit verschwindet, ohne aber

die Grössenordnung zu kennen, von der es dort ist, man schliessen darf, dass es überall verschwindet.

Wir haben ferner in den §§ 5 und 6 den Satz bewiesen, dass, wenn $\frac{\partial V}{\partial n}$ an der Oberfläche verschwindet, V einer Constanten gleich sein muss. Dieser Satz ist hier ohne Einschränkung nicht richtig; die nöthige Einschränkung ergiebt sich aber leicht aus den Betrachtungen, die wir am Ende des vorigen § angestellt haben. Mögen die Dimensionen des vollständig begrenzten Raumes, um den es sich handelt, endlich oder unendlich sein; verschwindet das Integral

$$\int ds \frac{\partial V}{\partial n},$$

ausgedehnt über einen beliebigen Theil seiner Oberfläche, so ist V überall einer Constanten gleich. Ist $\frac{\partial V}{\partial n}$ bis auf Grössen der hierdurch bestimmten Ordnung gegeben, so ist V bis auf eine additive Constante bestimmt.

Im Hinblick auf gewisse hydrodynamische Probleme, mit denen wir uns zu beschäftigen haben werden, stellen wir noch die folgenden Ueberlegungen an. Der Raum, um den es sich handelt, sei theilweise begrenzt durch geschlossene endliche Flächen und erstrecke sich nach allen Richtungen in die Unendlichkeit. Für jene Flächen sei $\frac{\partial V}{\partial n}$ gegeben, und man wisse, dass in der Unendlichkeit $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ verschwinden, ohne die Grössenordnung zu kennen, von der diese Differentialquotienten hier sind. Wenn wir V als ein Geschwindigkeitspotential uns vorstellen, wollen wir den letzten Umstand dadurch in Worten ausdrücken, dass wir sagen: die Flüssigkeit *ruht* in der Unendlichkeit. Wir werden beweisen, dass V bis auf eine additive Constante bestimmt ist.

Um den beliebigen Punkt (a, b, c) in der Flüssigkeit denken wir uns eine Kugelfläche mit dem constanten, unendlich grossen Radius R beschrieben, nennen dS ein Element dieser Kugelfläche und ds ein Element der ursprünglich gegebenen Grenzflächen. Der Gleichung 17) zufolge ist dann der Werth von V für den Punkt (a, b, c) bestimmt durch

$$V = \frac{1}{4\pi}\int ds\, V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{ds}{r}\frac{\partial V}{\partial n}$$
$$+ \frac{1}{4\pi R^2}\int dS\, V - \frac{1}{4\pi R}\int dS \frac{\partial V}{\partial n}.$$

Von diesen 4 Gliedern verschwindet das letzte, da R unendlich gross ist; setzt man nämlich

$$\frac{1}{4\pi}\int ds \frac{\partial V}{\partial n} = - M, \tag{24)}$$

wo M dann eine gegebene endliche Grösse bedeutet, so ergiebt die Gleichung 16)

$$\frac{1}{4\pi}\int dS \frac{\partial V}{\partial n} = + M.$$

Das dritte jener 4 Glieder ist das arithmetische Mittel aus den Werthen, die V in den Elementen der unendlich grossen Kugelfläche hat; es ist dasselbe einer Constanten gleich; denn verschiebt man den Punkt (a, b, c) und mit ihm die Kugelfläche, deren Mittelpunkt er sein soll, um eine endliche Strecke, so erleiden die Werthe von V, die sich auf die einzelnen Elemente dS beziehen, unendlich kleine Aenderungen, da $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ in der Unendlichkeit unendlich klein sind; das arithmetische Mittel dieser Aenderungen ist also auch unendlich klein, und dieses ist die Aenderung, die das genannte Glied erfährt. Bedeutet C eine Constante, so ist daher

$$V - C = \frac{1}{4\pi}\int ds\, V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{ds}{r} \frac{\partial V}{\partial n}.$$

Diese Gleichung erlaubt die Grössenordnung zu beurtheilen, von der die Differentialquotienten von V in der Unendlichkeit sind. An einer Kugelfläche, die mit dem unendlich grossen Radius R um den Anfangspunkt der Coordinaten beschrieben ist, ist bis auf Grössen, die gegen die anzugebenden verschwinden, wenn M endlich ist,

$$V - C = \frac{M}{R}, \quad \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{M}{R^2}.$$

Ist also für die Elemente der ursprünglich gegebenen Grenzflächen $\frac{\partial V}{\partial n}$, und damit nach 24) M gegeben, und bedeutet dS ein Element eines beliebigen Theiles der unendlich grossen Kugelfläche, so ist

$$\int dS \frac{\partial V}{\partial n}$$

bis auf eine verschwindende Grösse, und daher nach dem oben gewonnenen Resultate V bis auf eine additive Constante bestimmt.

Wir specialisiren den betrachteten Fall noch mehr. Es handle sich um die Bewegung einer Flüssigkeit, in der feste Körper in gegebener Weise sich bewegen. Die Oberflächen dieser sind dann die Flächen, deren Elemente ds genannt worden sind. Hier ist $M = 0$, denn für jeden Körper ist das Integral

$$\int ds \frac{\partial V}{\partial n}$$

gleich Null, da es, mit dem Zeitelement dt multiplicirt, die Aenderung ist, welche in diesem Zeitelement das Volumen der von dem Körper verdrängten Flüssigkeit, also sein eigenes Volumen erleidet. Die Bewegung der Flüssigkeit ist nach den gemachten Auseinandersetzungen vollkommen bestimmt, wenn man noch festsetzt, dass sie in der Unendlichkeit ruht. Sie ist auch bestimmt, wenn man statt dieser Bedingung *die* einführt, dass die Flüssigkeit in eine unendlich grosse, feste und unbewegliche, um den Anfangspunkt der Coordinaten beschriebene Kugelfläche eingeschlossen ist; für alle Elemente dieser Fläche ist dann $\frac{\partial V}{\partial n}$ absolut gleich Null. In diesen beiden Fällen ist die Bewegung der Flüssigkeit *dieselbe*, da in jedem das Integral

$$\int dS \frac{\partial V}{\partial n},$$

ausgedehnt über einen beliebigen Theil der genannten Kugelfläche, verschwindet.

§ 8.

Nach diesen Auseinandersetzungen über die *einwerthigen* Lösungen der Differentialgleichung $\Delta\varphi = 0$ wollen wir diejenigen *mehrwerthigen* ins Auge fassen, die, wie wir am Ende der vorigen Vorlesung gesehen haben, ein Geschwindigkeitspotential in einem mehrfach zusammenhängenden Raume sein können. Wir wollen uns dabei auf die Betrachtung eines zweifach zusammenhängenden Raumes beschränken; die Schlüsse, die wir in Bezug auf einen solchen ziehen werden, lassen sich leicht auf den Fall ausdehnen, dass der Grad des Zusammenhanges ein höherer ist.

Den gegebenen zweifach zusammenhängenden Raum denken wir uns durch einen Querschnitt in einen einfach zusammenhängenden verwandelt. In diesem ist dann, wenn für *einen* Punkt einer von den Werthen von φ als gültig festgesetzt ist, φ eine einwerthige Function. Auf beiden Seiten des Querschnitts kann φ verschiedene Werthe haben, jedoch nur so, dass es denselben Sprung erleidet, an welchem Orte man auch durch den Querschnitt geht; die Differentialquotienten von φ nach x, y, z erfahren dabei keine Sprünge.

Den gewählten Querschnitt denken wir uns nun nach Aussen hin beliebig ausgedehnt, so, dass eine vollkommen begrenzte Fläche entsteht, deren innerhalb des gegebenen Raumes liegender Theil jener Querschnitt ist. Wir nennen ds ein Element dieser Fläche, n die nach der einen Seite der Fläche gerichtete Normale von ds und setzen, wie in der Gleichung 12)

$$W = i\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, ds, \qquad 25)$$

indem wir unter i eine Constante verstehen. Dieses W ist nach den oben durchgeführten Untersuchungen in dem gegebenen doppelt zusammenhängenden Raume eine einwerthige Function, die der Gleichung $\Delta W = 0$ genügt und die die Eigenschaft hat, dass ihre Differentialquotienten stetig sind, und dass sie selbst stetig ist ausser an dem gedachten Querschnitte, an dem sie die sprungweise Vergrösserung $4\pi i$ erfährt, wenn der Punkt (x, y, z) in der Richtung von n durch ihn hindurch geführt wird. Ist nun die Constante i so gewählt, dass dieser Sprung so gross ist, wie der, den φ an dem Querschnitt erleidet, so ist $\varphi - W$ an ihm stetig, und wenn wir

$$\varphi = V + W \tag{26}$$

setzen, so hat V alle Eigenschaften der im Früheren mit diesem Zeichen bezeichneten Functionen.

Die Gleichung 26) giebt für jeden Punkt des betrachteten Raumes nur *einen* von den Werthen von φ an; wir können die Bedeutung von W so modificiren, dass sie alle darstellt. Zu diesem Zwecke müssen wir W statt durch 25), durch die Gleichungen

$$\frac{\partial W}{\partial x} = i\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}ds, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = i\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}ds, \quad \frac{\partial W}{\partial z} = i\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}ds$$

mit dem Zusatze definiren, dass W überall stetig ist, wobei es dann vielwerthig wird. Es möge angeführt werden, dass dann W das Potential eines elektrischen Stromes, der mit der Intensität i in der Grenze der Fläche fliesst, deren Element ds bezeichnet, in Bezug auf einen Magnetpol ist, der die Coordinaten x, y, z hat und die Einheit magnetischer Flüssigkeitsmenge enthält.

§ 9.

Wir wollen nun noch einen Fall in Betracht ziehen, auf den wir mehrfach zurückkommen werden, den Fall nämlich, dass die Function V von einer der Coordinaten (wir nehmen an, von z) unabhängig ist.

Wir wenden die Gleichung 17) auf einen Raum an, der durch eine der z-Achse parallele Cylinderfläche, oder mehrere solche Cylinderflächen, und zwei der xy-Ebene parallele Ebenen, deren Gleichungen $z = -\gamma$ und $z = \gamma$ sein mögen, vollständig begrenzt ist. Wir nehmen dabei γ als unendlich gross gegen alle Werthe an, die x und y in diesem Raume erhalten, auch gegen solche, die wir als unendlich gross bezeichnen werden. Die Coordinaten des Punktes, auf den das V auf der linken Seite der genannten Gleichung sich bezieht, nennen wir wieder a, b, c und setzen $c = 0$. Für die Elemente ds, für welche $z = \pm\gamma$ ist, ist dann r unendlich gross gegen

alle sonst in Betracht kommenden Längen, und es dürfen die beiden Integrale der Gleichung daher nur über die begrenzenden Cylinderflächen ausgedehnt werden. Setzen wir für diese

$$ds = dl\,dz,$$

indem wir unter dl ein Element der Grenze des Theiles der xy-Ebene verstehen, welcher innerhalb des betrachteten Raumes liegt, so erhalten wir

$$V = \frac{1}{4\pi}\int\int_{-\gamma}^{\gamma} dl\,dz \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} V - \frac{1}{4\pi}\int\int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{dl\,dz}{r}\frac{\partial V}{\partial n}.$$

Wir setzen nun

$$\varrho^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2, \quad \text{also} \quad r^2 = \varrho^2 + z^2,$$

und benutzen, dass V und $\frac{\partial V}{\partial n}$ von z unabhängig sind, dass die Normale n senkrecht zur z-Achse ist, dass ferner, da γ gegen ϱ unendlich gross,

$$\int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{\varrho^2+z^2}} = \lg \frac{\gamma + \sqrt{\varrho^2+\gamma^2}}{-\gamma+\sqrt{\varrho^2+\gamma^2}} = 2 \lg \frac{2\gamma}{\varrho}, \tag{27}$$

und dass endlich, wie aus der Gleichung 16) sich ergiebt,

$$\int dl \frac{\partial V}{\partial n} = 0$$

ist; es folgt dann hieraus

$$V = -\frac{1}{2\pi}\int dl\, V \frac{\partial \lg \varrho}{\partial n} + \frac{1}{2\pi}\int dl \frac{\partial V}{\partial n} \lg \varrho. \tag{28}$$

Wendet man diese Gleichung auf einen Kreis an, der mit dem Radius R um den Punkt (a, b) als Mittelpunkt beschrieben ist und einen Theil der Fläche ausmacht, auf welche sich V bezieht, so giebt sie

$$V = \frac{1}{2\pi R}\int dl\, V,$$

d. h. der Werth von V im Mittelpunkte des Kreises ist gleich dem arithmetischen Mittel der Werthe, die es auf der Peripherie desselben hat. Daraus ist weiter zu schliessen, dass V in der Fläche, in der wir es betrachten, kein Maximum und kein Minimum besitzt, und dass, wenn es in ihrem Umfange constant ist, es überall denselben Werth hat. Auch

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)^2$$

kann im Innern der Fläche kein Maximum, wohl aber Minima haben. Ist die Fläche, auf die sich V bezieht, die unbegrenzte xy-Ebene,

und verschwindet V in der Unendlichkeit, so verschwindet es überall; ist in der Unendlichkeit nicht $V = 0$, aber $\frac{\partial V}{\partial a} = 0$ und $\frac{\partial V}{\partial b} = 0$, so gelten diese Gleichungen überall, d. h. es ist V constant, da die Differentialquotienten von V auch die Eigenschaften besitzen, die bei V vorausgesetzt sind.

Wir knüpfen hieran noch den folgenden Satz. Es sei df ein Element eines endlichen Theiles der xy-Ebene, k eine Function seiner Coordinaten, ϱ seine Entfernung von dem Punkte (x, y) derselben Ebene und

$$U = -2\int k\, df \lg \varrho\,; \tag{29}$$

dann ist U eine Function von x und y, die mit ihren ersten Differentialquotienten in der ganzen xy-Ebene einwerthig und stetig ist, und innerhalb der Fläche, deren Element df bedeutet, der Gleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -4\pi k\,,$$

wo k sich auf den Punkt (x, y) bezieht, ausserhalb derselben der Gleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

genügt.

Um diesen Satz zu beweisen, betrachten wir das Potential Ω eines der z-Achse parallelen Cylinders, dessen Querschnitt die Fläche ist, deren Element wir df genannt haben, für dessen Grundflächen $z = \pm \gamma$ ist, wo γ eine Constante bezeichnet, die unendlich gross ist gegen die Coordinaten aller Punkte, für welche Ω berechnet werden soll, und der so mit Masse erfüllt ist, dass k die Dichtigkeit in dem Faden ist, der dem Elemente df entspricht. Nennen wir noch c die z-Ordinate eines Punktes des Cylinders, so ist für den Punkt (x, y, z)

$$\Omega = \int\int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{k\, df\, dc}{\sqrt{\varrho^2 + (c-z)^2}}\,,$$

oder nach 27)

$$\Omega = -2\int k\, df\, (\lg \varrho - \lg 2\gamma)\,,$$

d. h. nach 29)

$$\Omega = U + 2 \lg 2\gamma \int k\, df. \tag{30}$$

Erwägt man, dass das zweite von den beiden Gliedern auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens eine Constante, dass ferner in dem ganzen betrachteten Raume Ω mit seinen ersten Differentialquotienten einwerthig und stetig, $\Delta\Omega$ innerhalb des Cylinders $= -4\pi k$ und

ausserhalb $= 0$ ist, so ergiebt sich hieraus die ausgesprochene Behauptung.

Noch bemerken wir, dass, wenn der Punkt (x, y) in die Unendlichkeit rückt und R seine Entfernung vom Anfangspunkte der Coordinaten bezeichnet, nach der in 29) von U gegebenen Definition

$$U = -2 \lg R \int k\, df, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -2 \frac{x}{R^2} \int k\, df, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -2 \frac{y}{R^2} \int k\, df$$

ist; es wird also U unendlich gross, seine Differentialquotienten aber verschwinden.

Siebenzehnte Vorlesung.

(Transformation der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ in beliebige orthogonale Coordinaten. Elliptische Coordinaten. Strömungen in den Linien, welche ein System confocaler Ellipsoide senkrecht schneiden. Darstellung des Geschwindigkeitspotentials dieser Strömungen als Potential von Massenschichten. Flüssigkeitsvolumen, welches in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt fliesst. Widerstand. Stromlinien, welche ein System confocaler Hyperboloide senkrecht schneiden.)

§ 1.

Eine jede Lösung der partiellen Differentialgleichung $\Delta\varphi = 0$, deren erste Differentialquotienten nach x, y, z in einem gewissen Raume einwerthig und stetig sind, stellt eine mögliche Bewegung einer incompressibeln Flüssigkeit in diesem Raume dar. Im Allgemeinen wird das Geschwindigkeitspotential φ von der Zeit abhängig sein; wir werden für jetzt nur solche Fälle ins Auge fassen, in denen das nicht stattfindet; in jedem Punkte ist dann die Geschwindigkeit zu verschiedenen Zeiten dieselbe, die Bewegung ist, wie man sagt, eine *stationäre*. Da $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ die Componenten der Geschwindigkeit nach den Coordinatenachsen sind, so ist diese überall senkrecht auf den Flächen $\varphi =$ const., die Bewegung geht in den Linien vor sich, die diese Flächen senkrecht schneiden; man nennt diese Linien daher auch, wie früher schon erwähnt, *Stromlinien*. Ist die Flüssigkeit durch feste Wände begrenzt, so muss für alle Elemente dieser $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ sein, oder, was dasselbe ist, es müssen diese Wände durch Stromlinien gebildet sein.

Ein Mittel, welches man anwenden kann, um Lösungen jener partiellen Differentialgleichung zu finden, die Flüssigkeitsbewegungen darstellen, welche von Interesse sind, besteht in der Einführung neuer Coordinaten an Stelle von x, y, z. Dieses Mittel wollen wir anwenden und zu diesem Zwecke die Gleichung $\Delta\varphi = 0$ in neue Coordinaten transformiren, die wir u, v, w nennen. Hierbei dürfen wir φ als einwerthig und stetig annehmen; denn wenn in dem gegebenen Raume φ diese Eigenschaften nicht besitzt, so lässt derselbe in solche Theile sich zerlegen, dass innerhalb eines jeden Theiles φ eine einwerthige, stetige Function oder ein System von einwerthigen, stetigen

ausserhalb $= 0$ ist, so ergiebt sich hieraus die ausgesprochene Behauptung.

Noch bemerken wir, dass, wenn der Punkt (x, y) in die Unendlichkeit rückt und R seine Entfernung vom Anfangspunkte der Coordinaten bezeichnet, nach der in 29) von U gegebenen Definition

$$U = -2 \lg R \int k\, df, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -2 \frac{x}{R^2} \int k\, df, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -2 \frac{y}{R^2} \int k\, df$$

ist; es wird also U unendlich gross, seine Differentialquotienten aber verschwinden.

Siebenzehnte Vorlesung.

(Transformation der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ in beliebige orthogonale Coordinaten. Elliptische Coordinaten. Strömungen in den Linien, welche ein System confocaler Ellipsoide senkrecht schneiden. Darstellung des Geschwindigkeitspotentials dieser Strömungen als Potential von Massenschichten. Flüssigkeitsvolumen, welches in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt fliesst. Widerstand. Stromlinien, welche ein System confocaler Hyperboloide senkrecht schneiden.)

§ 1.

Eine jede Lösung der partiellen Differentialgleichung $\Delta\varphi = 0$, deren erste Differentialquotienten nach x, y, z in einem gewissen Raume einwerthig und stetig sind, stellt eine mögliche Bewegung einer incompressibeln Flüssigkeit in diesem Raume dar. Im Allgemeinen wird das Geschwindigkeitspotential φ von der Zeit abhängig sein; wir werden für jetzt nur solche Fälle ins Auge fassen, in denen das nicht stattfindet; in jedem Punkte ist dann die Geschwindigkeit zu verschiedenen Zeiten dieselbe, die Bewegung ist, wie man sagt, eine *stationäre*. Da $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ die Componenten der Geschwindigkeit nach den Coordinatenachsen sind, so ist diese überall senkrecht auf den Flächen $\varphi =$ const., die Bewegung geht in den Linien vor sich, die diese Flächen senkrecht schneiden; man nennt diese Linien daher auch, wie früher schon erwähnt, *Stromlinien*. Ist die Flüssigkeit durch feste Wände begrenzt, so muss für alle Elemente dieser $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ sein, oder, was dasselbe ist, es müssen diese Wände durch Stromlinien gebildet sein.

Ein Mittel, welches man anwenden kann, um Lösungen jener partiellen Differentialgleichung zu finden, die Flüssigkeitsbewegungen darstellen, welche von Interesse sind, besteht in der Einführung neuer Coordinaten an Stelle von x, y, z. Dieses Mittel wollen wir anwenden und zu diesem Zwecke die Gleichung $\Delta\varphi = 0$ in neue Coordinaten transformiren, die wir u, v, w nennen. Hierbei dürfen wir φ als einwerthig und stetig annehmen; denn wenn in dem gegebenen Raume φ diese Eigenschaften nicht besitzt, so lässt derselbe in solche Theile sich zerlegen, dass innerhalb eines jeden Theiles φ eine einwerthige, stetige Function oder ein System von einwerthigen, stetigen

Functionen ist (die, wenn φ ein Geschwindigkeitspotential ist, durch additive Constanten sich von einander unterscheiden). Für jeden dieser Theile gilt dann die Differentialgleichung, die wir unter der genannten Annahme ableiten werden. Diese berechtigt zur Anwendung des Satzes, der am Ende des § 5 der vorigen Vorlesung bewiesen ist, des Satzes, dass, falls $\Delta\varphi = 0$,

$$\delta\Omega = 0$$

ist, wenn man

$$\Omega = \int d\tau \left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \right), \tag{1}$$

ausgedehnt über einen beliebigen Raum, setzt, für dessen Oberfläche man φ als gegeben annimmt.

Es ist

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial w} dw \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial w} dw \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial w} dw; \end{aligned} \tag{2}$$

wir wollen annehmen, dass u, v, w die Eigenschaft haben, dass die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} &= 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w} &= 0 \\ \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial u} &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

bestehen, und wollen

$$\begin{aligned} \frac{1}{U^2} &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\ \frac{1}{V^2} &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \\ \frac{1}{W^2} &= \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2 \end{aligned} \tag{4}$$

mit der näheren Bestimmung setzen, dass U, V, W positiv sind. Die Gleichungen 2) geben dann

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(\frac{du}{U}\right)^2 + \left(\frac{dv}{V}\right)^2 + \left(\frac{dw}{W}\right)^2. \tag{5}$$

Hieraus ist zu schliessen, dass, wenn man dx, dy, dz als die Coordinaten eines dem Punkte (x, y, z) unendlich nahen Punktes in Bezug auf ein Coordinatensystem betrachtet, dessen Anfangspunkt (x, y, z) ist und dessen Achsen denen der x, y, z parallel sind, $\frac{du}{U}$, $\frac{dv}{V}$, $\frac{dw}{W}$ die Coordinaten desselben Punktes in Bezug auf ein

zweites, rechtwinkliges Coordinatensystem sind, dessen Anfangspunkt derselbe ist, dessen Achsen aber andere Richtungen haben. Schreibt man die Gleichungen 2)

$$dx = U\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{U} + V\frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{V} + W\frac{\partial x}{\partial w}\frac{dw}{W}$$
$$dy = U\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{U} + V\frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{V} + W\frac{\partial y}{\partial w}\frac{dw}{W}$$
$$dz = U\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{U} + V\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{V} + W\frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{W},$$

so sind die Coefficienten von $\frac{du}{U}$, $\frac{dv}{V}$, $\frac{dw}{W}$ in ihnen die Cosinus der Winkel, welche die Achsen der beiden Systeme mit einander bilden. Den Gleichungen, welche du, dv, dw durch dx, dy, dz ausdrücken, kann man die Form geben

$$\frac{du}{U} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{U}dx + \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{U}dy + \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{U}dz$$
$$\frac{dv}{V} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{V}dx + \frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{V}dy + \frac{\frac{\partial v}{\partial z}}{V}dz$$
$$\frac{dw}{W} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{W}dx + \frac{\frac{\partial w}{\partial y}}{W}dy + \frac{\frac{\partial w}{\partial z}}{W}dz,$$

und die Coefficienten von dx, dy, dz sind dann hier dieselben Cosinus. Hieraus folgt

$$U^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$
$$V^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \qquad 6)$$
$$W^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}$$
$$0 = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z} \qquad 7)$$
$$0 = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Die 3 letzten von diesen Gleichungen drücken aus, dass die Flächen

$$u = \text{const.}, \quad v = \text{const.}, \quad w = \text{const.}$$

sich senkrecht schneiden, dass u, v, w sogenannte *orthogonale* Coordinaten sind. Dieser Bedingung müssen u, v, w genügen, wenn die Gleichungen 3) erfüllt werden sollen; genügen sie ihr, so bestehen aber auch diese Gleichungen.

Aus dem Schlusse, den wir aus der Gleichung 5) gezogen haben, folgt weiter, dass wir das Element des Volumens, $d\tau$,

$$= \frac{du}{U}\frac{dv}{V}\frac{dw}{W}$$

setzen können, wenn wir du, dv, dw positiv wählen.

Ferner ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z},$$

also nach 6) und 7)

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 = U^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + V^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 + W^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2.$$

Hiernach wird die Gleichung 1)

$$\Omega = \iiint du\,dv\,dw\left(\frac{U}{VW}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \frac{V}{WU}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 + \frac{W}{UV}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2\right).$$

Dieses Ω ist nun ein Minimum, wenn $\Delta\varphi = 0$ und an der Oberfläche des betrachteten Raumes φ gegeben ist; d. h. es ist für ein beliebiges $\delta\varphi$, das nur an der Oberfläche verschwinden muss,

$$0 = \iiint du\,dv\,dw\left(\frac{U}{VW}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\delta\varphi}{\partial u} + \frac{V}{WU}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\delta\varphi}{\partial v} + \frac{W}{UV}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial\delta\varphi}{\partial w}\right),$$

oder, wenn man die Theile dieses Integrals partiell integrirt, also eine Operation ausführt, die derjenigen ganz entspricht, durch welche wir die Gleichung 14) der vorigen Vorlesung abgeleitet haben, und benutzt, dass an den Grenzen der Integration $\delta\varphi$ verschwindet,

$$0 = \iiint du\,dv\,dw\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{U}{VW}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{V}{WU}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{W}{UV}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)\right)\delta\varphi$$

oder endlich

$$0 = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{U}{VW}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{V}{WU}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{W}{UV}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right). \qquad 8)$$

Diesen Schlüssen liegt die Voraussetzung mit zu Grunde, dass die Grenzen von u, v, w in die Grenzen des betrachteten Raumes fallen; eine Voraussetzung, die man immer erfüllen kann, indem man den Raum in passende Theile zerlegt und diese Theile einzeln betrachtet.

Noch bemerken wir, dass die Gleichung 8), die die gesuchte Transformation der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ ist, ungeändert bleibt, wenn das Vorzeichen einer der Grössen U, V, W in das entgegengesetzte

verwandelt wird. Die Festsetzung, die wir gemacht haben, dass diese Grössen positiv sind, ist daher in Bezug auf das gewonnene Resultat überflüssig.

§ 2.

Wir werden jetzt annehmen, dass u, v, w sogenannte *elliptische* Coordinaten sind; wie wir beweisen werden, sind diese orthogonale.

Die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1 \qquad 9)$$

stellt eine Oberfläche zweiten Grades dar, deren Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten ist, und deren Hauptachsen die Richtungen der Coordinatenachsen haben. Es sei

$$a^2 > b^2 > c^2,$$

dann sind die Entfernungen der Brennpunkte der Hauptschnitte von dem Mittelpunkte

$$\sqrt{a^2 - b^2}, \quad \sqrt{a^2 - c^2}, \quad \sqrt{b^2 - c^2};$$

die beiden ersten Paare derselben liegen auf der x-Achse, das dritte liegt auf der y-Achse. Die Brennpunkte sind also unabhängig von λ, und die durch die Gleichung 9) bei verschiedenen Werthen von λ dargestellten Oberflächen heissen daher *confocale*. Damit dieselben reell sind, muss λ zwischen $+\infty$ und $-a^2$ liegen. Sie zerfallen in 3 Gruppen nach den Werthen von λ. Wenn

$$+\infty > \lambda > -c^2$$

ist, so sind die 3 Glieder der linken Seite der Gleichung 9) positiv, die Fläche ist ein Ellipsoid, sie wird durch jede der 3 Coordinatenachsen in reellen Punkten geschnitten. Ist

$$-c^2 > \lambda > -b^2,$$

so sind nur die beiden ersten jener 3 Glieder positiv, das dritte ist negativ, die Fläche wird von der x-Achse und der y-Achse in reellen Punkten geschnitten, nicht aber von der z-Achse; sie ist ein einschaliges Hyperboloid. Ist endlich

$$-b^2 > \lambda > -a^2,$$

so ist nur das erste jener 3 Glieder positiv, nur durch die x-Achse wird die Fläche in reellen Punkten geschnitten; diese ist ein zweischaliges Hyperboloid.

Durch jeden Punkt (x, y, z) geht, bei gegebenen Werthen von a, b, c, je eine Fläche jeder dieser 3 Gattungen. Die Gleichung 9) ist nämlich eine Gleichung dritten Grades für λ und ihre drei Wurzeln liegen immer in den bezeichneten 3 Intervallen. Um einzusehen, dass

zwischen $+\infty$ und $-c^2$ eine Wurzel liegen muss, hat man nur zu überlegen, dass die linke Seite der Gleichung für $\lambda = +\infty$ verschwindet und $+\infty$ wird für $\lambda = -c^2 + \varepsilon$, wo ε eine positive, unendlich kleine Grösse bezeichnet, für jenen Werth von λ also kleiner, für diesen grösser, als die rechte Seite derselben ist. Zwischen $-c^2$ und $-b^2$ muss eine Wurzel liegen, weil die linke Seite der Gleichung $-\infty$ für $\lambda = -c^2 - \varepsilon$ und $+\infty$ für $\lambda = -b^2 + \varepsilon$ wird; dass endlich zwischen $-b^2$ und $-a^2$ ebenfalls eine Wurzel liegen muss, folgt durch eine ähnliche Schlussweise. Die drei Wurzeln der Gleichung 9), die einem Punkte (x, y, z) entsprechen, nennt man *elliptische Coordinaten* desselben. Wir wollen sie durch u, v, w bezeichnen und festsetzen, dass

$$u > v > w$$

ist. Es ist dann

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1, \quad +\infty > u > -c^2 \\ &\frac{x^2}{a^2+v} + \frac{y^2}{b^2+v} + \frac{z^2}{c^2+v} = 1, \quad -c^2 > v > -b^2 \\ &\frac{x^2}{a^2+w} + \frac{y^2}{b^2+w} + \frac{z^2}{c^2+w} = 1, \quad -b^2 > w > -a^2. \end{aligned} \tag{10}$$

Jedem Punkte (x, y, z) entspricht hiernach nur *ein* Werthsystem von u, v, w. Sind umgekehrt u, v, w gegeben, so sind x^2, y^2, z^2 eindeutig bestimmt, denn sie sind aus linearen Gleichungen zu berechnen; die Vorzeichen von x, y, z aber bleiben unbestimmt; jedem Werthsystem von u, v, w entsprechen also im Allgemeinen 8 Punkte, von denen je einer in jedem der 8 Räume liegt, die die Coordinatenebenen von einander abgrenzen.

Die Ausdrücke von x^2, y^2, z^2 durch u, v, w findet man am leichtesten, wenn man erwägt, dass, da u, v, w die Wurzeln der Gleichung 9) sein sollen, für jeden Werth von λ

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1 = \frac{(u-\lambda)(v-\lambda)(w-\lambda)}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)} \tag{11}$$

sein muss, und hier $a^2+\lambda$ oder $b^2+\lambda$ oder $c^2+\lambda$ einer unendlich kleinen Grösse gleichsetzt. Man erhält dann

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{(a^2+u)(a^2+v)(a^2+w)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} \\ y^2 &= \frac{(b^2+u)(b^2+v)(b^2+w)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)} \\ z^2 &= \frac{(c^2+u)(c^2+v)(c^2+w)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}. \end{aligned} \tag{12}$$

Aus der identischen Gleichung 11) wollen wir noch einen andern Schluss ziehen. Differentiirt man dieselbe nach λ, so erhält man

$$\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}$$
$$=\frac{(u-\lambda)(v-\lambda)(w-\lambda)}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}\left(\frac{1}{u-\lambda}+\frac{1}{v-\lambda}+\frac{1}{w-\lambda}+\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}\right);$$

setzt man $u-\lambda$ oder $v-\lambda$ oder $w-\lambda$ unendlich klein, so folgt hieraus

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{(a^2+u)^2}+\frac{y^2}{(b^2+u)^2}+\frac{z^2}{(c^2+u)^2}&=\frac{(u-v)(u-w)}{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}\\
\frac{x^2}{(a^2+v)^2}+\frac{y^2}{(b^2+v)^2}+\frac{z^2}{(c^2+v)^2}&=\frac{(v-w)(v-u)}{(a^2+v)(b^2+v)(c^2+v)}\\
\frac{x^2}{(a^2+w)^2}+\frac{y^2}{(b^2+w)^2}+\frac{z^2}{(c^2+w)^2}&=\frac{(w-u)(w-v)}{(a^2+w)(b^2+w)(c^2+w)}\,.
\end{aligned}\qquad 13)$$

Zu diesen Gleichungen fügen wir diejenigen, die entstehen, wenn man je zwei der Gleichungen 10) von einander abzieht; sie sind die folgenden

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{(a^2+u)(a^2+v)}+\frac{y^2}{(b^2+u)(b^2+v)}+\frac{z^2}{(c^2+u)(c^2+v)}&=0\\
\frac{x^2}{(a^2+v)(a^2+w)}+\frac{y^2}{(b^2+v)(b^2+w)}+\frac{z^2}{(c^2+v)(c^2+w)}&=0\\
\frac{x^2}{(a^2+w)(a^2+u)}+\frac{y^2}{(b^2+w)(b^2+u)}+\frac{z^2}{(c^2+w)(c^2+u)}&=0.
\end{aligned}\qquad 14)$$

Differentiirt man die Gleichungen 12) partiell nach u oder v oder w und dividirt das Resultat jedesmal durch diejenige dieser Gleichungen, aus der es hergeleitet ist, so erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u}&=\frac12\frac{x}{a^2+u}, & \frac{\partial x}{\partial v}&=\frac12\frac{x}{a^2+v}, & \frac{\partial x}{\partial w}&=\frac12\frac{x}{a^2+w},\\
\frac{\partial y}{\partial u}&=\frac12\frac{y}{b^2+u}, & \frac{\partial y}{\partial v}&=\frac12\frac{y}{b^2+v}, & \frac{\partial y}{\partial w}&=\frac12\frac{y}{b^2+w},\\
\frac{\partial z}{\partial u}&=\frac12\frac{z}{c^2+u}, & \frac{\partial z}{\partial v}&=\frac12\frac{z}{c^2+v}, & \frac{\partial z}{\partial w}&=\frac12\frac{z}{c^2+w}.
\end{aligned}\qquad 15)$$

Die Gleichungen 15) und 14) geben die Gleichungen 3), welche ein Kriterium dafür bilden, dass u, v, w orthogonale Coordinaten sind. Die Gleichungen 15), 13) und 4) erlauben U^2, V^2, W^2 zu berechnen. Sie geben

$$\begin{aligned}
U^2&=4\,\frac{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}{(u-v)(u-w)}\\
V^2&=4\,\frac{(a^2+v)(b^2+v)(c^2+v)}{(v-w)(v-u)}\\
W^2&=4\,\frac{(a^2+w)(b^2+w)(c^2+w)}{(w-u)(w-v)}\,.
\end{aligned}\qquad 16)$$

Wir schliessen hier noch eine Gleichung an, die aus 15) sich ergiebt, und von der wir später Gebrauch zu machen haben werden. Aus der identischen Gleichung

$$u=u,$$

in der auf der rechten Seite u durch x, y, z, und x, y, z durch u, v, w ausgedrückt gedacht werden sollen, folgt

$$1 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},$$

also nach 15)

$$2 = \frac{x}{a^2+u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{y}{b^2+u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{c^2+u}\frac{\partial u}{\partial z}. \tag{17}$$

Die Differentialquotienten von u, v, w nach x, y, z kann man leicht berechnen aus den Differentialquotienten von x, y, z nach u, v, w mit Hülfe der Relationen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= U^2\frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial v}{\partial x} &= V^2\frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial w}{\partial x} &= W^2\frac{\partial x}{\partial w}\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= U^2\frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= V^2\frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial w}{\partial y} &= W^2\frac{\partial y}{\partial w}\\
\frac{\partial u}{\partial z} &= U^2\frac{\partial z}{\partial u}, & \frac{\partial v}{\partial z} &= V^2\frac{\partial z}{\partial v}, & \frac{\partial w}{\partial z} &= W^2\frac{\partial z}{\partial w},
\end{aligned} \tag{18}$$

die aus der Bemerkung sich ergeben, die wir bei den im vorigen § zwischen dx, dy, dz und $\frac{du}{U}, \frac{dv}{V}, \frac{dw}{W}$ aufgestellten Gleichungen über die in ihnen vorkommenden Coefficienten gemacht haben.

Sehen wir jetzt zu, welches die Flächen sind, in welche die Flächen $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, $w = \text{const.}$ übergehen, wenn u, v oder w sich einer Grenze des Intervalls nähert, in dem es liegen muss. Wir finden diese aus den Gleichungen 10).

Ist $u = +\infty$, so stellt die erste dieser Gleichungen eine unendlich grosse Kugel dar, deren Radius $\sqrt{u}$ ist.

Ist $u = -c^2 + \varepsilon$, wo ε wieder eine positive, unendlich kleine Grösse bedeutet, so giebt dieselbe Gleichung

$$z = 0 \text{ und } \frac{x^2}{a^2-c^2} + \frac{y^2}{b^2-c^2} < 1;$$

hierdurch ist die Fläche einer Ellipse dargestellt, die in der xy-Ebene liegt, deren Halbachsen die Längen $\sqrt{a^2-c^2}$, $\sqrt{b^2-c^2}$ und die Richtungen der x- und y-Achse haben.

Ist $v = -c^2 - \varepsilon$, so folgt aus der zweiten jener Gleichungen

$$z = 0 \text{ und } \frac{x^2}{a^2-c^2} + \frac{y^2}{b^2-c^2} > 1;$$

das sind die Gleichungen des Stückes der xy-Ebene, welches nach Ausschluss der eben genannten Ellipse übrig bleibt.

Ist $v = -b^2 + \varepsilon$, so hat man

$$y = 0 \text{ und } \frac{x^2}{a^2-b^2} - \frac{z^2}{b^2-c^2} < 1;$$

die hierdurch bestimmte Fläche ist der zusammenhängende Theil der zx-Ebene, der durch die Hyperbel begrenzt ist, deren Gleichung aus der gefundenen Ungleichheit entsteht, wenn man das Zeichen $<$ durch das Gleichheitszeichen ersetzt.

Ist $w = -b^2 - \varepsilon$, so wird

$$y = 0 \text{ und } \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 - c^2} > 1,$$

wodurch die beiden nicht zusammenhängenden Theile der zx-Ebene, die durch dieselbe Hyperbel begrenzt werden, dargestellt sind.

Ist endlich $w = -a^2 + \varepsilon$, so ergiebt sich

$$x = 0$$

ohne weitere Beschränkung; die in Rede stehende Fläche ist die ganze yz-Ebene.

Alle diese Flächen zusammengenommen sind also die unendlich grosse Kugel und die 3 Coordinatenebenen. Zugleich sehen wir bei dieser Ueberlegung ein, dass eine Gleichheit zweier der 3 Grössen u, v, w nur stattfindet für die Ellipse

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1, \tag{19}$$

wo

$$u = v = -c^2$$

ist, und für die Hyperbel

$$y = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 - c^2} = 1, \tag{20}$$

wo

$$v = w = -b^2$$

ist. Die Ebenen dieser beiden Linien stehen senkrecht auf einander und eine jede von ihnen geht durch die Brennpunkte der andern.

Hat man statt eines Punktes im Raume (x, y, z) einen Punkt (y, z) in einer Ebene zu betrachten, so gelten Schlüsse und Formeln, die den entwickelten ganz analog sind.

§ 3.

Um nun für die elliptischen Coordinaten die Gleichung 8) zu bilden, haben wir mit Hülfe von 16) die Werthe von $\frac{U}{VW}$, $\frac{V}{WU}$, $\frac{W}{UV}$ aufzusuchen. Es ergiebt sich

$$\left(\frac{U}{VW}\right)^2 = -\frac{1}{4}\,\frac{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)(v-w)^2}{(a^2+v)(b^2+v)(c^2+v)(a^2+w)(b^2+w)(c^2+w)}.$$

Hiernach ist $\frac{U}{VW}$ eine Function von u, multiplicirt mit einer Function von v und w; das Entsprechende gilt offenbar von $\frac{V}{WU}$ und $\frac{W}{UV}$.

Auf diesem Umstande beruht die Möglichkeit, die in Rede stehende Differentialgleichung noch einfacher darzustellen dadurch, dass man an Stelle von u, v, w gewisse Functionen von je einer dieser Grössen einführt. Ist nämlich u_1 eine Function von u, so ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \frac{du_1}{du},$$

also

$$\frac{U}{VW} \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{U}{VW} \frac{du_1}{du} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}.$$

Nun ist es nach der gemachten Bemerkung möglich, die Function u_1 so zu bestimmen, dass der Factor von $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}$ in dieser Gleichung unabhängig von u wird; ist das geschehen, so hat man

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{U}{VW} \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) = \frac{U}{VW}\left(\frac{du_1}{du}\right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1^2}.$$

Bezeichnet man durch v_1 und w_1 Functionen von v und w, die in entsprechender Weise gebildet sind, und multiplicirt die Gleichung 8) mit UVW, so wird dieselbe

$$U^2\left(\frac{du_1}{du}\right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1^2} + V^2\left(\frac{dv_1}{dv}\right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v_1^2} + W^2\left(\frac{dw_1}{dw}\right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w_1^2} = 0. \qquad 21)$$

Wir merken an, dass zugleich

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \\ = {} & U^2\left(\frac{du_1}{du}\right)^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\right)^2 + V^2\left(\frac{dv_1}{dv}\right)^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v_1}\right)^2 + W^2\left(\frac{dw_1}{dw}\right)^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial w_1}\right)^2 \end{aligned} \qquad 22)$$

ist in Folge des Ausdruckes, den wir für die Grösse auf der linken Seite des Gleichheitszeichens bei Ableitung der Gleichung 8) aufgestellt haben.

Man genügt den für u_1, v_1, w_1 genannten Bedingungen, wenn man

$$\begin{aligned} du_1 &= \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}} \\ dv_1 &= \frac{dv}{\sqrt{-(a^2+v)(b^2+v)(c^2+v)}} \\ dw_1 &= \frac{dw}{\sqrt{(a^2+w)(b^2+w)(c^2+w)}} \end{aligned} \qquad 23)$$

setzt. Dadurch werden die Gleichungen 21) und 22)

$$\frac{1}{(u-v)(u-w)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1^2} - \frac{1}{(v-w)(v-u)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v_1^2} + \frac{1}{(w-u)(w-v)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w_1^2} = 0$$

oder

$$(v-w) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1^2} - (w-u) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v_1^2} + (u-v) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w_1^2} = 0 \qquad 24)$$

und

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \\ = {} & \frac{4}{(u-v)(u-w)}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\right)^2 - \frac{4}{(v-w)(v-u)}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v_1}\right)^2 + \frac{4}{(w-u)(w-v)}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial w_1}\right)^2. \end{aligned} \qquad 25)$$

Für *einen* Punkt können die Werthe von u_1, v_1, w_1 und die Vorzeichen der in 23) vorkommenden Wurzelgrössen beliebig gewählt werden; für andere Punkte sind diese Vorzeichen dann so zu bestimmen, dass $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ stetig sind in dem Gebiete, in dem sie stetig sein sollen.

§ 4.

Ein Blick auf die Differentialgleichung 24) lehrt gewisse particuläre Lösungen derselben kennen; u_1, v_1, w_1 selbst sind solche. Verfolgen wir zuerst die erste von diesen näher; setzen wir also

$$\varphi = u_1.$$

Die Oberflächen $\varphi = \text{const.}$ sind dann die confocalen Ellipsoide $u = \text{const.}$ Sehen wir φ als ein Geschwindigkeitspotential an, so sind die Stromlinien die Curven, welche auf diesen senkrecht stehen, d. h. die Schnittlinien der Hyperboloide $v = \text{const.}$ und $w = \text{const.}$; diese bilden, wie wir hier nicht beweisen wollen, ein System von Krümmungslinien, welche die genannten Hyperboloide mit einander gemein haben. In dem speciellen Falle, dass $a = b$ ist, sind sie die Hyperbeln, deren Ebenen durch die z-Achse gehen, und deren Brennpunkte auf der Kreislinie liegen, in welche die Ellipse 19) dann übergeht. Immer geht durch jeden Punkt der Fläche der genannten Ellipse (die eines der Ellipsoide $u = \text{const.}$ ist) eine dieser Linien und schneidet dieselbe senkrecht. In der Unendlichkeit, wo u unendlich ist, sind nach den Gleichungen 12) die Verhältnisse von $x^2 : y^2 : z^2$, also auch die Verhältnisse von $x : y : z$ von u unabhängig; d. h. die Linien sind Gerade, die nach dem Anfangspunkte der Coordinaten hin oder von ihm fort gehen. Das Quadrat der Geschwindigkeit ist der Gleichung 25) zufolge

$$= \frac{4}{(u-v)(u-w)}, \tag{26}$$

oder nach der ersten der Gleichungen 13)

$$= \frac{4}{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)\left(\frac{x^2}{(a^2+u)^2} + \frac{y^2}{(b^2+u)^2} + \frac{z^2}{(c^2+u)^2}\right)} \cdot \tag{26a}$$

Die Geschwindigkeit hat daher überall im Endlichen einen bestimmten, endlichen, stetig sich ändernden Werth, nur in der Ellipse 19), in der $u = v$ ist, ist sie unendlich; in der Unendlichkeit ist sie

$$= \frac{2}{r^2},$$

wenn r die Entfernung des betrachteten Punktes vom Anfangspunkte bedeutet, weil dann, wie wir im vorigen § gesehen haben, $u = r^2$

ist. Die Richtung der Bewegung kann in jedem Punkte die eine oder die andere von den beiden Richtungen sein, welche die durch diesen Punkt gehende Stromlinie in ihm hat. Hierauf beruht es, dass φ oder u_1, abgesehen von der additiven Constanten, die bei dieser Function willkürlich geblieben ist, noch mannichfaltiger Art sein kann. Allerdings kann die Richtung der Bewegung im Innern der Flüssigkeit nicht sprungweise in die entgegengesetzte übergehen; das ist aber möglich an einer Fläche, welche den Zusammenhang der Flüssigkeit unterbricht. Die Richtung der Bewegung in einem Punkte umkehren, ist dasselbe, wie der Wurzelgrösse, die in der ersten der Gleichungen 23) vorkommt, das entgegengesetzte Zeichen geben; bei der Umkehrung dieses Zeichens erhalten ja $\frac{\partial u_1}{\partial x}$, $\frac{\partial u_1}{\partial y}$, $\frac{\partial u_1}{\partial z}$ entgegengesetzte Werthe. Im Innern der Flüssigkeit darf diese Wurzelgrösse ihr Zeichen nicht ändern, wo sie nicht Null ist; sie ist $= 0$ in der Fläche der mehrfach genannten Ellipse, und allein in dieser, da hier $u = -c^2$ ist. Ist diese Fläche nicht eine Grenze, so *muss* bei dem Durchgange durch sie das Vorzeichen der Wurzelgrösse geändert werden, weil dabei das Vorzeichen von du sich ändert, da $-c^2$ der kleinste Werth ist, den u annehmen kann, und weil u_1 fortfahren muss zuzunehmen oder abzunehmen. An keinem andern Punkte im Innern der Flüssigkeit kann ein Zeichenwechsel der Wurzelgrösse stattfinden. Es folgt daraus, dass eine durch die Gleichung $\varphi = u_1$ dargestellte Bewegung nicht möglich ist, wenn nicht eine Fläche in der Flüssigkeit sich befindet, die ihren Zusammenhang unterbricht. Als solche Fläche kann jede Fläche dienen, die durch die Ellipse 19) vollständig begrenzt ist. Man hat sich dann vorzustellen, dass jedes Element der gewählten Fläche auf beiden Seiten Flüssigkeit ausströmen lässt oder einsaugt. Unter der Annahme, dass die Fläche ganz im Endlichen liegt, kann man noch festsetzen, dass in der Unendlichkeit u_1 verschwindet und $\frac{du_1}{du}$ negativ ist, also, nach den über die Geschwindigkeit gemachten Angaben, für ein unendlich grosses r

$$u_1 = \frac{2}{r}$$

ist. Es wird dadurch u_1 vollständig bestimmt. Aendert man die Fläche, so ändert man dadurch den Werth von u_1 nur in dem Raume, den die Fläche bei ihrer Veränderung beschreibt.

Wir wollen zeigen, dass u_1 sich darstellen lässt als die Summe der Potentiale einer einfachen Massenschicht und einer Doppelschicht, die in der gewählten Fläche liegen. Zu diesem Zwecke denken wir uns die letztere umgeben mit einer beliebigen, geschlossenen Fläche, deren Element ds sein möge, während n die nach Aussen gekehrte Normale von ds bezeichnen soll. Für irgend einen äusseren Punkt

ist dann nach der Gleichung 17) der vorigen Vorlesung und der Verallgemeinerung, die dieser in § 7 derselben Vorlesung gegeben ist,

$$u_1 = \frac{1}{4\pi}\int ds\, u_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{ds}{r}\frac{\partial u_1}{\partial n}. \qquad 27)$$

Nun denken wir uns die Fläche, deren Element ds ist, so zusammengezogen, dass sie aus zwei Flächenstücken besteht, die in die ursprünglich gedachte, durch die Ellipse 19) begrenzte Fläche fallen, und einer unendlich dünnen Röhrenfläche, welche diese Ellipse umschliesst, und deren senkrechte Querschnitte Kreise sind, die den unendlich kleinen Radius ϱ und ihre Mittelpunkte in der Ellipse haben. Ueber diese Röhrenfläche ausgedehnt, verschwinden die beiden in 27) vorkommenden Integrale, weil u_1 für $\varrho = 0$ nicht unendlich wird. In der That wird für $\varrho = 0$ der Werth von u_1 nicht unendlich, sondern

$$= \int_{-c^2}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}} \text{ d. h. } = 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(a^2-c^2+x^2)(b^2-c^2+x^2)}}; \qquad 28)$$

dass aus diesem Grunde das erste der beiden in 27) vorkommenden Integrale, über die Röhrenfläche ausgedehnt, verschwindet, sieht man ein, wenn man erwägt, dass $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$ oder, was dasselbe ist, $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \varrho}$ an dieser überall endliche Werthe hat, die Grösse der Röhrenfläche aber von der Ordnung von ϱ ist. Was das zweite jener beiden Integrale anbelangt, so ist $\frac{\partial u_1}{\partial n}$ d. h. $\frac{\partial u_1}{\partial \varrho}$ allerdings unendlich gross, aber $\varrho \frac{\partial u_1}{\partial \varrho}$ ist unendlich klein, da u_1 für $\varrho = 0$ nicht unendlich wird und $\frac{\partial u_1}{\partial \varrho}$, d. h. $\frac{du_1}{du}\frac{\partial u}{\partial \varrho}$ nach aufsteigenden gebrochenen Potenzen von ϱ entwickelbar ist; da die Grösse der Röhrenfläche von der Ordnung von ϱ ist, so folgt hieraus, dass auch dieses zweite Integral über die Röhrenfläche ausgedehnt verschwindet. Bei der Bildung der Gleichung 27) hat man daher nur die Flächenstücke zu berücksichtigen, welche in die ursprünglich gedachte, durch die Ellipse 19) begrenzte Fläche fallen. Wir wollen jetzt unter ds ein Element *dieser* Fläche, mit Ausschluss eines unendlich schmalen Streifens an der begrenzenden Ellipse verstehen. In jedem der beiden Integrale der Gleichung 27) kommt dann jedes ds zweimal vor. Wir wollen die beiden Seiten dieses Elementes als die innere und die äussere unterscheiden, und zwar soll die innere diejenige sein, von der aus man nicht in die Unendlichkeit kommen kann, ohne entweder durch die Fläche, der ds angehört, oder durch die Fläche der Ellipse 19) zu gehen; es sei ferner n die nach der innern Seite gerichtete Normale von ds

und das Zeichen u_1 unter den Integralzeichen beziehe sich auf die innere Seite von ds, während für die äussere Seite das Zeichen u_1' gebraucht werden soll. Dann wird die Gleichung 27)

$$u_1 = \frac{1}{4\pi}\int ds\,(u_1 - u_1')\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{ds}{r}\left(\frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_1'}{\partial n}\right), \qquad 29)$$

wodurch u_1 in der Weise dargestellt ist, in der es nach der ausgesprochenen Behauptung darstellbar sein sollte.

Nehmen wir an, dass die Fläche, deren Element ds bedeutet, die Fläche der Ellipse 19) selbst ist, so verschwindet das erste von den beiden in 29) vorkommenden Integralen; denn in der Fläche der Ellipse ist $u = -c^2$, es hat also u_1 und u_1' den in 28) angegebenen Werth. Es ist dann

$$u_1 = \int \frac{ds}{r}\,h;$$

es ist u_1 als ein Potential einer einfachen Massenschicht dargestellt, deren Dichtigkeit h durch

$$h = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_1'}{\partial n}\right)$$

bestimmt ist. Für n kann hier nach Willkür die nach der einen oder nach der andern Seite gekehrte Normale der Fläche der Ellipse gewählt werden; benutzt man, dass diese Fläche von den Stromlinien senkrecht geschnitten wird, so findet man aus der in 26a) über die Geschwindigkeit gemachten Angabe, indem man $\frac{z^2}{c^2+u}$ mit Hülfe der ersten der Gleichungen 10) eliminirt,

$$h = \frac{1}{\pi\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2-c^2}-\frac{y^2}{b^2-c^2}}}.$$

Die Masse der ganzen Schicht findet man unmittelbar aus der Bemerkung, die wir gemacht haben, dass in der Unendlichkeit $u_1 = \frac{2}{r}$ ist; daraus folgt diese Masse $= 2$.

Wir bemerken beiläufig, dass diese Resultate für die Elektricitätslehre insofern von Wichtigkeit sind, als sie die Gleichgewichtsvertheilung der Elektricität auf einer leitenden elliptischen Scheibe kennen lehren. Die Elektricitätsmenge, welche in einem Leiter das Potential 1 hervorbringt, nennt man die *Capacität* desselben; nach 28) ist daher die Capacität einer elliptischen Scheibe, deren Halbachsen $\sqrt{a^2-c^2}$ und $\sqrt{b^2-c^2}$ sind, das Reciproke von

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(a^2-c^2+x^2)(b^2-c^2+x^2)}}. \qquad 30)$$

Ist die Fläche, deren Element in 29) mit ds bezeichnet ist, nicht die Fläche der Ellipse 19), so gilt der jetzt für u_1 entwickelte Ausdruck auch für den ganzen Raum mit Ausschluss des durch die beiden eben genannten Flächen begrenzten Theiles; in diesem nimmt auf jeder Stromlinie u_1 gerade so zu, wie es hier in jenem Falle abnahm. Denken wir uns, dass die genannte Fläche ins Unendliche und so ausgedehnt wird, dass ihr im Endlichen liegender Theil mit dem Theile der xy-Ebene ausserhalb der Ellipse 19) zusammenfällt, so hat auf jeder Stromlinie, so weit sie im Endlichen liegt, die Bewegung ununterbrochen denselben Sinn; der ausserhalb der Ellipse 19) liegende Theil der xy-Ebene bildet eine feste Wand, längs welcher Flüssigkeitstheilchen sich bewegen; während auf der einen Seite dieser in der Unendlichkeit $u_1 = 0$ ist, ist u_1 auf der andern

$$= 4\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - c^2 + x^2)(b^2 - c^2 + x^2)}}\,.$$

Dieselben Werthe würde das Geschwindigkeitspotential u_1 besitzen können, wenn der von der Flüssigkeit erfüllte Raum durch irgend eine Fläche begrenzt wäre, die aus Linien, deren Gleichungen $v =$ const. und $w =$ const. sind, zusammengesetzt ist. Ein hierher gehöriger Fall ist es, dass die Flüssigkeit durch eine feste Wand begrenzt ist, die irgend ein einschaliges Hyperboloid $v =$ const. bildet, und den einfach zusammenhängenden Raum, dessen Oberfläche dieses ist, erfüllt. Wir wollen für diesen Fall das Volumen der Flüssigkeit aufsuchen, welches in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt strömt; mit diesem Namen belegen wir irgend eine sich selbst nicht schneidende Fläche, welche vollständig durch ihren Schnitt mit der Wand begrenzt ist. Derselbe theilt den von der Flüssigkeit erfüllten Raum in zwei getrennte Theile; es soll sich darum handeln, das Flüssigkeitsvolumen zu finden, welches aus dem ersten in den zweiten dieser Theile tritt. Wir nennen ds ein Element des Querschnittes, n die nach dem Innern des *zweiten* Theiles gerichtete Normale von ds; das gesuchte Volumen ist dann

$$= \int ds\, \frac{\partial u_1}{\partial n}\,.$$

Von der Gestalt und Lage des Querschnittes ist dieses Integral unabhängig, wie aus der Gleichung 16) der vorigen Vorlesung hervorgeht; um seinen Werth zu finden, können wir daher als Querschnitt einen Theil der mit dem unendlich grossen Radius r beschriebenen Kugelfläche wählen. Nehmen wir die Normale n in der Richtung der Strömung an, so ist dann, wie wir gesehen haben,

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{2}{r^2}\,.$$

Setzen wir das Stück der Kugelfläche, welches die hyperboloidische Wand ausschneidet,

$$= K r^2 ,$$

d. h. bezeichnen wir durch K die Oeffnung des Asymptotenkegels des Hyperboloids, so wird also das gesuchte Flüssigkeitsvolumen

$$= 2 K .$$

Wir wollen einen für elektrische Strömungen eingeführten Ausdruck übertragen auf Flüssigkeitsbewegungen, wie wir sie hier betrachten; wir wollen nämlich von dem *Widerstande* eines von Flüssigkeit durchströmten Raumes sprechen, der durch eine feste Wand und zwei Flächen gleichen Geschwindigkeitspotentials begrenzt ist, und darunter die Differenz der Werthe des Geschwindigkeitspotentials in diesen beiden Flächen, dividirt durch das in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt tretende Flüssigkeitsvolumen, verstehen. Der Widerstand des durch das gedachte Hyperboloid begrenzten und nach beiden Seiten sich ins Unendliche erstreckenden Raumes ist dann

$$= \frac{2}{K} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - c^2 + x^2)(b^2 - c^2 + x^2)}} . \tag{31}$$

§ 5.

Betrachtungen, wie wir sie über die particuläre Lösung $\varphi = u_1$ der Differentialgleichung 24) angestellt haben, lassen sich mit gewissen Modificationen auch anstellen über die Lösungen $\varphi = v_1$ und $\varphi = w_1$. Wir wollen über diese aber nur Folgendes bemerken. Eine jede von ihnen stellt eine mögliche Flüssigkeitsbewegung dar; bei dieser sind die Stromlinien die Krümmungslinien der einen oder der andern Art der Ellipsoide $u =$ const. Eine jede dieser Krümmungslinien läuft in sich zurück; sind die Stromlinien nicht unterbrochen durch Flächen, welche Flüssigkeit ausströmen oder einströmen lassen, so ist daher das Geschwindigkeitspotential vielwerthig und der von der Flüssigkeit erfüllte Raum muss also ein mehrfach zusammenhängender sein. Immer kann dieser Raum durch feste Wände begrenzt sein, welche aus Stromlinien gebildet sind.

Setzen wir $\varphi = v_1$, so sind die Stromlinien die Schnittlinien der Ellipsoide $u =$ const. und der zweischaligen Hyperboloide $w =$ const.; die Flüssigkeit kann den zweifach zusammenhängenden Raum erfüllen, der ausserhalb eines jener Ellipsoide liegt und einen Theil des zusammenhängenden Raumes bildet, der durch eines dieser Hyperboloide begrenzt ist. Das Quadrat der Geschwindigkeit ist nach 25)

$$- \frac{4}{(v - w)(v - u)} ;$$

sie wird also unendlich für die Ellipse 19), in der $v = u$, und für die Hyperbel 20), in der $v = w$ ist. Diese beiden Linien liegen nicht im Innern des der Flüssigkeit angewiesenen Raumes, sie liegen aber in seiner Grenze, wenn man das Ellipsoid in die Fläche der Ellipse 19) übergehen lässt und das Hyperboloid in die beiden nicht zusammenhängenden Stücke der zx-Ebene, welche durch die Hyperbel 20) abgegrenzt werden.

Machen wir $\varphi = w_1$, so sind die Stromlinien die Linien, in denen die Ellipsoide $u =$ const. und die einschaligen Hyperboloide $v =$ const. sich schneiden; die Flüssigkeit kann den zweifach zusammenhängenden Raum erfüllen, den eines dieser Hyperboloide begrenzt. Das Quadrat der Geschwindigkeit ist nach 25)

$$\frac{4}{(w-u)(w-v)}.$$

Die Geschwindigkeit ist daher unendlich nur für die Hyperbel 20), welche nie innerhalb des genannten Raumes, aber in seiner Grenze liegt, wenn das Hyperboloid in das zusammenhängende Stück der zx-Ebene übergeht, das durch die Hyperbel 20) begrenzt ist.

Verfolgen wir die durch die Gleichung $\varphi = w_1$ dargestellte Bewegung noch weiter für den Fall, dass die die Flüssigkeit begrenzende Wand eine Rotationsfläche ist, die die z-Achse zur Achse hat. Wir haben dann $a = b$, oder vielmehr, um die aufgestellten Formeln benutzen zu können, $a - b$ unendlich klein anzunehmen. Die Stromlinien sind die Kreise, deren Ebenen senkrecht zur z-Achse stehen, und deren Mittelpunkte in der z-Achse liegen. Es handelt sich nur noch um die Berechnung der Geschwindigkeit. Ist $a - b$ unendlich klein, so ist w, welches immer zwischen $-a^2$ und $-b^2$ liegt, unendlich wenig von $-a^2$ verschieden; das Quadrat der Geschwindigkeit ist daher

$$\frac{4}{(a^2+u)(a^2+v)}.$$

Unter derselben Voraussetzung ergiebt die Addition der beiden ersten der Gleichungen 12) aber

$$x^2 + y^2 = \frac{(a^2+u)(a^2+v)}{a^2-c^2};$$

daraus folgt die Geschwindigkeit

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-c^2}\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Achtzehnte Vorlesung.

(Potential eines homogenen Ellipsoids. Potential eines homogenen elliptischen Cylinders von unendlich grosser Länge. Ruhendes Ellipsoid in einem Flüssigkeitsstrome. Stromlinien in dem Falle, dass das Ellipsoid ein Rotationsellipsoid oder eine Kugel ist. Ein fester Körper bewegt sich in der Flüssigkeit auf gegebene Weise; es wird die Bewegung der Flüssigkeit gesucht. Fall, dass der Körper ein Ellipsoid oder eine Kugel ist. Bewegung zweier Körper in der Flüssigkeit. Nähere Erörterung des Falles, dass diese zwei unendlich kleine Kugeln sind.)

§ 1.

Bei gewissen Flüssigkeitsbewegungen, die wir jetzt betrachten wollen, ist die Kenntniss des Potentials eines mit Masse von constanter Dichtigkeit erfüllten Ellipsoids nützlich. Den Ausdruck für dieses Potential wollen wir nicht ableiten, aber aufstellen und seine Richtigkeit auf einem durch seine Einfachheit ausgezeichneten, von Dirichlet*) angegebenen Wege beweisen. Die Gleichung der Oberfläche des Ellipsoids sei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,, \tag{1}$$

seine Dichtigkeit $= 1$ und sein Potential für einen Punkt, dessen Coordinaten x, y, z sind, $= \Omega$. Wir stellen einige Eigenschaften zusammen, die Ω dann haben muss. Der Gleichung 11) der sechszehnten Vorlesung zufolge, ist, wenn der Punkt (x, y, z) innerhalb des Ellipsoids liegt

$$\Delta\Omega = -4\pi\,;$$

liegt er ausserhalb, so ist

$$\Delta\Omega = 0\,;$$

ferner sind Ω, $\frac{\partial\Omega}{\partial x}$, $\frac{\partial\Omega}{\partial y}$, $\frac{\partial\Omega}{\partial z}$ im ganzen Raume einwerthig und stetig; im Unendlichen verschwindet Ω.

Diese Eigenschaften bestimmen Ω eindeutig, wie die folgende Betrachtung zeigt. Gesetzt, es gäbe zwei Functionen von x, y, z, die sie besitzen; U sei ihre Differenz. Dann hat U *diese* Eigenschaften: im ganzen Raume ist $\Delta U = 0$; U, $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ sind überall

*) Crelle's Journal, Bd. 32, p. 80.

einwerthig und stetig; in der Unendlichkeit ist $U = 0$. Nach den in § 7 der sechszehnten Vorlesung gemachten Auseinandersetzungen ist daher überall $U = 0$.

Wie in der vorigen Vorlesung bedeute u die grösseste Wurzel der cubischen Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1; \tag{2}$$

ist der Punkt (x, y, z) ein äusserer, so ist u positiv und die einzige positive Wurzel dieser Gleichung; in der Oberfläche des Ellipsoids, für welche die Gleichung 1) erfüllt ist, ist $u = 0$. Es ist dann für einen äusseren Punkt

$$\Omega = \pi abc \int_u^\infty d\lambda \frac{1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}, \tag{3}$$

für einen inneren

$$\Omega = \pi abc \int_0^\infty d\lambda \frac{1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}. \tag{4}$$

Um die Richtigkeit dieser Behauptung zu beweisen, brauchen wir nur zu zeigen, dass die durch die Gleichungen 3) und 4) definirte Function die Eigenschaften besitzt, welche für Ω angegeben sind. Zu diesem Zwecke differentiiren wir zunächst die Gleichungen 3) und 4) nach x; wir erhalten dadurch für einen äusseren Punkt

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = -2\pi\, abcx \int_u^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}, \tag{5}$$

da der von der Veränderlichkeit der unteren Grenze u des Integrals herrührende Term in Folge der Gleichung 2) verschwindet; und für einen inneren

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = -2\pi\, abcx \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}. \tag{6}$$

Wir denken uns die entsprechenden Gleichungen für $\frac{\partial \Omega}{\partial y}$ und $\frac{\partial \Omega}{\partial z}$ gebildet. Wir sehen dabei ein, dass Ω, $\frac{\partial \Omega}{\partial x}$, $\frac{\partial \Omega}{\partial y}$, $\frac{\partial \Omega}{\partial z}$ an der Oberfläche des Ellipsoids, wo $u = 0$ ist, keine Sprünge erleiden und daher überall einwerthig und stetig sind.

Differentiirt man die Gleichungen 5) und 6) noch einmal nach x, so erhält man für einen äusseren Punkt

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} = 2\pi abc \left\{ \frac{\frac{x}{a^2+u}\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}} - \int_u^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} \right\}$$

und für einen inneren

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} = -2\pi abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

Addirt man zu diesen Gleichungen die entsprechenden für $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}$ und benutzt, dass

$$\int \left(\frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda} + \frac{1}{c^2+\lambda} \right) \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} = -\frac{2}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}$$

ist, so erhält man für einen inneren Punkt

$$\Delta \Omega = -4\pi,$$

und für einen äusseren, wenn man noch hinzunimmt, dass nach der Gleichung 17) der vorigen Vorlesung

$$\frac{x}{a^2+u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{y}{b^2+u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{c^2+u}\frac{\partial u}{\partial z} = 2$$

ist,

$$\Delta \Omega = 0.$$

Um endlich einzusehen, dass das durch 3) definirte Ω in der Unendlichkeit verschwindet, hat man nur zu beachten, dass der Gleichung 2) zufolge in der Unendlichkeit u unendlich gross ist.

Wir knüpfen hieran die Angabe des Potentials eines Cylinders, der mit Masse von der Dichtigkeit 1 erfüllt ist, dessen Mantelfläche die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

hat, und dessen Grundflächen die Gleichungen

$$z = -\gamma \quad \text{und} \quad z = +\gamma$$

haben, wo γ unendlich gross gegen a, b und die Coordinaten des Punktes sein soll, auf welche das Potential bezogen wird. Nennen wir dasselbe Ω, so haben wir nach der Gleichung 30) der sechszehnten Vorlesung

$$\Omega = 2\pi ab \lg 2\gamma + U, \quad U = -2\int df \lg \varrho, \tag{7}$$

wo df ein Element der durch die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$ begrenzten Fläche, ϱ den Abstand dieses Elements von dem Punkte $(x, y, 0)$ bedeutet, wenn (x, y, z) der Punkt ist, auf den U und Ω sich beziehen. Nach den an dem eben genannten Orte durchgeführten Betrachtungen ist U bis auf eine additive Constante bestimmt durch die Bedingungen, dass es mit seinen ersten Differentialquotienten in der ganzen xy-Ebene einwerthig und stetig ist, dass es den Gleichungen

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -4\pi \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

genügt, je nachdem der Punkt (x, y) innerhalb oder ausserhalb der genannten Ellipse liegt, und dass in der Unendlichkeit $\frac{\partial U}{\partial x}$ und $\frac{\partial U}{\partial y}$ verschwinden. Diese Eigenschaften besitzt U, wenn man für einen inneren Punkt

$$U = \pi ab \left(\int_0^{u'} \frac{1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda}}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}} d\lambda + 1 - \lg u' \right), \qquad 8)$$

für einen äusseren

$$U = \pi ab \left(\int_u^{u'} \frac{1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda}}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}} d\lambda + 1 - \lg u' \right) \qquad 9)$$

setzt und unter u' eine unendlich grosse Constante, unter u die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} = 1$$

versteht. Es geht das aus Ueberlegungen hervor, die den im ersten Theile dieses § angestellten ganz ähnlich sind.

Um zu beweisen, dass diesen Ausdrücken von U nicht noch eine additive Constante hinzuzufügen ist, um das durch 7) definirte U zu erhalten, ist nur noch zu zeigen, dass, wenn $x^2 + y^2 = \varrho^2$ gesetzt und ϱ^2 unendlich gross, aber unendlich klein gegen u' angenommen wird, aus 9) sich ergiebt

$$U = -2\pi ab \lg \varrho.$$

Dass dieses der Fall ist, folgt daraus, dass unter der genannten Annahme

$$u = \varrho^2$$

und

$$\int_{\varrho^2}^{u'} \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{\varrho^2}{\lambda}\right) d\lambda = \lg u' - 2 \lg \varrho - 1$$

wird.

Es hat keine Schwierigkeit die in 8) und 9) angezeigten Integrationen auszuführen. Für einen inneren Punkt findet man dadurch

$$U = \pi ab \left(2 \lg \frac{2}{a+b} + 1\right) - 2\pi \frac{bx^2 + ay^2}{a+b}. \qquad 10)$$

Verwandelt sich die Ellipse in einen Kreis von dem Radius a, so giebt diese Gleichung

$$U = \pi a^2(1 - 2 \lg a) - \pi \varrho^2, \quad \text{wo wieder} \quad x^2 + y^2 = \varrho^2;$$

für einen äusseren Punkt wird dabei

$$U = -2\pi a^2 \lg \varrho.$$

§ 2.

Setzt man

$$\varphi = M \frac{\partial \Omega}{\partial z} - z, \tag{11}$$

wo M eine Constante bedeutet und Ω den in der Gleichung 3) angegebenen Werth hat, so genügt φ in dem Raume ausserhalb des Ellipsoids 1) der Gleichung $\Delta\varphi = 0$; die Gleichung 11) stellt daher eine mögliche Flüssigkeitsbewegung in diesem Raume dar. In der Unendlichkeit ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -1;$$

in der Unendlichkeit strömt die Flüssigkeit daher mit der Geschwindigkeit 1 in der der z-Achse entgegengesetzten Richtung. Wir wollen zeigen, dass die Constante M sich so bestimmen lässt, dass für die Oberfläche des Ellipsoids 1)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

ist; ist sie so bestimmt, so gilt die Gleichung 11) für den Fall, dass die Flüssigkeit in der Unendlichkeit in der angegebenen Weise sich bewegt und das feste Ellipsoid 1) in ihr ruht.

Die nach dem Innern der Flüssigkeit gerichtete Normale eines Elements der Oberfläche des Ellipsoids wollen wir durch n_a, die nach dem Innern des Ellipsoids gekehrte durch n_i bezeichnen; die Bedingung, welche durch passende Wahl von M soll erfüllt werden können, ist dann

$$M \frac{\partial^2 \Omega}{\partial n_a \partial z} = \cos(n_a z),$$

oder, da nach der Gleichung 10) der sechszehnten Vorlesung

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial n_i \partial z} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial n_a \partial z} = 4\pi \cos(n_a z)$$

ist,

$$M \frac{\partial^2 \Omega}{\partial n_i \partial z} = (4\pi M - 1)\cos(n_a z). \tag{12}$$

Statt des Differentialquotienten nach n_a ist der nach n_i genommene eingeführt, weil der durch die Gleichung 4) für einen inneren Punkt bestimmte Werth von Ω einfacher ist, als der für einen äusseren Punkt geltende, durch die Gleichung 3) bestimmte. In der That

ist nach der Gleichung 4) für einen inneren Punkt, wie schon in der zwölften Vorlesung benutzt ist,

$$\Omega = \text{Const.} - \pi(Ax^2 + By^2 + Cz^2),$$

wo A, B, C Constanten sind, die die durch die Gleichungen 4) jener Vorlesung angegebenen Werthe haben. Es folgt hieraus

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial n_i \partial z} = -2\pi C \frac{\partial z}{\partial n_i} = 2\pi C \cos(n_a z).$$

Die Gleichung 12) ist daher erfüllt, wenn

$$M = \frac{1}{2\pi(2-C)} \tag{13}$$

gemacht wird.

Wenn für eine stationäre Flüssigkeitsbewegung, für welche ein Geschwindigkeitspotential gilt, dieses Geschwindigkeitspotential, φ, bekannt ist, so erfordert die Bestimmung der Stromlinien noch die Integration der Differentialgleichungen

$$dx : dy : dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \tag{14}$$

die Integrale dieser, die 2 willkürliche Constanten enthalten, sind die Gleichungen der Stromlinien.

Ist φ eine Function der beiden Argumente z und $\sqrt{x^2+y^2}$, — eine Bedingung, die in dem hier betrachteten Falle erfüllt ist, wenn das Ellipsoid 1) ein Rotationsellipsoid und $a = b$ ist —, so kommt die Integration der Gleichungen 14) auf die Ausführung von Quadraturen zurück. Setzt man nämlich

$$\sqrt{x^2+y^2} = \varrho$$

und nimmt φ als eine Function von z und ϱ an, so hat man

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\frac{x}{\varrho}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\frac{y}{\varrho};$$

eine der Gleichungen 14) ist daher

$$x\,dy - y\,dx = 0; \tag{15}$$

daraus folgt

$$\frac{x}{y} = \text{const.}$$

d. h. eine jede Stromlinie liegt in einer durch die z-Achse gehenden Ebene. Aus 15) in Verbindung mit der Gleichung

$$x\,dx + y\,dy = \varrho\,d\varrho$$

ergiebt sich weiter

$$dx = \frac{x\,d\varrho}{\varrho},$$

wodurch die zweite der Gleichungen 14)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}\, d\varrho - \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\, dz = 0$$

wird. Aus der Gleichung $\varDelta \varphi = 0$ lässt sich aber nachweisen, dass der integrirende Factor dieser Gleichung ϱ ist, d. h. dass die linke Seite der Gleichung

$$\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, d\varrho - \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\, dz = 0 \qquad 16)$$

ein vollständiges Differential ist. In der That hat man

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho^2} \frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \frac{y^2}{\varrho^3}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho^2} \frac{y^2}{\varrho^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \frac{x^2}{\varrho^3},$$

woraus folgt

$$\varDelta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = 0,$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = -\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\right),$$

wodurch die ausgesprochene Behauptung bewiesen ist. Es giebt hiernach eine Function U von z und ϱ, die die Eigenschaft hat, dass

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}, \quad \frac{\partial U}{\partial \varrho} = -\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial z} \qquad 17)$$

ist; ist sie gefunden, so hat man in

$$U = \text{const.}$$

das Integral der Gleichung 16) und die Gleichung der Stromlinien.

Kennt man eine Function V von z und ϱ, für welche

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \varphi \quad \text{und} \quad \varDelta V = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial V}{\partial \varrho} = 0 \qquad 18)$$

ist, so kann man

$$U = \varrho \frac{\partial V}{\partial \varrho}$$

setzen, da hierdurch den beiden Gleichungen 17) genügt wird; die Gleichung der Stromlinien wird hierdurch

$$\varrho \frac{\partial V}{\partial \varrho} = \text{const.}$$

Bei der durch die Gleichung 11) unter der Voraussetzung, dass $a = b$ ist, dargestellten Flüssigkeitsbewegung genügt man den Bedingungen 18) durch

$$V = M\Omega - \frac{z^2}{2} + \frac{\varrho^2}{4};$$

die Gleichung der Stromlinien ist daher

$$\varrho\left(M\frac{\partial\Omega}{\partial\varrho}+\frac{\varrho}{2}\right)=\text{const.} \tag{19}$$

Verwandelt sich das Rotationsellipsoid in eine Kugel von dem Radius R, und setzt man $r=\sqrt{z^2+\varrho^2}$, so ist für einen äusseren Punkt

$$\Omega=\frac{4\pi}{3}R^3\frac{1}{r}\,.$$

Hieraus kann man bei Benutzung des Satzes, dass $\frac{\partial\Omega}{\partial z}$ an der Oberfläche der Kugel keinen Sprung erleidet, ableiten, dass

$$C=\tfrac{2}{3}\text{, also nach 13) } M=\frac{3}{8\pi}$$

ist; daraus folgt, dass

$$\varphi=\frac{R^3}{2}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}-z$$

und die Gleichung der Stromlinien

$$\varrho^2\left(1-\frac{R^3}{r^3}\right)=\text{const.}$$

ist.

Setzen wir die in dieser Gleichung mit const. bezeichnete Grösse $=0$, so wird dieselbe erfüllt durch $\varrho=0$ und durch $r=R$; eine Stromlinie setzt sich hiernach zusammen aus den Stücken der z-Achse, die ausserhalb der Kugel liegen und dem Halbkreise, in dem die Oberfläche der Kugel durch die Ebene geschnitten wird, die durch die z-Achse begrenzt ist und durch die ϱ-Achse geht. In den Punkten, in denen jene Stücke der z-Achse mit diesem Halbkreise zusammenstossen, d. h. in den Punkten $\varrho=0$, $z=\pm R$, ist die Geschwindigkeit $=0$, wie aus den Gleichungen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{R^3}{2}\left(\frac{3z^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}\right)-1$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}=\frac{R^3}{2}\frac{3z\varrho}{r^5}$$

hervorgeht, die allgemein die Componenten der Geschwindigkeit nach den Achsen der z und ϱ angeben. Diese Punkte haben dabei die Eigenschaft, dass sie von keinem der Flüssigkeitstheilchen, die in einem Augenblicke in endlicher Entfernung von ihnen liegen, jemals erreicht werden; die Rechnung ergiebt nämlich die Zeit, die hierzu erforderlich sein würde, als unendlich. Wir wollen das zeigen für die Theilchen, die auf dem genannten Halbkreise liegen; für ein solches Theilchen ist $r=R$, also

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \tfrac{3}{2}\left(\frac{z^2}{R^2} - 1\right), \quad \text{und daher} \quad \frac{dz}{dt} = \tfrac{3}{2}\left(\frac{z^2}{R^2} - 1\right);$$

bezeichnet man den Werth von t, für welchen $z = 0$ ist, durch t_0, so erhält man hieraus durch Integration

$$\tfrac{3}{4}(t - t_0) = \lg \frac{R - z}{R + z},$$

woraus in der That $t = \infty$ für $z = -R$ sich ergiebt.

§ 3.

Wir können den abgeleiteten Gleichungen noch eine andere Bedeutung beilegen, als wir es gethan haben. Nach den im § 4 der vierten Vorlesung gemachten Auseinandersetzungen gelten für ein Coordinatensystem, dessen Achsen mit gleichbleibender Geschwindigkeit in einer Richtung fortschreiten, dieselben Differentialgleichungen der Bewegung, wie für ein ruhendes. Denken wir uns die Achsen der x, y, z mit dem Ellipsoid fest verbunden und mit diesem in einer Richtung mit gleichbleibender Geschwindigkeit bewegt; die im vorigen § entwickelten Formeln gelten dann für die *relative* Bewegung der Flüssigkeit gegen das Ellipsoid. Nehmen wir an, dass das letztere mit der Geschwindigkeit 1 in der Richtung der z-Achse fortgeht, so wird dabei die absolute Geschwindigkeit der Flüssigkeitstheile in der Unendlichkeit $= 0$.

Wir wollen jetzt einen Fall betrachten, der den eben bezeichneten als speciellen in sich schliesst. In einer Flüssigkeit, die in der Unendlichkeit überall ruht, bewege sich ein starrer Körper von irgend einer Gestalt in gegebener Weise; es soll die Bewegung der Flüssigkeit gefunden werden. Wir wollen dabei aber voraussetzen, dass das Geschwindigkeitspotential φ, welches existiren soll, *einwerthig* ist; dadurch beschränken wir das Problem in dem Falle, dass der Körper einen mehrfach zusammenhängenden Raum erfüllt und in Folge hiervon auch die Flüssigkeit einen mehrfach zusammenhängenden Raum einnimmt.

Wir benutzen die in der fünften Vorlesung gebrauchten Bezeichnungen, führen also zwei rechtwinklige Coordinatensysteme ein, von denen das eine, das der ξ, η, ζ, im Raume fest, das andere, das der x, y, z, in dem Körper fest ist, und schreiben die Gleichungen zwischen den Coordinaten desselben Punktes in den beiden Systemen

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \\ \eta &= \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z \\ \zeta &= \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z; \end{aligned} \tag{20}$$

wir nennen ferner u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit

des Anfangspunktes der x, y, z nach den Achsen der x, y, z, und p, q, r die Componenten der Drehungsgeschwindigkeit des Körpers in Bezug auf dieselben Achsen. Die Ausdrücke 1) der sechsten Vorlesung, nämlich die Ausdrücke

$$\begin{aligned} & u + zq - yr \\ & v + xr - zp \\ & w + yp - xq, \end{aligned} \tag{21}$$

sind dann die Componenten der Geschwindigkeit des Punktes (x, y, z) des Körpers nach den Achsen der x, y, z; sie sind auch die Componenten der Geschwindigkeit nach denselben Achsen eines Flüssigkeitstheilchens, wenn dieses in relativer Ruhe gegen den Körper sich befindet.

Aus dem letzten Umstande ist zu schliessen, dass, wenn wir x, y, z auf dasselbe Flüssigkeitstheilchen beziehen,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} - u - zq + yr \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} - v - xr + zp \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} - w - yp + xq \end{aligned}$$

ist. Die Integration dieser Differentialgleichungen giebt die relative Bewegung aller Flüssigkeitstheile gegen den Körper, wenn u, v, w, p, q, r bekannte Functionen von t sind und φ ermittelt ist; will man die absolute Bewegung derselben finden, so muss man ξ, η, ζ durch die Gleichungen 20) aus den bekannt gewordenen Werthen von x, y, z berechnen.

Sehen wir nun zu, wie φ zu bestimmen ist. Bezeichnet man durch n die nach dem Innern der Flüssigkeit gerichtete Normale eines Elementes der Oberfläche des Körpers, so geben die Ausdrücke 21), wenn sie mit $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$ multiplicirt und addirt werden, die Componente der Geschwindigkeit des betrachteten Elementes nach der Richtung von n; diese Componente muss aber $= \frac{\partial \varphi}{\partial n}$, d. h. es muss

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = (u + zq - yr)\cos(nx) + (v + xr - zp)\cos(ny) + (w + yp - xq)\cos(nz)$$

sein. Hierzu kommen die folgenden Bedingungen: In der Unendlichkeit verschwinden $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$; in dem von der Flüssigkeit erfüllten Raume ist $\Delta \varphi = 0$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ sind einwerthig und stetig; dass φ einwerthig ist, haben wir bereits angenommen; ohne die Allgemeinheit weiter zu beschränken, können wir voraussetzen,

dass φ auch stetig ist, da es bisher nur durch seine Differentialquotienten definirt ist. Nach den im § 7 der sechszehnten Vorlesung gemachten Auseinandersetzungen ist hiernach φ bis auf eine additive Constante bestimmt; es ist völlig bestimmt, wenn wir noch festsetzen, was erlaubt ist, dass es in der Unendlichkeit verschwindet. Allen diesen Forderungen genügen wir, wenn wir

$$\varphi = u\varphi_1 + v\varphi_2 + w\varphi_3 + p\varphi_4 + q\varphi_5 + r\varphi_6 \tag{22}$$

setzen und die 6 Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ so bestimmen, dass jede von ihnen der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ und den für φ angegebenen Stetigkeitsbedingungen genügt, in der Unendlichkeit verschwindet, und dass an der Oberfläche des bewegten Körpers

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= \cos(nx), & \frac{\partial \varphi_4}{\partial n} &= y\cos(nz) - z\cos(ny) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} &= \cos(ny), & \frac{\partial \varphi_5}{\partial n} &= z\cos(nx) - x\cos(nz) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} &= \cos(nz), & \frac{\partial \varphi_6}{\partial n} &= x\cos(ny) - y\cos(nx) \end{aligned} \tag{23}$$

ist; durch diese Bedingungen sind die Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ vollständig bestimmt; sie hängen nicht von der Bewegung des Körpers, sondern ausschliesslich von der Gestalt desselben ab.

Ist der Körper das Ellipsoid, dessen Oberfläche die Gleichung 1) hat, so können wir die Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ nach einer im § 2 ausgeführten Rechnung leicht angeben. Bei der dort benutzten Bezeichnung und der Richtung, die wir der Normale n hier beigelegt haben, ist nämlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial n\, \partial x} &= 2\pi(2 - A)\cos(nx) \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial n\, \partial y} &= 2\pi(2 - B)\cos(ny) \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial n\, \partial z} &= 2\pi(2 - C)\cos(nz). \end{aligned} \tag{24}$$

Daraus ergiebt sich zunächst

$$\varphi_1 = \frac{1}{2\pi(2-A)}\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{2\pi(2-B)}\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad \varphi_3 = \frac{1}{2\pi(2-C)}\frac{\partial \Omega}{\partial z}.$$

Weiter werden wir zeigen können, dass, wenn N eine passend zu bestimmende Constante bedeutet,

$$\varphi_6 = N\left(x\frac{\partial \Omega}{\partial y} - y\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right) \tag{25}$$

oder, was dasselbe ist,

$$\varphi_6 = N\frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta}$$

ist, wenn

$$x = \varrho\cos\vartheta, \quad y = \varrho\sin\vartheta$$

gesetzt wird. Allen für φ_6 aufgestellten Bedingungen mit Ausnahme der letzten der Gleichungen 23) genügt der angegebene Ausdruck bei jedem Werthe von N, und diese Gleichung wird bei einem gewissen Werthe von N erfüllt. Dieselbe ist nämlich in Folge der Gleichungen 24) und der Gleichungen

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = -2\pi A x, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} = -2\pi B y$$

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \cos(nx), \quad \frac{\partial y}{\partial n} = \cos(ny):$$

$$x\cos(ny) - y\cos(nx) = 2\pi N\Big(x\cos(ny)(2-B+A) - y\cos(nx)(2-A+B)\Big).$$

Sie ist in Bezug auf x und y linear und homogen; aus diesem Grunde, und da

$$\cos(nx) : \cos(ny) = \frac{x}{a^2} : \frac{y}{b^2}$$

ist, so darf man in ihr für x und y resp. $a^2\cos(nx)$ und $b^2\cos(ny)$ setzen; es tritt dann auf beiden Seiten der Factor $\cos(nx)\cos(ny)$ auf; bei Fortlassung desselben wird sie

$$N = \frac{a^2 - b^2}{2\pi\big(2(a^2-b^2) + (A-B)(a^2+b^2)\big)}.$$

Für φ_4 und φ_5 lassen sich ähnliche Ausdrücke aufstellen, wie der in 25) für φ_6 gegebene.

Wenn $a^2 - b^2$ verschwindet, wenn also das Ellipsoid in ein Rotationsellipsoid übergeht, dessen Achse die z-Achse ist, so erhält das Verhältniss $A - B : a^2 - b^2$, also auch N einen leicht angebbaren, endlichen Werth; der Factor von N in der Gleichung 25) wird aber Null, es verschwindet also φ_6.

Verwandelt sich das Ellipsoid in eine Kugel vom Radius R, so ist hiernach

$$\varphi_4 = 0, \quad \varphi_5 = 0, \quad \varphi_6 = 0;$$

eine Drehung der Kugel um ihren Mittelpunkt ist von keinem Einfluss auf die Bewegung der Flüssigkeit. Nach den in § 2 gemachten Angaben ist ferner

$$\varphi_1 = \frac{R^3}{2}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \quad \varphi_2 = \frac{R^3}{2}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}, \quad \varphi_3 = \frac{R^3}{2}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}, \tag{26}$$

wo

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Man hat daher für die Kugel

$$\varphi = \frac{R^3}{2}\left(u\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + v\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + w\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right). \tag{27}$$

Dieses φ genügt der Bedingung, dass an der Oberfläche der Kugel

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = u \cos(nx) + v \cos(ny) + w \cos(nz)$$

ist. Es möge angeführt werden, dass der für φ angegebene Ausdruck übereinstimmt mit dem Potential eines magnetischen Moleküls, welches sich im Mittelpunkte der Kugel befindet, dessen magnetische Achse die Richtung der Bewegung hat, und dessen magnetisches Moment gleich der Geschwindigkeit des Mittelpunktes, multiplicirt mit $\frac{R^3}{2}$ ist, in Bezug auf einen Magnetpol, der im Punkte (x, y, z) liegt und die Einheit magnetischer Flüssigkeitsmenge enthält. Es folgt daraus, dass die Geschwindigkeit im Punkte (x, y, z) der Grösse und Richtung nach der Kraft gleich ist, welche das bezeichnete magnetische Molekül auf diesen Pol ausübt.

Die Bewegung einer Kugel in einer Flüssigkeit ist zuerst von Dirichlet*), die eines Ellipsoids von Clebsch**) behandelt worden.

§ 4.

Wir haben in dem vorigen Paragraphen angenommen, dass die Flüssigkeit im Endlichen allein begrenzt ist durch die Oberfläche eines bewegten, festen Körpers; in diesem Falle empfiehlt es sich, das Geschwindigkeitspotential φ auf ein in dem Körper festes Coordinatensystem zu beziehen, weil dasselbe dann ausschliesslich durch die Gestalt des Körpers und seine Bewegung in dem betrachteten Augenblicke bedingt wird. Sind aber ausser dem gedachten Körper im Endlichen noch andere feste Körper vorhanden, welche sich bewegen oder ruhen, so ist das Geschwindigkeitspotential immer auch von der relativen Lage aller Körper abhängig; es ist dann zweckmässig dasselbe von vorn herein auf ein im Raume festes Coordinatensystem zu beziehen. Wir wollen jetzt uns vorstellen, dass in der unendlichen Flüssigkeit *zwei* bewegte, feste Körper im Endlichen vorhanden sind, und dass das Achsen-System der x, y, z im Raume fest ist. Es seien u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit eines Punktes des ersten Körpers, u', v', w' die eines Punktes des zweiten; p, q, r die Componenten der Drehungsgeschwindigkeit nach Achsen, die den Coordinatenachsen parallel sind, für den ersten Körper, p', q', r' die entsprechenden Grössen für den zweiten. Der Gleichung 22) entsprechend kann man dann setzen

$$\begin{aligned}\varphi = & u\varphi_1 + v\varphi_2 + w\varphi_3 + p\varphi_4 + q\varphi_5 + r\varphi_6 \\ & + u'\varphi_1' + v'\varphi_2' + w'\varphi_3' + p'\varphi_4' + q'\varphi_5' + r'\varphi_6',\end{aligned}$$

wo $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_1', \varphi_2', \ldots$ Functionen von x, y, z sind, die nicht von

*) Monatsberichte der Berl. Akad. 1852, p. 12.

**) Crelle's Journal Bd. 52. p. 103 und Bd. 53. p. 287.

der Bewegung der beiden Körper, aber von ihrer augenblicklichen Lage abhängen. Eine jede von ihnen muss in dem von der Flüssigkeit erfüllten Raume der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ genügen, mit ihren ersten Differentialquotienten einwerthig und stetig sein, in der Unendlichkeit verschwinden und an den Oberflächen der beiden Körper zwei gewisse Gleichungen erfüllen. Sind a, b, c und a', b', c' die Coordinaten der beiden Punkte, deren Geschwindigkeitscomponenten mit u, v, w und u', v', w' bezeichnet sind, so muss nämlich an der Oberfläche des ersten Körpers

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \cos(nx) \qquad \frac{\partial\varphi_1'}{\partial n} = 0$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \cos(ny) \qquad \frac{\partial\varphi_2'}{\partial n} = 0$$

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial n} = \cos(nz) \qquad \frac{\partial\varphi_3'}{\partial n} = 0$$

$$\frac{\partial\varphi_4}{\partial n} = (y-b)\cos(nz) - (z-c)\cos(ny) \qquad \frac{\partial\varphi_4'}{\partial n} = 0$$

$$\frac{\partial\varphi_5}{\partial n} = (z-c)\cos(nx) - (x-a)\cos(nz) \qquad \frac{\partial\varphi_5'}{\partial n} = 0$$

$$\frac{\partial\varphi_6}{\partial n} = (x-a)\cos(ny) - (y-b)\cos(nx) \qquad \frac{\partial\varphi_6'}{\partial n} = 0$$

und an der Oberfläche des zweiten

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = 0 \qquad \frac{\partial\varphi_1'}{\partial n} = \cos(nx)$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = 0 \qquad \frac{\partial\varphi_2'}{\partial n} = \cos(ny)$$

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial n} = 0 \qquad \frac{\partial\varphi_3'}{\partial n} = \cos(nz)$$

$$\frac{\partial\varphi_4}{\partial n} = 0 \qquad \frac{\partial\varphi_4'}{\partial n} = (y-b')\cos(nz) - (z-c')\cos(ny)$$

$$\frac{\partial\varphi_5}{\partial n} = 0 \qquad \frac{\partial\varphi_5'}{\partial n} = (z-c')\cos(nx) - (x-a')\cos(nz)$$

$$\frac{\partial\varphi_6}{\partial n} = 0 \qquad \frac{\partial\varphi_6'}{\partial n} = (x-a')\cos(ny) - (y-b')\cos(nx)$$

sein. Diese Gleichungen, welche den Gleichungen 23) entsprechen, sind auf demselben Wege, wie diese, abzuleiten. Die angegebenen Bedingungen bestimmen die 12 Functionen φ_1, φ_2, . . vollständig.

Der einfachste hierher gehörige Fall ist der, dass die beiden Körper Kugeln und die Punkte (a, b, c), (a', b', c') ihre Mittelpunkte sind; dann ergeben die für φ_4, φ_5, φ_6, φ_4', φ_5', φ_6' aufgestellten Bedingungen, dass diese 6 Functionen gleich Null sind, und es wird also

$$\varphi = u\varphi_1 + v\varphi_2 + w\varphi_3 + u'\varphi_1' + v'\varphi_2' + w'\varphi_3'.$$

Es lässt sich in diesem Falle φ mit Hülfe der sogenannten *Kugelfunctionen* als eine unendliche Reihe finden, die immer convergirt, und um so schneller convergirt, je grösser der Abstand der Kugeln im Verhältniss zu ihren Radien ist. Wir wollen auf die Theorie der Kugelfunctionen hier nicht eingehen und daher nur im Allgemeinen den Weg bezeichnen, auf dem die genannte Aufgabe gelöst werden kann, und das Resultat in so weit angeben, als es für spätere Betrachtungen nöthig ist.

Was die Kugelfunctionen unmittelbar leisten, ist dieses. Sie erlauben eine Function U zu finden, welche ausserhalb *einer* Kugel der Differentialgleichung $\Delta U = 0$ genügt, mit ihren Differentialquotienten einwerthig und stetig ist, in der Unendlichkeit verschwindet, und an der Oberfläche der Kugel der Bedingung genügt, dass $\frac{\partial U}{\partial n}$ beliebig gegebene, stetig sich ändernde Werthe erhält. Aus einer unendlichen Zahl solcher Functionen U lässt sich eine convergirende Reihe bilden für das Geschwindigkeitspotential φ für eine Flüssigkeit, in der *zwei* Kugeln in gegebener Weise sich bewegen. Um das zu zeigen, nennen wir die Kugel, deren Mittelpunkt (a, b, c) ist, die erste, die andere die zweite. Man bilde die Function U_1, für welche an der Oberfläche der ersten Kugel

$$\frac{\partial U_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \text{ d. h.} = u \cos(nx) + v \cos(ny) + w \cos(nz),$$

und die Function U_1', für welche an der Oberfläche der zweiten

$$\frac{\partial U_1'}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \text{ d. h.} = u' \cos(nx) + v' \cos(ny) + w' \cos(nz)$$

ist, und setze

$$U_1 + U_1' = V_1.$$

Dieses V_1 ist dann das erste Glied der für φ aufzustellenden Reihe. Die Function $\varphi - V_1$ soll an den beiden Kugelflächen den Bedingungen genügen, dass an der ersten

$$\frac{\partial(\varphi - V_1)}{\partial n} = -\frac{\partial U_1'}{\partial n},$$

an der zweiten

$$\frac{\partial(\varphi - V_1)}{\partial n} = -\frac{\partial U_1}{\partial n}$$

ist; man bilde die Functionen U_2 und U_2', für welche an der ersten Kugelfläche

$$\frac{\partial U_2}{\partial n} = -\frac{\partial U_1'}{\partial n}$$

und an der zweiten

$$\frac{\partial U_2'}{\partial n} = -\frac{\partial U_1}{\partial n}$$

ist, und setze

$$U_2 + U_2' = V_2;$$

es ist dann V_2 das zweite Glied der Reihe für φ. Für die erste Kugelfläche soll nun

$$\frac{\partial(\varphi - V_1 - V_2)}{\partial n} = -\frac{\partial U_2'}{\partial n},$$

für die zweite

$$\frac{\partial(\varphi - V_1 - V_2)}{\partial n} = -\frac{\partial U_2'}{\partial n}$$

sein. Man setze

$$U_3 + U_3' = V_3,$$

nachdem U_3 und U_3' so bestimmt sind, dass an der ersten Kugelfläche

$$\frac{\partial U_3}{\partial n} = -\frac{\partial U_2'}{\partial n}$$

und an der zweiten

$$\frac{\partial U_3'}{\partial n} = -\frac{\partial U_2}{\partial n}$$

ist. In dieser Weise fahre man fort; dann hat man

$$\varphi = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots$$

Diese Reihe convergirt, wie hier aber nicht bewiesen werden soll, immer; nimmt man die Radien der beiden Kugeln als unendlich klein gegen ihren Abstand an, so ist dabei jedes folgende Glied unendlich klein gegen das vorgehende. Jede der Grössen $V_2, V_3, \ldots$ erhält man in Kugelfunctionen selbst durch eine unendliche Reihe ausgedrückt, die auch die Eigenschaft hat, dass jedes folgende Glied unendlich klein gegen das vorangehende ist, wenn die Radien der Kugeln unendlich klein gegen ihren Abstand sind. Will man unter dieser Voraussetzung φ nur bis auf Grössen einer gewissen Ordnung finden, so hat man nur eine beschränkte Zahl der Grössen V, und in jeder von diesen eine beschränkte Zahl von Gliedern zu berücksichtigen.

Die Grössen U_1 und U_1', also auch die Grösse V_1, findet man unmittelbar aus der Gleichung 27). Bezeichnet man die Abstände des Punktes (x, y, z) von den Mittelpunkten der beiden Kugeln durch r und r', ihre Radien durch R und R', und benutzt, dass r eine Function von $x - a$, $y - b$, $z - c$, r' eine Function von $x - a'$, $y - b'$, $z - c'$ ist, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} U_1 &= -\frac{R^3}{2}\left(u\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} + v\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} + w\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c}\right) \\ U_1' &= -\frac{R'^3}{2}\left(u'\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial a'} + v'\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial b'} + w'\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial c'}\right). \end{aligned} \qquad 28)$$

Die Summe dieser beiden Ausdrücke, also V_1, giebt den Werth von φ in erster Näherung an. Bezeichnet man R und R' als unendlich kleine Grössen erster Ordnung und den Abstand der Kugeln als endlich, so müssen, damit das Geschwindigkeitspotential und die Geschwindigkeiten im Allgemeinen endlich seien, u, v, w, u', v', w' unendlich gross von der dritten Ordnung sein; an den Kugelflächen werden dann φ und seine Differentialquotienten unendlich gross. In endlicher Entfernung von den Kugelflächen giebt die Gleichung $\varphi = V_1$ die Geschwindigkeiten bis auf unendlich kleine Grössen an, nicht aber an diesen Flächen. Um hier dasselbe zu erreichen, muss man U_2 bilden, wobei es aber ausreicht, die Glieder höchster Ordnung zu berücksichtigen. Dieser Umstand bewirkt, dass wiederum die Gleichung 27) U_2 und U_2' zu berechnen erlaubt. Um U_2 zu finden, ist für die erste Kugelfläche $\frac{\partial U_1'}{\partial n}$ zu bilden; es ist aber

$$\frac{\partial U_1'}{\partial n} = \frac{\partial U_1'}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial U_1'}{\partial y}\cos(ny) + \frac{\partial U_1'}{\partial z}\cos(nz);$$

setzt man hier für U_1' seinen Werth aus 28), führt statt der Differentialquotienten nach x, y, z die negativen nach a', b', c' genommenen ein, schreibt, was bei der beanspruchten Genauigkeit erlaubt ist, r_0 für r', wo r_0 den Abstand der Mittelpunkte der Kugeln bezeichnet, also

$$r_0 = \sqrt{(a-a')^2 + (b-b')^2 + (c-c')^2}$$

sein soll, und ersetzt die Differentialquotienten nach a', b', c' durch die nach a, b, c genommenen, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_2}{\partial n} = -\frac{\partial U_1'}{\partial n} = &-\frac{R'^3}{2}\left(u'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial a^2} + v'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial a\,\partial b} + w'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial a\,\partial c}\right)\cos(nx)\\ &-\frac{R'^3}{2}\left(u'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial b\,\partial a} + v'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial b^2} + w'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial b\,\partial c}\right)\cos(ny)\\ &-\frac{R'^3}{2}\left(u'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial c\,\partial a} + v'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial c\,\partial b} + w'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial c^2}\right)\cos(nz),\end{aligned}$$

mithin nach 27)

$$\begin{aligned}U_2 = &\frac{R^3R'^3}{4}\left(u'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial a^2} + v'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial a\,\partial b} + w'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial a\,\partial c}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a}\\ &+\frac{R^3R'^3}{4}\left(u'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial b\,\partial a} + v'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial b^2} + w'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial b\,\partial c}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b} \qquad 29)\\ &+\frac{R^3R'^3}{4}\left(u'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial c\,\partial a} + v'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial c\,\partial b} + w'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial c^2}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c}.\end{aligned}$$

Entsprechend ist

$$U_2' = \frac{R^3 R'^3}{4}\left(u\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a^2} + v\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a \partial b} + w\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a \partial c}\right)\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial a'}$$

$$+ \frac{R^3 R'^3}{4}\left(u\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b \partial a} + v\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b^2} + w\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b \partial c}\right)\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial b'}$$

$$+ \frac{R^3 R'^3}{4}\left(u\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c \partial a} + v\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c \partial b} + w\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c^2}\right)\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial c'}.$$

Bildet man mit Hülfe dieser Werthe von U_2 und U_2' die Gleichung $\varphi = V_1 + V_2$, so giebt dieselbe auch an den Kugelflächen die Geschwindigkeiten bis auf unendlich kleine Grössen und den Werth von φ mit Einschluss unendlich kleiner Grössen erster Ordnung genau an. Wir werden eine Rechnung durchzuführen haben, bei der wir die Werthe von φ an jeder Kugelfläche mit dieser Genauigkeit kennen müssen. Um sie zu finden, kann man mit den in 28) angegebenen Werthen von U_1 und U_1' noch eine Umformung vornehmen. Es handle sich darum, für die erste Kugelfläche φ zu ermitteln. Die in dem Ausdrucke von U_1' vorkommende Grösse $\frac{1}{r'}$ kann man nach Potenzen von $x - a$, $y - b$, $z - c$, die unendlich klein von der ersten Ordnung sind, entwickeln und hat nur die ersten Potenzen zu berücksichtigen nöthig. Da

$$x - a = R\cos(nx),\quad y - b = R\cos(ny),\quad z - c = R\cos(nz)$$

ist, so hat man daher

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r_0} + R\left(\frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial a}\cos(nx) + \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial b}\cos(ny) + \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial c}\cos(nz)\right)$$

zu setzen; hieraus ergiebt sich

$$U_1' = \frac{R'^3}{2}\left(u'\frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial a} + v'\frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial b} + w'\frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial c}\right)$$

$$+ \frac{RR'^3}{2}\left(u'\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a^2} + v'\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a \partial b} + w'\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a \partial c}\right)\cos(nx)$$

$$+ \frac{RR'^3}{2}\left(u'\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b \partial a} + v'\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b^2} + w'\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b \partial c}\right)\cos(ny)$$

$$+ \frac{RR'^3}{2}\left(u'\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c \partial a} + v'\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c \partial b} + w'\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c^2}\right)\cos(nz).$$

Aus 28) folgt ferner

$$U_1 = -\frac{R}{2}\Big(u\cos(nx) + v\cos(ny) + w\cos(nz)\Big),$$

da

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a} = \frac{1}{R^2}\cos(nx),\quad \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b} = \frac{1}{R^2}\cos(ny),\quad \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c} = \frac{1}{R^2}\cos(nz)$$

ist. Benutzt man diese Relationen, um auch den in 29) für U_2 angegebenen Ausdruck umzugestalten, und erwägt, dass U_2' von höherer Ordnung, als der ersten, unendlich klein ist, so erhält man für die erste Kugelfläche mit der verlangten Genauigkeit

$$\begin{aligned}\varphi = &-\frac{R}{2}\Big(u\cos(nx) + v\cos(ny) + w\cos(nz)\Big)\\ &+\frac{R'^3}{2}\left(u'\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial a} + v'\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial b} + w'\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial c}\right)\\ &+\frac{3RR'^3}{4}\left(u'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial a^2} + v'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial a\partial b} + w'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial a\partial c}\right)\cos(nx)\\ &+\frac{3RR'^3}{4}\left(u'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial b\partial a} + v'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial b^2} + w'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial b\partial c}\right)\cos(ny)\\ &+\frac{3RR'^3}{4}\left(u'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial c\partial a} + v'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial c\partial b} + w'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial c^2}\right)\cos(nz).\end{aligned} \tag{30}$$

Den Werth von φ an der zweiten Kugelfläche findet man, indem man in diesem Ausdrucke die gestrichenen Buchstaben mit den ungestrichenen vertauscht.

Ein allgemeineres Problem, als das hier besprochene, ist von Bjerknes behandelt in seinem Mémoire sur le mouvement simultané de corps sphériques variables dans un fluide indéfini et incompressible, présenté à la société des sciences de Christiania le 15 sept. 1871.

Neunzehnte Vorlesung.

(Differentialgleichungen für die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit, auf den gegebene Kräfte wirken. Anwendung des Hamilton'schen Principes auf diesen Fall. Bewegung des Körpers, wenn keine Kräfte wirken. Vereinfachung der Aufgabe durch Voraussetzung gewisser Symmetrieen. Kugel. Rotationskörper. Bewegung zweier unendlich kleiner Kugeln in der Flüssigkeit. Kräfte, die diese auf einander ausüben.)

§ 1.

Bei den in der vorigen Vorlesung betrachteten, durch die Bewegung eines festen Körpers bedingten Bewegungen einer Flüssigkeit, die nach allen Richtungen sich in die Unendlichkeit erstreckt, nahmen wir die Bewegung des Körpers als eine gegebene an. Wir wollen uns jetzt mit der Aufgabe beschäftigen, diese Bewegung zu bestimmen, wenn auf den Körper und die Flüssigkeit gegebene Kräfte wirken. Dabei werden wir von der auf ein Flüssigkeitstheilchen sich beziehenden Kraft voraussetzen, dass sie ein einwerthiges Potential hat, da wir die Annahme, dass ein Geschwindigkeitspotential existirt, wie wir es dort betrachtet haben, festhalten wollen.

Um die genannte Aufgabe zu lösen, könnten wir so verfahren, dass wir mit Hülfe der Gleichung 20) der fünfzehnten Vorlesung die Drucke berechneten, welche die Flüssigkeit auf die Elemente der Oberfläche des Körpers ausübt, und diese als Kräfte einführten in die Differentialgleichungen der Bewegung eines starren Körpers, die in § 2 der sechsten Vorlesung entwickelt sind. Auf kürzerem Wege aber erreichen wir unseren Zweck, wenn wir von dem Hamilton'schen Principe ausgehen, welches, wie in § 6 der eilften Vorlesung gezeigt ist, auch für einen Fall, wie er uns jetzt vorliegt, gilt, und welches auf solche Fälle zuerst von Thomson und Tait*) angewandt worden ist.

Wir bezeichnen durch m die Masse eines der materiellen Punkte, welche den festen Körper und die Flüssigkeit bilden, durch ξ, η, ζ die Coordinaten desselben in Bezug auf ein im Raume festes Coordinatensystem zur Zeit t, durch U' die Arbeit aller wirkenden Kräfte

*) Handbuch der theoretischen Physik von W. Thomson und P. G. Tait, deutsche Uebersetzung, Bd. 1. p. 296.

für unendlich kleine, virtuelle Verrückungen ihrer Angriffspunkte, auf welche Verrückungen das Zeichen δ sich beziehen soll, endlich durch T die lebendige Kraft des ganzen Systemes. Nach dem Hamilton'schen Principe ist dann

$$\left[\sum m \frac{d\xi}{dt} \delta\xi\right]_{t_0}^{t'} = \int_{t_0}^{t'} dt\,(\delta T + U'), \tag{1}$$

wo die Summe sowohl in Bezug auf die verschiedenen Massen als auf die verschiedenen Coordinaten einer jeden Masse zu nehmen ist, und t_0 und t' irgend zwei Werthe von t bedeuten. Ueber die Variationen $\delta\xi$, auf welche wir diese Gleichung anwenden wollen, setzen wir Folgendes fest: für den festen Körper sollen sowohl für $t = t_0$, als für $t = t'$ alle $\delta\xi = 0$ sein; für $t = t_0$ soll dasselbe für die Flüssigkeit gelten; für die variirte Bewegung der Flüssigkeit, für die Bewegung also, bei der $\xi + \delta\xi$, $\eta + \delta\eta$, $\zeta + \delta\zeta$ die Coordinaten der Masse m zur Zeit t sind, soll ein Geschwindigkeitspotential, wie für die gesuchte, existiren. Aus den Werthen, die $\delta\xi$ für die Theile des festen Körpers hat, sind dann die Werthe von $\delta\xi$ für alle Theile der Flüssigkeit vollkommen bestimmt. Für $t = t'$ verschwinden die letzteren im Allgemeinen *nicht*; trotzdem verschwindet, wie gezeigt werden soll, die linke Seite der Gleichung 1). Dieselbe ist nach den gemachten Festsetzungen, wenn $d\tau$ ein Element des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes und μ die Dichtigkeit dieser bezeichnet, gleich dem Werthe, den

$$\mu \int d\tau \left(\frac{d\xi}{dt}\delta\xi + \frac{d\eta}{dt}\delta\eta + \frac{d\zeta}{dt}\delta\zeta\right)$$

für $t = t'$ annimmt. Es ist aber

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta},$$

also dieser Ausdruck

$$\mu \int d\tau \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\delta\xi + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\delta\eta + \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\delta\zeta\right).$$

Statt der Bedingung, dass die Flüssigkeit in der Unendlichkeit ruht, führen wir hier die Annahme ein, dass dieselbe in eine unendlich grosse, feste Kugelfläche eingeschlossen ist; nach dem am Ende des § 7 der sechszehnten Vorlesung bewiesenen Satze ist diese Annahme mit jener gleichwerthig. Nennt man ds ein Element der Oberfläche des Körpers oder der genannten Kugelfläche, n die nach der Flüssigkeit gerichtete Normale von ds, so verwandelt sich durch theilweise Integration die zu untersuchende Grösse in

$$-\mu \int d\tau\, \varphi \left(\frac{\partial\delta\xi}{\partial\xi} + \frac{\partial\delta\eta}{\partial\eta} + \frac{\partial\delta\zeta}{\partial\zeta}\right)$$

$$-\mu\int ds\,\varphi\left(\delta\xi\cos(n\xi)+\delta\eta\cos(n\eta)+\delta\zeta\cos(n\zeta)\right).$$

Wegen der Incompressibilität der Flüssigkeit ist allgemein

$$\frac{\partial\delta\xi}{\partial\xi}+\frac{\partial\delta\eta}{\partial\eta}+\frac{\partial\delta\zeta}{\partial\zeta}=0;$$

für jedes Element der Oberfläche des Körpers ist, wenn $t=t'$,

$$\delta\xi\cos(n\xi)+\delta\eta\cos(n\eta)+\delta\zeta\cos(n\zeta)=0,$$

weil für den bezeichneten Zeitpunkt die Variationen der Coordinaten der Punkte des Körpers verschwinden sollen, und dieselbe Gleichung besteht für jedes Element der einschliessenden Kugelfläche, weil diese fest ist.

Hiernach ist die Gleichung 1)

$$0=\int_{t_0}^{t'} dt(\delta T+U'). \tag{2}$$

Die lebendige Kraft des betrachteten Systemes, T, setzt sich zusammen aus der lebendigen Kraft des festen Körpers und der der Flüssigkeit. Die erste ist nach der Gleichung 2) der sechsten Vorlesung eine homogene Function zweiten Grades von u, v, w, p, q, r mit constanten Coefficienten; die zweite, nämlich

$$\frac{\mu}{2}\int d\tau\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)$$

oder, was dasselbe ist,

$$-\frac{\mu}{2}\int ds\,\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial n},$$

ist in Folge der Gleichung 22) der vorigen Vorlesung eine ebensolche Function; auch T ist daher eine homogene Function zweiten Grades von u, v, w, p, q, r mit constanten Coefficienten, deren Werthe von der Gestalt des Körpers, der Masse dieses und ihrer Vertheilung, sowie von der Dichtigkeit der Flüssigkeit abhängig sind.

Die Arbeit U' setzt sich zusammen aus der Arbeit der Kräfte, welche auf den Körper wirken, und der Arbeit der Kräfte, welche auf die Flüssigkeitstheile ausgeübt werden. In Bezug auf die letzteren haben wir schon voraussetzen müssen, dass sie ein einwerthiges Potential besitzen. Daraus folgt, dass, wenn der feste Körper ersetzt wäre durch eine Flüssigkeitsmasse, die mit der äusseren gleichartig ist, die Arbeit der sämmtlichen Kräfte für eine Verrückung der gedachten Flüssigkeitsmasse Null wäre, und dass daher die Arbeit der auf die wirklich vorhandene Flüssigkeit wirkenden Kräfte gleich ist der negativ genommenen Arbeit der Kräfte, welche auf die gedachte Flüssigkeitsmasse, wenn sie vorhanden wäre, wirken würden.

Die Gleichung 2) stimmt in Allem überein mit derjenigen, die wir im § 2 der sechsten Vorlesung die Differentialgleichungen der Bewegung eines starren Körpers im leeren Raume entwickelt haben. Diese Differentialgleichungen, nämlich die Gleichungen 13) oder 14) und 15) der genannten Vorlesung, gelten also auch für den hier betrachteten Fall; nur bedeuten hier X, Y, Z, M_x, M_y, M_z die Componentensummen und Drehungsmomente in Bezug auf die Achsen der x, y, z; $\Xi, H, Z, M_\xi, M_\eta, M_\zeta$ die Componentensummen und Drehungsmomente in Bezug auf die Achsen der ξ, η, ζ der Kräfte, welche auf den Körper wirken, *und* der negativ genommenen Kräfte, welche auf die vom Körper verdrängte Flüssigkeit, wenn sie vorhanden wäre, wirken würden; überdies haben die Coefficienten in dem Ausdrucke von T hier andere Werthe, als dort.

§ 2.

Wir werden jetzt annehmen, dass auf den festen Körper und die Flüssigkeit keine Kräfte wirken; die Resultate, zu denen wir dabei kommen werden, gelten in gewissen Fällen auch, wenn Kräfte vorhanden sind, z. B. wenn die Schwere wirkt, der Körper aber überall dieselbe Dichtigkeit, wie die Flüssigkeit besitzt. Die Gleichungen 12) und 13) der sechsten Vorlesung sind dann

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} &= r\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial w}\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} &= p\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial u}\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w} &= q\frac{\partial T}{\partial u} - p\frac{\partial T}{\partial v}\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} &= w\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial r}\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} &= u\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial u} + p\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial p}\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} &= v\frac{\partial T}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial v} + q\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial q}.
\end{aligned} \qquad 3)$$

Es möge zuerst eine particuläre Lösung derselben erwähnt werden. Man genügt ihnen, wenn man $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ und u, v, w gleich Constanten setzt, deren Verhältnisse die Bedingung

$$u : v : w = \frac{\partial T}{\partial u} : \frac{\partial T}{\partial v} : \frac{\partial T}{\partial w}$$

erfüllen. Es verschwinden dann die rechten Theile der Gleichungen 3), und es verschwinden auch die linken, da u, v, w, p, q, r Constanten sind. Erwägt man, dass, wenn p, q, r verschwinden, T eine homogene Function zweiten Grades von u, v, w wird, und zwar eine, die

stets positiv bleibt, da die lebendige Kraft nicht negativ sein kann, so sieht man, dass die Bestimmung der Verhältnisse $u:v:w$ aus der genannten Bedingung übereinkommt mit der Bestimmung der Hauptachsen eines gewissen Ellipsoids, des Ellipsoids nämlich, dessen Gleichung

$$T = \text{const.}$$

ist, wenn man u, v, w als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes ansieht. Nimmt man die Achsen der u, v, w parallel mit denen der x, y, z an, so sind die Richtungen der Hauptachsen des bezeichneten Ellipsoids drei auf einander senkrechte, im Körper feste Richtungen, in deren jeder dieser, ohne sich zu drehen, mit gleichbleibender Geschwindigkeit in der Flüssigkeit fortschreiten kann. Andere Richtungen, die dieselbe Eigenschaft haben, giebt es nicht, wenn das Ellipsoid nicht ein Rotationsellipsoid ist; ist dies der Fall, so hat die Richtung der Rotationsachse und jede auf dieser senkrechte Richtung die genannte Eigenschaft. Jede Richtung besitzt sie, wenn das Ellipsoid eine Kugel ist.

Wir untersuchen nicht, unter welchen Bedingungen die besprochene Bewegung eine *stabile* ist, d. h. unter welchen Bedingungen *immer* p, q, r unendlich klein sind und u, v, w bis auf unendlich Kleines die bezeichneten Werthe haben, wenn in einem Augenblicke dieses stattfindet.

Ohne eine beschränkende Annahme einzuführen, kann man drei Integrale der Gleichungen 3) finden; zu diesem Zwecke hat man dieselben

mit u	oder mit $\frac{\partial T}{\partial u}$	oder mit $\frac{\partial T}{\partial p}$
v	$\frac{\partial T}{\partial v}$	$\frac{\partial T}{\partial q}$
w	$\frac{\partial T}{\partial w}$	$\frac{\partial T}{\partial r}$
p	0	$\frac{\partial T}{\partial u}$
q	0	$\frac{\partial T}{\partial v}$
r	0	$\frac{\partial T}{\partial w}$

zu multipliciren und jedesmal zu addiren. Erwägt man bei Benutzung des ersten Factorensystems, dass nach einem bekannten, auf homogene Functionen bezüglichen Satze

$$2T = u\frac{\partial T}{\partial u} + v\frac{\partial T}{\partial v} + w\frac{\partial T}{\partial w} + p\frac{\partial T}{\partial p} + q\frac{\partial T}{\partial q} + r\frac{\partial T}{\partial r},$$

dass ferner

Die Gleichung 2) stimmt in Allem überein mit derjenigen, aus welcher wir im § 2 der sechsten Vorlesung die Differentialgleichungen der Bewegung eines starren Körpers im leeren Raume entwickelt haben. Diese Differentialgleichungen, nämlich die Gleichungen 12) und 13) oder 14) und 15) der genannten Vorlesung, gelten also auch für den hier betrachteten Fall; nur bedeuten hier X, Y, Z, M_x, M_y, M_z die Componentensummen und Drehungsmomente in Bezug auf die Achsen der x, y, z; $\Xi, H, Z, M_\xi, M_\eta, M_\zeta$ die Componentensummen und Drehungsmomente in Bezug auf die Achsen der ξ, η, ζ der Kräfte, welche auf den Körper wirken, *und* der negativ genommenen Kräfte, welche auf die vom Körper verdrängte Flüssigkeit, wenn sie vorhanden wäre, wirken würden; überdies haben die Coefficienten in dem Ausdrucke von T hier andere Werthe, als dort.

§ 2.

Wir werden jetzt annehmen, dass auf den festen Körper und die Flüssigkeit keine Kräfte wirken; die Resultate, zu denen wir dabei kommen werden, gelten in gewissen Fällen auch, wenn Kräfte vorhanden sind, z. B. wenn die Schwere wirkt, der Körper aber überall dieselbe Dichtigkeit, wie die Flüssigkeit besitzt. Die Gleichungen 12) und 13) der sechsten Vorlesung sind dann

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} &= r\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial w}\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} &= p\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial u}\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w} &= q\frac{\partial T}{\partial u} - p\frac{\partial T}{\partial v}\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} &= w\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial r}\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} &= u\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial u} + p\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial p}\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} &= v\frac{\partial T}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial v} + q\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial q}.
\end{aligned} \tag{3)}$$

Es möge zuerst eine particuläre Lösung derselben erwähnt werden. Man genügt ihnen, wenn man $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ und u, v, w gleich Constanten setzt, deren Verhältnisse die Bedingung

$$u : v : w = \frac{\partial T}{\partial u} : \frac{\partial T}{\partial v} : \frac{\partial T}{\partial w}$$

erfüllen. Es verschwinden dann die rechten Theile der Gleichungen 3), und es verschwinden auch die linken, da u, v, w, p, q, r Constanten sind. Erwägt man, dass, wenn p, q, r verschwinden, T eine homogene Function zweiten Grades von u, v, w wird, und zwar eine, die

stets positiv bleibt, da die lebendige Kraft nicht negativ sein kann, so sieht man, dass die Bestimmung der Verhältnisse $u : v : w$ aus der genannten Bedingung übereinkommt mit der Bestimmung der Hauptachsen eines gewissen Ellipsoids, des Ellipsoids nämlich, dessen Gleichung

$$T = \text{const.}$$

ist, wenn man u, v, w als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes ansieht. Nimmt man die Achsen der u, v, w parallel mit denen der x, y, z an, so sind die Richtungen der Hauptachsen des bezeichneten Ellipsoids drei auf einander senkrechte, im Körper feste Richtungen, in deren jeder dieser, ohne sich zu drehen, mit gleichbleibender Geschwindigkeit in der Flüssigkeit fortschreiten kann. Andere Richtungen, die dieselbe Eigenschaft haben, giebt es nicht, wenn das Ellipsoid nicht ein Rotationsellipsoid ist; ist dies der Fall, so hat die Richtung der Rotationsachse und jede auf dieser senkrechte Richtung die genannte Eigenschaft. Jede Richtung besitzt sie, wenn das Ellipsoid eine Kugel ist.

Wir untersuchen nicht, unter welchen Bedingungen die besprochene Bewegung eine *stabile* ist, d. h. unter welchen Bedingungen *immer* p, q, r unendlich klein sind und u, v, w bis auf unendlich Kleines die bezeichneten Werthe haben, wenn in einem Augenblicke dieses stattfindet.

Ohne eine beschränkende Annahme einzuführen, kann man drei Integrale der Gleichungen 3) finden; zu diesem Zwecke hat man dieselben

mit u	oder mit	$\frac{\partial T}{\partial u}$	oder mit	$\frac{\partial T}{\partial p}$
v		$\frac{\partial T}{\partial v}$		$\frac{\partial T}{\partial q}$
w		$\frac{\partial T}{\partial w}$		$\frac{\partial T}{\partial r}$
p		0		$\frac{\partial T}{\partial u}$
q		0		$\frac{\partial T}{\partial v}$
r		0		$\frac{\partial T}{\partial w}$

zu multipliciren und jedesmal zu addiren. Erwägt man bei Benutzung des ersten Factorensystems, dass nach einem bekannten, auf homogene Functionen bezüglichen Satze

$$2T = u\frac{\partial T}{\partial u} + v\frac{\partial T}{\partial v} + w\frac{\partial T}{\partial w} + p\frac{\partial T}{\partial p} + q\frac{\partial T}{\partial q} + r\frac{\partial T}{\partial r},$$

dass ferner

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial T}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial w}\frac{dw}{dt} + \frac{\partial T}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial T}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial T}{\partial r}\frac{dr}{dt},$$

und daher

$$\frac{dT}{dt} = u\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} + v\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} + w\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w} + p\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} + q\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} + r\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r}$$

ist, so ergiebt sich auf diese Weise

$$\begin{gathered} 2T = L \\ \left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)^2 = M \\ \frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial p} + \frac{\partial T}{\partial v}\frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial T}{\partial w}\frac{\partial T}{\partial r} = N, \end{gathered} \tag{4}$$

wo L, M, N willkürliche Constanten bedeuten.

6 andere Integrale des vorliegenden Problems erhält man aus der zweiten Form seiner Differentialgleichungen, die aus den Gleichungen 14) und 15) der sechsten Vorlesung hervorgeht, wenn man in diesen Ξ, H, Z, M_ξ, M_η, M_ζ gleich Null setzt. Die einen geben

$$\begin{aligned} \alpha_1\frac{\partial T}{\partial u} + \alpha_2\frac{\partial T}{\partial v} + \alpha_3\frac{\partial T}{\partial w} &= A \\ \beta_1\frac{\partial T}{\partial u} + \beta_2\frac{\partial T}{\partial v} + \beta_3\frac{\partial T}{\partial w} &= B \\ \gamma_1\frac{\partial T}{\partial u} + \gamma_2\frac{\partial T}{\partial v} + \gamma_3\frac{\partial T}{\partial w} &= C, \end{aligned} \tag{5}$$

und die andern bei Rücksicht hierauf

$$\begin{aligned} \alpha_1\frac{\partial T}{\partial p} + \alpha_2\frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_3\frac{\partial T}{\partial r} &= A' + B\gamma - C\beta \\ \beta_1\frac{\partial T}{\partial p} + \beta_2\frac{\partial T}{\partial q} + \beta_3\frac{\partial T}{\partial r} &= B' + C\alpha - A\gamma \\ \gamma_1\frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2\frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3\frac{\partial T}{\partial r} &= C' + A\beta - B\alpha, \end{aligned} \tag{6}$$

wo A, B, C, A', B', C' willkürliche Constanten sind und die 12 Grössen α, β, γ die in den Gleichungen 20) der vorigen Vorlesung angegebene Bedeutung haben.

Die beiden letzten der Gleichungen 4) sind Folgen der Gleichungen 5) und 6), und die Constanten M und N sind ausdrückbar durch die Constanten A, B, C, A', B', C'. Quadrirt man nämlich die Gleichungen 5) und addirt sie, multiplicirt man dann die Gleichungen 5) mit den Gleichungen 6) und addirt wieder, so erhält man bei Rücksicht auf die Gleichungen 4) und die Relationen, die zwischen den Cosinus α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3 bestehen,

$$\begin{gathered} A^2 + B^2 + C^2 = M \\ AA' + BB' + CC' = N. \end{gathered}$$

Hat man u, v, w, p, q, r den Gleichungen 3) gemäss als Functionen von t bestimmt, so erfordert die vollständige Lösung des vorgelegten Problems, d. h. die Bestimmung der 12 Grössen α, β, γ nur noch die Ausführung von Quadraturen, wie nun gezeigt werden soll.

In Bezug auf die willkürlichen Constanten A, B, C, die in den Gleichungen 5) vorkommen, kann man, ohne die Allgemeinheit der betrachteten Bewegung zu beeinträchtigen, annehmen, dass $A = 0$, $B = 0$ und C positiv ist; man verfügt dadurch nur über die Richtung der ζ-Achse. Sieht man nämlich $\frac{\partial T}{\partial u}$, $\frac{\partial T}{\partial v}$, $\frac{\partial T}{\partial w}$ als die Componenten der Geschwindigkeit eines Punktes nach den Achsen der x, y, z an, so zeigen die Gleichungen 5), dass die Componenten dieser Geschwindigkeit nach den Achsen der ξ, η, ζ den Constanten A, B, C gleich sind; giebt man der ζ-Achse die Richtung dieser Geschwindigkeit, so verschwinden A und B, während C positiv wird. Multiplicirt man nach dieser Festsetzung die Gleichungen 5) mit α_1, β_1, γ_1 oder α_2, β_2, γ_2 oder α_3, β_3, γ_3 und addirt sie jedesmal, so erhält man

$$\gamma_1 = \frac{1}{C}\frac{\partial T}{\partial u}, \qquad \gamma_2 = \frac{1}{C}\frac{\partial T}{\partial v}, \qquad \gamma_3 = \frac{1}{C}\frac{\partial T}{\partial w}. \tag{7}$$

Um die 6 andern Cosinus zu finden, führen wir die durch die Gleichungen 8) der fünften Vorlesung definirten Winkel ϑ, f, φ ein. Wir haben dann

$$\gamma_1 = \cos f \sin\vartheta, \quad \gamma_2 = \sin f \sin\vartheta, \quad \gamma_3 = \cos\vartheta, \tag{8}$$

woraus f und ϑ zu bestimmen sind. Zur Bestimmung von φ führt die Gleichung 12) der siebenten Vorlesung, nämlich die Gleichung

$$d\varphi = \frac{\gamma_1 p + \gamma_2 q}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}\, dt,$$

aus welcher folgt

$$d\varphi = C\,\frac{p\frac{\partial T}{\partial u} + q\frac{\partial T}{\partial v}}{\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2}\, dt.$$

Um endlich die Coordinaten α, β, γ des Anfangspunktes der x, y, z als Functionen von t darzustellen, setzen wir die in den Gleichungen 6) vorkommenden Constanten A' und B' gleich Null; auch dadurch beeinträchtigen wir nicht die Allgemeinheit der betrachteten Bewegung; wir verfügen nur über die Lage der ζ-Achse, da, wie aus den Gleichungen 6) hervorgeht, eine Veränderung der Werthe von A' und B' compensirt wird durch Hinzufügung von additiven Constanten zu β und α. Die beiden ersten der Gleichungen 6) geben dann

$$\alpha = \frac{1}{C}\left(\beta_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \beta_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \beta_3 \frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

$$\beta = -\frac{1}{C}\left(\alpha_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

und γ ist aus der Gleichung

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma_1 u + \gamma_2 v + \gamma_3 w$$

d. h.

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{C}\left(u \frac{\partial T}{\partial u} + v \frac{\partial T}{\partial v} + w \frac{\partial T}{\partial w}\right)$$

zu ermitteln.

§ 3.

Die Zahl der in dem Ausdruck von T vorkommenden Constanten ist im Allgemeinen 21; unter gewissen Bedingungen verringert sich aber diese Zahl und die Integration der Differentialgleichungen 3) wird dann erleichtert. Eine solche Vereinfachung tritt ein, wenn die Oberfläche des Körpers und die Vertheilung der Masse in ihm symmetrisch in Bezug auf eine Ebene ist. Um das zu zeigen, fassen wir zuerst den Theil von T ins Auge, den die lebendige Kraft der Flüssigkeit bildet. Das Doppelte dieser lebendigen Kraft setze man

$$\begin{aligned} = a_{11} u^2 + 2a_{12} uv + 2a_{13} uw + 2a_{14} up + 2a_{15} uq + 2a_{16} ur \\ + a_{22} v^2 + 2a_{23} vw + 2a_{24} vp + 2a_{25} vq + 2a_{26} vr \\ + a_{33} w^2 + \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist dann, wie wir in § 1 gesehen haben,

$$= -\mu \int ds\, \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n};$$

in Folge der Gleichung 22) der vorigen Vorlesung hat man daher

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\mu \int ds\, \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{dn} \\ a_{12} &= -\mu \int ds\, \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{dn} = -\mu \int ds\, \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned} \tag{9}$$

Es werde nun angenommen, dass die Oberfläche des Körpers symmetrisch in Bezug auf die xz-Ebene ist, d. h. dass, wenn x, y, z die Coordinaten eines Punktes derselben sind, sie auch den Punkt $(x, -y, z)$ enthält. Zwei Punkte, wie diese, sollen entsprechende Punkte genannt werden. In zwei entsprechenden Punkten der Oberfläche haben dann, den Gleichungen 23) der vorigen Vorlesung zufolge, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}$, $\frac{\partial \varphi_3}{\partial n}$, $\frac{\partial \varphi_5}{\partial n}$ gleiche und $\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$, $\frac{\partial \varphi_4}{\partial n}$, $\frac{\partial \varphi_6}{\partial n}$ entgegengesetzte Werthe. Daraus lässt sich beweisen, dass in irgend zwei entsprechen-

den Punkten des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes φ_1, φ_3, φ_5 gleiche, φ_2, φ_4, φ_6 entgegengesetzte Werthe besitzen. Bezeichnet man nämlich durch φ_1' den Werth von φ_1 in dem Punkte $(x, -y, z)$, aufgefasst als Function von x, y, z (den Coordinaten des Punktes, auf den sich φ_1 bezieht), so genügt $\varphi_1 - \varphi_1'$ derselben partiellen Differentialgleichung und denselben Stetigkeitsbedingungen, wie φ, es ist, wie dieses, in der Unendlichkeit $= 0$, und an der Oberfläche des Körpers ist

$$\frac{\partial(\varphi_1 - \varphi_1')}{\partial n} = 0;$$

daraus folgt $\varphi_1' = \varphi_1$. In ähnlicher Weise sind die über φ_2, φ_3, . . ausgesprochenen Behauptungen zu beweisen. Da hiernach auch in entsprechenden Elementen der Oberfläche des Körpers φ_1, φ_3, φ_5 gleiche und φ_2, φ_4, φ_6 entgegengesetzte Werthe haben, so zeigen die Gleichungen 9), dass diejenigen a verschwinden, bei denen ein Index der Reihe 1, 3, 5, der andere der Reihe 2, 4, 6 angehört.

Das Doppelte der lebendigen Kraft des Körpers ist, wenn dm ein Element seiner Masse bezeichnet, das die Coordinaten x, y, z hat, wie schon in der Gleichung 2) der sechsten Vorlesung angegeben ist,

$$\begin{aligned}= \int dm \{ & u^2 + v^2 + w^2 + (y^2 + z^2) p^2 + (z^2 + x^2) q^2 + (x^2 + y^2) r^2 \\ & + 2x(vr - wq) + 2y(wp - ur) + 2z(uq - vp) \\ & - 2yz\,qr - 2zx\,rp - 2xy\,pq \};\end{aligned}$$

ist die Vertheilung der Masse symmetrisch zur xz-Ebene, so verschwinden hier diejenigen Glieder, welche die Factoren

$$wp - ur, \quad qr, \quad pq$$

enthalten. Setzt man allgemein die doppelte lebendige Kraft des Körpers

$$\begin{aligned}= b_{11}u^2 + 2b_{12}uv + 2b_{13}uw + 2b_{14}up + & \quad \cdot \quad \cdot \\ + b_{22}v^2 + 2b_{23}vw + 2b_{24}vp + & \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \quad \cdot \quad \cdot,\end{aligned}$$

so verschwinden daher, wie man leicht sieht, diejenigen b, bei denen ein Index der Reihe 1, 3, 5, der andere der Reihe 2, 4, 6 angehört.

Daraus folgt, dass, wenn man

$$\begin{aligned}2T = c_{11}u^2 + 2c_{12}uv + 2c_{13}uw + 2c_{14}up + & \quad \cdot \quad \cdot \\ + c_{22}v^2 + 2c_{23}vw + & \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \quad \cdot \quad \cdot\end{aligned}$$

setzt, diejenigen c gleich Null sind, bei denen ein Index 1, 3 oder 5, der andere 2, 4 oder 6 ist, falls der Körper sowohl in Bezug auf seine Gestalt, als in Bezug auf die Vertheilung der Masse symmetrisch in Bezug auf die xz-Ebene ist.

Findet eine solche Symmetrie in Bezug auf die yx-Ebene oder die zy-Ebene statt, so treten an Stelle der Reihen 1, 3, 5 und 2, 4, 6 die Reihen 2, 1, 6 und 3, 5, 4 oder die Reihen 3, 2, 4 und 1, 6, 5.

Es sei nun der Körper symmetrisch nach Gestalt und Vertheilung der Masse in Bezug auf zwei, auf einander senkrechte Ebenen; nehmen wir diese zur xz- und yz-Ebene, so ergiebt sich hieraus

$$2T = c_{11}u^2 + c_{22}v^2 + c_{33}w^2 + c_{44}p^2 + c_{55}q^2 + c_{66}r^2 + 2c_{15}uq + 2c_{24}vp.$$

Wir specialisiren den betrachteten Fall noch weiter, indem wir annehmen, dass es noch ein zweites Paar auf einander senkrechter, durch die z-Achse gehender Ebenen giebt, in Bezug auf welche Symmetrie stattfindet. Wir führen ein zweites Coordinatensystem, das der x', y', z', ein, dessen $x'z'$- und $y'z'$-Ebenen diese Ebenen sind; für denselben Punkt ist dann

$$x = x'\cos\vartheta + y'\sin\vartheta$$
$$y = -x'\sin\vartheta + y'\cos\vartheta$$
$$z = z',$$

wo ϑ einen der Winkel bedeutet, den die xz-Ebene mit der $x'z'$-Ebene bildet. Bezeichnen wir durch gestrichene Buchstaben dieselben Grössen in Bezug auf das neue Coordinatensystem, welche in Bezug auf das alte die ungestrichenen bedeuten, so ist zugleich

$$u = u'\cos\vartheta + v'\sin\vartheta, \qquad p = p'\cos\vartheta + q'\sin\vartheta$$
$$v = -u'\sin\vartheta + v'\cos\vartheta \qquad q = -p'\sin\vartheta + q'\cos\vartheta$$
$$w = w' \qquad r = r'$$

und

$$2T = c_{11}'u'^2 + c_{22}'v'^2 + c_{33}'w'^2 + c_{44}'p'^2 + c_{55}'q'^2 + c_{66}'r'^2 + 2c_{15}'u'q' + 2c_{24}'v'p'.$$

Setzt man die beiden Ausdrücke von $2T$ einander gleich, so erhält man eine Gleichung, welche identisch sein muss bei Rücksicht auf die Relationen zwischen u, v, w, p, q, r, und u', v', w', p', q', r'. Drückt man jene 6 Grössen durch diese aus, so ergiebt die Vergleichung der Coefficienten von $u'v'$, $p'q'$ und $u'p' - v'q'$

$$c_{11} - c_{22} = 0, \quad c_{44} - c_{55} = 0, \quad c_{15} + c_{24} = 0,$$

und die Vergleichung der Coefficienten der übrigen Glieder, dass

die Grössen c' den entsprechenden Grössen c gleich sind. Hiernach ist

$$2T = c_{11}(u^2 + v^2) + c_{33}w^2 + c_{44}(p^2 + q^2) + c_{66}r^2 + 2c_{15}(uq - vp).$$

Dieser Ausdruck lässt noch eine Vereinfachung zu durch eine passende Wahl des Anfangspunktes der Coordinaten auf der z-Achse. Um das zu zeigen, führe man neben dem Coordinatensystem der x, y, z ein zweites, dass der x', y', z' ein, das so gewählt sein soll, dass für jeden Punkt

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z' + a$$

ist. Bei einer ähnlichen Bezeichnung, wie sie eben gebraucht ist, hat man dann

$$\begin{aligned} u &= u' - aq', & p &= p' \\ v &= v' + ap', & q &= q' \\ w &= w' & r &= r' \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &c_{11}(u^2 + v^2) + c_{33}w^2 + c_{44}(p^2 + q^2) + c_{66}r^2 + 2c_{15}(uq - vp) \\ &= c_{11}'(u'^2 + v'^2) + c_{33}'w'^2 + c_{44}'(p'^2 + q'^2) + c_{66}'r'^2 + 2c_{15}'(u'q' - v'p'), \end{aligned}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} &c_{11} = c_{11}', \quad c_{33} = c_{33}', \quad c_{66} = c_{66}', \\ &c_{44} = c_{44}' + 2ac_{15}' + a^2c_{11}' \\ &c_{15} = c_{15}' + 2ac_{11}'. \end{aligned}$$

Hieraus geht hervor, dass, wenn der Anfangspunkt der z' beliebig gewählt ist, a so bestimmt werden kann, dass

$$c_{15} = 0$$

ist. Es wird dann

$$2T = c_{11}(u^2 + v^2) + c_{33}w^2 + c_{44}(p^2 + q^2) + c_{66}r^2. \qquad 10)$$

Die Voraussetzungen, auf welchen die Herleitung dieser Gleichung beruht, sind erfüllt, wenn der Körper der Gestalt und Vertheilung der Masse nach ein Rotationskörper ist; sie sind aber auch in mannigfaltigen andern Fällen erfüllt, z. B. wenn der Körper ein homogenes, gerades Prisma oder eine homogene, gerade Pyramide von quadratischem oder regelmässig sechseckigem Querschnitt ist; in solchen Fällen wollen wir sagen, dass er den *Charakter* eines Rotationskörpers hat.

Ist der Körper ein Rotationskörper in Bezug auf *zwei* auf einander senkrechte Achsen, d. h. ist er eine Kugel, in der die Masse symmetrisch zum Mittelpunkte vertheilt ist, oder hat er den Charakter eines Rotationskörpers in Bezug auf zwei auf einander senkrechte Achsen, was z. B. bei einem homogenen Würfel oder einem homo-

genen, regulären Oktaeder der Fall ist, und nimmt man diese Achsen zu zweien der Coordinatenachsen, so ist für ihn

$$2T = c_{11}(u^2 + v^2 + w^2) + c_{44}(p^2 + q^2 + r^2).$$

Das hierdurch bestimmte T ist von derselben Form, wie die lebendige Kraft des Körpers selbst; nur seine Masse und seine Trägheitsmomente in Bezug auf die Coordinatenachsen erscheinen durch die Flüssigkeit vergrössert; die Aufgabe, seine Bewegung in der Flüssigkeit zu bestimmen, ist auch in dem Falle, dass beliebige Kräfte auf ihn wirken, dieselbe, wie die Aufgabe, seine Bewegung im leeren Raume zu finden. Ist der Körper eine Kugel, so findet eine Vergrösserung der Trägheitsmomente durch die Flüssigkeit nicht statt; die Vergrösserung der Masse ist, wenn R den Radius bezeichnet, den Gleichungen 26) der vorigen Vorlesung und den Gleichungen 9) zufolge

$$= \tfrac{1}{2}\,\frac{4\pi}{3}\,R^3\mu\,,$$

d. h. gleich der Hälfte der Masse der von der Kugel verdrängten Flüssigkeit.

§ 4.

Wir nehmen nun an, dass der in der Flüssigkeit bewegte Körper ein Rotationskörper ist oder den Charakter eines solchen hat, so dass die Gleichung 10) gilt. In diesem Falle lassen sich die Differentialgleichungen 3) vollständig integriren. Die letzte von ihnen wird

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad \text{d. h. } r = \text{const.};$$

die andern werden

$$\begin{aligned} c_{11}\frac{du}{dt} &= c_{11}vr - c_{33}wq \\ c_{11}\frac{dv}{dt} &= -c_{11}ur + c_{33}wp \\ c_{33}\frac{dw}{dt} &= c_{11}(uq - vp) \\ c_{44}\frac{dp}{dt} &= (c_{11} - c_{33})vw + (c_{44} - c_{66})qr \\ c_{44}\frac{dq}{dt} &= (c_{33} - c_{11})uw + (c_{66} - c_{44})pr. \end{aligned} \qquad 11)$$

An Stelle von u, v, p, q sollen hier 4 andere Variable eingeführt werden. Nach den Gleichungen 7), 8) und 10) ist

$$\frac{v}{u} = \operatorname{tg} f;$$

man kann daher setzen

$$\begin{aligned} u &= s\cos f & \qquad p &= \sigma\cos(f + \psi) \\ v &= s\sin f & \qquad q &= \sigma\sin(f + \psi), \end{aligned}$$

wobei

$$u^2 + v^2 = s^2, \qquad p^2 + q^2 = \sigma^2,$$
$$up + vq = s\sigma \cos\psi, \qquad uq - vp = s\sigma \sin\psi$$

wird. Benutzt man noch, dass hiernach

$$s\,ds = u\,du + v\,dv \qquad \sigma\,d\sigma = p\,dp + q\,dq$$
$$s^2 df = u\,dv - v\,du \qquad \sigma^2(df + d\psi) = p\,dq - q\,dp$$

ist, so findet man leicht aus den Gleichungen 11)

$$\begin{aligned}
c_{33}\frac{dw}{dt} &= c_{11}\, s\sigma \sin\psi \\
c_{11}\frac{ds}{dt} &= -\, c_{33}\, w\sigma \sin\psi \\
c_{44}\frac{d\sigma}{dt} &= (c_{33} - c_{11})\, ws \sin\psi \\
c_{11}\frac{df}{dt} &= c_{33}\, w\, \frac{\sigma}{s} \cos\psi - c_{11} r \\
c_{44}\frac{d\psi}{dt} &= \left((c_{33} - c_{11})\frac{s}{\sigma} - \frac{c_{33}c_{44}}{c_{11}}\frac{\sigma}{s}\right) w \cos\psi + c_{66} r.
\end{aligned} \tag{12}$$

Drei Integrale dieser Gleichungen hat man in den Gleichungen 4). Sie sind bei den neu eingeführten Zeichen

$$\begin{aligned}
c_{11}s^2 + c_{33}w^2 + c_{44}\sigma^2 + c_{66}r^2 &= L \\
c_{11}^2 s^2 + c_{33}^2 w^2 &= M \\
c_{33}c_{66}\, wr + c_{11}c_{44}\, s\,\sigma \cos\psi &= N.
\end{aligned}$$

Führt man neue Constanten a, b, g, a', b', g' ein, die in gewisser Weise von L, M, N, r und den Grössen c abhängen, so kann man dieselben schreiben

$$\begin{aligned}
s &= \sqrt{a - a'w^2} \\
\sigma &= \sqrt{b - b'w^2} \\
s\sigma \cos\psi &= g - g'w.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$s\sigma \sin\psi = \sqrt{(a - a'w^2)(b - b'w^2) - (g - g'w)^2}.$$

Die erste und vierte der Gleichungen 12) werden dadurch

$$dt = \frac{c_{33}}{c_{11}} \frac{dw}{\sqrt{(a - a'w^2)(b - b'w^2) - (g - g'w)^2}}$$

$$df = -\,r\,dt + \left(\frac{c_{33}}{c_{11}}\right)^2 \frac{(g - g'w)\,w\,dw}{(a - a'w^2)\sqrt{(a - a'w^2)(b - b'w^2) - (g - g'w)^2}}.$$

Diese Gleichungen sind integrabel; ihre Integrale vervollständigen die Integration der Gleichungen 12).

§ 5.

Weiter führen wollen wir die Berechnung der Bewegung des Körpers nur für einen Fall, der in dem im vorigen § behandelten als specieller enthalten und durch gewisse Anfangswerthe der Grössen u, v, w, p, q, r charakterisirt ist. Man genügt den Gleichungen 11), wenn man

$$v = 0, \quad p = 0, \quad r = 0$$

setzt und u, w, q passend bestimmt; die Bewegung hat dann das Eigenthümliche, dass die xz-Ebene im Raume dieselbe bleibt. Durch die genannte Annahme werden zwei von den Gleichungen 11) identisch erfüllt, die drei andern geben

$$c_{11}\frac{du}{dt} = -c_{33} w q$$
$$c_{33}\frac{dw}{dt} = c_{11} u q$$
$$c_{44}\frac{dq}{dt} = (c_{33} - c_{11}) u w.$$

Vergleicht man diese mit den identischen Gleichungen

$$\frac{d \sin \operatorname{am} \lambda t}{dt} = \lambda \cos \operatorname{am} \lambda t \Delta \operatorname{am} \lambda t$$
$$\frac{d \cos \operatorname{am} \lambda t}{dt} = -\lambda \sin \operatorname{am} \lambda t \Delta \operatorname{am} \lambda t$$
$$\frac{d \Delta \operatorname{am} \lambda t}{dt} = -\lambda k^2 \sin \operatorname{am} \lambda t \cos \operatorname{am} \lambda t,$$

in denen die im § 1 der siebenten Vorlesung erklärte Bezeichnungsweise benutzt ist und k den Modul der elliptischen Functionen bedeutet, so sieht man, dass sie erfüllt werden, wenn man den Grössen u, w, q die Werthe

$$l \sin \operatorname{am} \lambda t, \quad m \cos \operatorname{am} \lambda t, \quad n \Delta \operatorname{am} \lambda t$$

giebt und die Constanten k, λ, l, m, n passend bestimmt. Zwei von diesen Constanten bleiben dabei noch willkürlich; sie sind zwei von den drei Constanten der Integration, die die vollständigen Integrale der vorgelegten Differentialgleichungen enthalten müssen; die dritte könnte man einführen, indem man zu t eine additive Constante hinzufügte. Die angegebenen Werthe können unter u, w, q so vertheilt werden, dass alle in Betracht kommenden Grössen reell sind und k ein echter Bruch ist. Um das zu bewirken, gehe man von den Gleichungen

$$c_{11} u^2 + c_{33} w^2 + c_{44} q^2 = L$$
$$c_{11}{}^2 u^2 + c_{33}{}^2 w^2 \qquad = M$$

aus, in welche die Gleichungen 4) bei dem durch 10) bestimmten Werthe von T und den über v, p, r gemachten Annahmen übergehen, und welche Integrale der Differentialgleichungen, um die es sich handelt, sind. Bedenkt man, dass, wenn die genannte Absicht erreicht ist, $\cos^2$ am und Δ^2 am abnehmen, während $\sin^2$ am wächst, so folgt aus der zweiten von diesen Gleichungen, dass eine von den beiden Grössen u und w durch sin am ausgedrückt werden muss, weil ihr zufolge u^2 und w^2 in entgegengesetztem Sinne sich gleichzeitig ändern. Aus den beiden Gleichungen ergiebt sich ferner

$$c_{11}(c_{33} - c_{11})\, u^2 + c_{33} c_{44} q^2 = \text{const.}$$

und

$$c_{33}(c_{11} - c_{33})\, w^2 + c_{11} c_{44} q^2 = \text{const.} \qquad 13)$$

Da nun c_{11}, c_{33}, c_{44} positive Grössen sind (weil T nie negativ sein kann), so folgt aus derselben Eigenschaft der elliptischen Functionen, dass u oder w durch sin am ausgedrückt werden muss, je nachdem c_{11} kleiner oder grösser als c_{33} ist. Jeder dieser beiden Fälle theilt sich wiederum in zwei, die sich durch das Vorzeichen einer der in 13) vorkommenden Constanten unterscheiden. Ist $c_{11} < c_{33}$, also u durch sin am ausgedrückt, und ist die Constante

$$- c_{33}(c_{33} - c_{11})\, w^2 + c_{11} c_{44} q^2$$

positiv, so kann q nicht verschwinden, es muss daher q durch Δ am, w durch cos am ausgedrückt werden, da cos am für gewisse Werthe des Arguments verschwindet; das Umgekehrte findet statt, wenn die genannte Constante negativ ist. Eine ähnliche Betrachtung ist auf den Fall $c_{11} > c_{33}$ anwendbar.

In Bezug auf die Formeln, welche in diesen vier Fällen die sämmtlichen Unbekannten des Problems als reelle Functionen der Zeit darstellen, möge auf eine Abhandlung*) verwiesen werden, in der auch ein Fall der Bewegung des Rotationskörpers in der Flüssigkeit untersucht ist, in dem v, p und r nicht gleich Null sind, ein Fall, in dem der Anfangspunkt der x, y, z in einer Schraubenlinie sich bewegt.

§ 6.

Im § 4 der vorigen Vorlesung haben wir das Geschwindigkeitspotential φ für den Fall berechnet, dass in der Flüssigkeit auf gegebene Weise zwei Kugeln sich bewegen, deren Radien unendlich klein gegen ihren Abstand sind. Hiernach sind wir jetzt im Stande, die Differentialgleichungen aufzustellen, nach denen die Bewegung dieser Kugeln vor sich geht, wenn gegebene Kräfte auf sie wirken. Hierzu ist es nöthig, die lebendige Kraft der Flüssigkeit zu berechnen. Diese

*) Kirchhoff, Ueber die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit; Borchardt's Journal, Bd. 71.

ist, wenn die Dichtigkeit der Flüssigkeit $= 1$ gesetzt wird, gleich dem Integral

$$-\tfrac{1}{2}\int ds\, \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n},$$

über die beiden Kugelflächen ausgedehnt; den Werth desselben für die erste Kugelfläche erhält man aus der Gleichung 30) der vorigen Vorlesung, wenn man benutzt, dass hier

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = u \cos(nx) + v \cos(ny) + w \cos(nz)$$

$$\int ds \cos(nx) = 0, \quad \int ds \cos(ny) = 0, \quad \int ds \cos(nz) = 0$$

$$\int ds \cos^2(nx) = \int ds \cos^2(ny) = \int ds \cos^2(nz) = \frac{4\pi}{3} R^2$$

$$\int ds \cos(ny)\cos(nz) = \int ds \cos(nz)\cos(nx) = \int ds \cos(nx)\cos(ny) = 0$$

ist; vertauscht man in dem gefundenen Ausdrucke die gestrichenen mit den nicht gestrichenen Buchstaben, so erhält man den Werth desselben Integrales für die zweite Kugelfläche. So ergiebt sich die lebendige Kraft der Flüssigkeit

$$= \frac{\pi}{3} R^3 (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{\pi}{3} R'^3 (u'^2 + v'^2 + w'^2) + V,$$

wo

$$\begin{aligned} V = -\pi R^3 R'^3 \Bigg(& u u' \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a^2} + (v w' + v' w) \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b\, \partial c} \\ & + v v' \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b^2} + (w u' + w' u) \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c\, \partial a} \\ & + w w' \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c^2} + (u v' + u' v) \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a\, \partial b} \Bigg). \end{aligned} \tag{14}$$

Dieser Ausdruck ist genau bis auf unendlich kleine Grössen, wenn man den Abstand der Kugeln als endlich und die Geschwindigkeit der Flüssigkeitstheile in endlicher Entfernung von diesen als endlich bezeichnet. Man hat zu ihm die lebendige Kraft der Kugeln zu addiren, um die lebendige Kraft T des ganzen Systemes zu erhalten. Wir wollen annehmen, dass jede Kugel ihren Schwerpunkt in ihrem Mittelpunkte hat und nicht rotirt; sind m und m' die Massen der Kugeln, so ist dann ihre lebendige Kraft

$$= \frac{m}{2} (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{m'}{2} (u'^2 + v'^2 + w'^2).$$

Finden Drehungen der Kugeln um ihre Mittelpunkte statt, so gehen diese gerade so vor sich, als ob die Flüssigkeit nicht vorhanden wäre, und haben keinen Einfluss auf die Bewegung der Flüssigkeit und der Mittelpunkte der Kugeln.

Bezeichnet man durch X, Y, Z und X', Y', Z' die Summen der Componenten der Kräfte, welche auf die beiden Kugeln wirken, so sind die Differentialgleichungen der Bewegung ihrer Mittelpunkte, d. h. der Punkte (a, b, c) und (a', b', c'), nach dem Hamilton'schen Principe, also der Gleichung 2), diese

$$\frac{da}{dt} = u, \quad \frac{db}{dt} = v, \quad \frac{dc}{dt} = w,$$

$$\frac{da'}{dt} = u', \quad \frac{db'}{dt} = v', \quad \frac{dc'}{dt} = w'$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} = \frac{\partial T}{\partial a} + X, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u'} = \frac{\partial T}{\partial a'} + X' \tag{15}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} = \frac{\partial T}{\partial b} + Y, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v'} = \frac{\partial T}{\partial b'} + Y'$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w} = \frac{\partial T}{\partial c} + Z, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w'} = \frac{\partial T}{\partial c'} + Z'.$$

Wir wollen nicht darauf ausgehen, diese Gleichungen unter speciellen Voraussetzungen über die Kräfte X, Y, Z, X', Y', Z' zu integriren, sondern aus ihnen die Werthe berechnen, die diese Kräfte haben müssen, damit die Kugeln in gewisser Weise sich bewegen; dabei werden wir nur den Fall ins Auge fassen, dass eine jede Kugel in gleichförmiger Bewegung begriffen ist, u, v, w, u', v', w' also Constanten sind. Wäre nur *eine* Kugel vorhanden, so würde diese gleichförmig sich bewegen, wenn *keine* Kraft auf sie wirkt; die Kräfte, deren Componenten $-X$, $-Y$, $-Z$ und $-X'$, $-Y'$, $-Z'$ sind, kann man daher als solche bezeichnen, die die beiden Kugeln auf einander ausüben. In Folge der Annahme, dass u, v, w, u', v', w' constant sind, dürfen wir in den Gleichungen 15) für T das durch 14) definirte V setzen. Macht man

$$P = -\pi R^3 R'^3 \left(u' \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial a} + v' \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial b} + w' \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial c} \right),$$

so ist

$$V = u \frac{\partial P}{\partial a} + v \frac{\partial P}{\partial b} + w \frac{\partial P}{\partial c}.$$

Da P von u unabhängig ist, folgt hieraus

$$\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{\partial P}{\partial a}$$

und dann weiter bei Rücksicht darauf, dass P eine Function von $a - a'$, $b - b'$, $c - c'$ ist,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial u} - \frac{\partial V}{\partial a} = -\frac{\partial}{\partial a}\left(u' \frac{\partial P}{\partial a} + v' \frac{\partial P}{\partial b} + w' \frac{\partial P}{\partial c} \right).$$

Dieser Ausdruck ist $= X$. Hiernach sind $-X$, $-Y$, $-Z$ die nach a, b, c genommenen partiellen Differentialquotienten von

$$- \pi R^3 R'^3 \left(u'^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a^2} + v'^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b^2} + w'^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c^2} \right.$$

$$\left. + 2v'w' \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b \partial c} + 2w'u' \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c \partial a} + 2u'v' \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a \partial b} \right)$$

und, wie durch eine ähnliche Rechnung sich ergiebt, $-X'$, $-Y'$, $-Z'$ die nach a', b', c' genommenen partiellen Differentialquotienten von

$$- \pi R^3 R'^3 \left(u^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a^2} + v^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b^2} + w^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c^2} \right.$$

$$\left. + 2vw \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b \partial c} + 2wu \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c \partial a} + 2uv \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a \partial b} \right).$$

Es ist bemerkenswerth, dass hiernach die Kraft, mit welcher die eine Kugel auf die andere wirkt, von der Geschwindigkeit der letzteren unabhängig ist, und dass daher die Kräfte, die die Kugeln auf einander ausüben, im Allgemeinen nicht gleich und entgegengesetzt sind. Es findet dieses nur statt, wenn die Geschwindigkeiten beider Kugeln von gleicher Grösse und gleicher oder entgegengesetzter Richtung sind. Es möge angeführt werden, dass die Kraft, die die zweite Kugel auf die erste ausübt, dieselbe Grösse und die entgegengesetzte Richtung als die Kraft hat, mit der ein magnetisches Molekül in der zweiten Kugel auf eines in der ersten wirkt, wenn die magnetischen Achsen beider parallel der Bewegungsrichtung der zweiten Kugel und ihre magnetischen Momente gleich den Producten der Geschwindigkeit dieser in

$$R^3 \sqrt{\pi} \quad \text{und} \quad R'^3 \sqrt{\pi}$$

sind.

Ist $R = R'$, $u = u'$, $v = v'$, und $w = -w'$, so dass Symmetrie in Bezug auf die xy-Ebene besteht, so bleiben die Flüssigkeitstheile, welche in einem Augenblick in dieser Ebene liegen, in derselben; man kann diese Ebene dann in eine feste Wand verwandeln, ohne die Bewegung zu stören. Dadurch kommt man auf den Fall einer Kugel, die in der Nähe einer ebenen Wand sich bewegt; die aufgestellten Formeln lehren die Kraft kennen, mit welcher die Wand auf die Kugel wirkt.

Es hat keine Schwierigkeit in ähnlicher Weise für den Fall, dass u, v, w, u', v', w' der Zeit nach veränderlich sind, die Kräfte zu berechnen, die die beiden Kugeln auf einander ausüben. Ist das geschehen, so kann man auch die mittlere Kraft finden, mit der eine Kugel, die kleine Schwingungen ausführt, auf eine andere, ruhende wirkt.

Zwanzigste Vorlesung.

(Wirbelbewegungen. Gerade und parallele Wirbelfäden. Bewegung mehrerer solcher Wirbelfäden von unendlich kleinen Querschnitten. Gerade Wirbelfäden, die einen Cylinder von elliptischem Querschnitt stetig erfüllen. Kreisförmige Wirbelfäden mit gemeinsamer Achse. Bewegung eines Wirbelringes und zweier Wirbelringe von unendlich kleinen Querschnitten.)

§ 1.

Wir haben bis jetzt nur Bewegungen einer incompressibeln Flüssigkeit betrachtet, bei denen für alle Theile derselben ein Geschwindigkeitspotential existirt; wir wollen jetzt annehmen, dass für gewisse Theile es ein solches nicht giebt, dass also, nach der im § 3 der fünfzehnten Vorlesung erklärten Ausdrucksweise, *Wirbelfäden* in der Flüssigkeit vorhanden sind. Wir werden voraussetzen, dass die Wirbelfäden ganz im Endlichen sich befinden, die Flüssigkeit den ganzen Raum erfüllt, in der Unendlichkeit ruht, und dass die Geschwindigkeiten u, v, w im Punkte (x, y, z) sich stetig mit x, y, z ändern. Bei den Differentialquotienten von u, v, w nach x, y, z wollen wir die Stetigkeit nicht voraussetzen, sondern endliche Sprünge derselben an Flächen als möglich ansehen.

Bezeichnen wir nun durch ξ, η, ζ die Componenten der Drehungsgeschwindigkeit im Punkte (x, y, z), so ist nach den Gleichungen 13) der fünfzehnten Vorlesung

$$\begin{aligned} 2\xi &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ 2\eta &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ 2\zeta &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \tag{1}$$

In Folge der Incompressibilität der Flüssigkeit haben wir ferner

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

Wir zeigen zunächst, dass u, v, w vollkommen bestimmt sind, wenn ξ, η, ζ überall gegeben sind. Gesetzt es gäbe zwei Werthsysteme von u, v, w, die den genannten Bedingungen genügen; ihre Unterschiede bezeichnen wir durch u', v', w'; dann ist

$$\frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} = 0,$$

d. h. es sind u', v', w' die partiellen Differentialquotienten nach x, y, z einer Function, die wir φ' nennen wollen; sie sind ferner im ganzen Raume stetig und in der Unendlichkeit gleich Null; für φ' ergiebt die Gleichung 2) die Differentialgleichung $\Delta\varphi' = 0$. Zur näheren Bestimmung der nur durch ihre Differentialquotienten definirten Function φ' können wir noch hinzusetzen, dass φ' überall stetig sein soll; es ist φ' dann auch einwerthig, da der Raum, den wir betrachten, ein einfach zusammenhängender ist. Nach einem im § 7 der sechszehnten Vorlesung bewiesenen Satze folgt hieraus aber, dass $\varphi' = \text{const.}$, also $u' = 0$, $v' = 0$, $w' = 0$ ist.

Setzt man

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \\ v &= \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \\ w &= \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}, \end{aligned} \tag{3}$$

wo U, V, W drei neue unbekannte Functionen bezeichnen, so wird die Gleichung 2) erfüllt; auch den Gleichungen 1) wird genügt, wenn

$$\Delta U = -2\xi, \quad \Delta V = -2\eta, \quad \Delta W = -2\zeta$$

und

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \tag{4}$$

ist. Die 3 ersten von diesen Gleichungen bestehen der Gleichung 11) der sechszehnten Vorlesung zufolge, wenn man

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2\pi}\int\frac{\xi\,d\tau}{r} \\ V &= \frac{1}{2\pi}\int\frac{\eta\,d\tau}{r} \\ W &= \frac{1}{2\pi}\int\frac{\zeta\,d\tau}{r} \end{aligned} \tag{5}$$

macht, wo $d\tau$ ein Element des von den Wirbelfäden erfüllten Raumes und r die Entfernung desselben von dem Punkte bedeutet, auf den U, V, W sich beziehen. Dabei sind U, V, W mit ihren ersten Differentialquotienten im ganzen Raume stetig und in der Unendlichkeit gleich Null, woraus dann folgt, dass auch u, v, w stetig sind und in der Unendlichkeit verschwinden. Dass auch die letzte der Gleichungen 4) erfüllt wird, lehrt die folgende Betrachtung. Aus den 3 ersten der Gleichungen 4) ergiebt sich

$$\Delta\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) = -2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right),$$

also in Folge der Gleichungen 1)

$$\Delta\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}\right)=0.$$

Die Function $\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}$ ist überdies im ganzen Raume stetig und verschwindet in der Unendlichkeit. Ihre Differentialquotienten nach x, y, z sind auch überall stetig, ausser etwa an der Oberfläche des von den Wirbelfäden erfüllten Raumes. Es soll bewiesen werden, dass sie auch hier keine Sprünge erfahren. Es sei ds ein Element dieser Oberfläche, n_i die innere, n_a die äussere Normale von ds; nach dem durch die Gleichung 10) der sechszehnten Vorlesung ausgesprochenen Satze ist dann

$$\frac{\partial^2 U}{\partial n_i \partial x}+\frac{\partial^2 U}{\partial n_a \partial x}=-2\xi\cos(n_i x)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial n_i \partial y}+\frac{\partial^2 V}{\partial n_a \partial y}=-2\eta\cos(n_i y)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial n_i \partial z}+\frac{\partial^2 W}{\partial n_a \partial z}=-2\zeta\cos(n_i z),$$

woraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial n_i}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial n_a}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}\right)$$
$$=-2\left(\xi\cos(n_i x)+\eta\cos(n_i y)+\zeta\cos(n_i z)\right).$$

Nach der im § 3 der fünfzehnten Vorlesung gegebenen Definition eines Wirbelfadens ist aber der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung gleich Null. Es erleidet daher

$$\frac{\partial}{\partial n_i}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}\right)$$

keinen Sprung an der Oberfläche des mit Wirbelfäden erfüllten Raumes. Nach einer im § 7 der sechszehnten Vorlesung gemachten Auseinandersetzung ergiebt sich hieraus die letzte der Gleichungen 4).

Hiermit ist bewiesen, dass, wenn für einen Augenblick ξ, η, ζ für alle Theile der Wirbelfäden gegeben sind, die Gleichungen 3) und 5) die Geschwindigkeiten u, v, w aller Flüssigkeitstheile für denselben Augenblick kennen lehren. Aus den Gleichungen

$$\frac{dx}{dt}=u,\quad \frac{dy}{dt}=v,\quad \frac{dz}{dt}=w$$

kann man dann weiter die Verrückungen finden, welche irgend ein Flüssigkeitstheilchen, also auch ein Element eines Wirbelfadens, in dem Zeitelement dt erleidet. Aus den Verrückungen aber, welche die Theile der Wirbelfäden in dieser Zeit erfahren, erlauben die im § 3 der fünfzehnten Vorlesung bewiesenen Sätze die entsprechenden

Aenderungen von ξ, η, ζ zu berechnen. Wenn ξ, η, ζ für die Zeit t gegeben sind, sind sie daher auch für die Zeit $t + dt$ bestimmt; die Bewegung der Flüssigkeit ist also vollkommen bestimmt, sobald für *einen* Augenblick ξ, η, ζ gegeben sind.

Die Gleichungen 3) und 5) zeigen, dass jedes Element der Wirbelfäden $d\tau$ gewisse Theile zu den Werthen der Geschwindigkeitscomponenten u, v, w beiträgt; diese Theile sind

$$\begin{aligned}
&\frac{d\tau}{2\pi}\left(\zeta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} - \eta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)\\
&\frac{d\tau}{2\pi}\left(\xi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} - \zeta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right) \qquad\qquad 6)\\
&\frac{d\tau}{2\pi}\left(\eta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} - \xi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right).
\end{aligned}$$

Sieht man diese Grössen als die Componenten einer Geschwindigkeit an, so ist die Richtung dieser senkrecht auf der Drehungsachse des Elementes $d\tau$ und senkrecht auf der Linie r; das erste folgt daraus, dass die Ausdrücke 6) mit ξ, η, ζ multiplicirt eine verschwindende Summe geben, das zweite daraus, dass dieselben Ausdrücke auch, wenn sie mit $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{\partial r}{\partial z}$ multiplicirt sind, die Summe Null haben. Die Grösse der resultirenden Geschwindigkeit ergiebt sich leicht

$$= \frac{d\tau}{2\pi}\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}\,\frac{\sin\vartheta}{r^2},$$

wenn ϑ den Winkel zwischen der Richtung der Drehungsachse von $d\tau$ und der Richtung der Linie r bezeichnet. Die Zweideutigkeit, die in Betreff der Richtung der Geschwindigkeit geblieben ist, hebt sich durch die Erwägung, dass diese Richtung stetig mit dem Orte sich ändert und in der Nähe des betrachteten Theiles des Wirbelfadens durch den Sinn der Drehung dieses bestimmt ist. Es möge erwähnt werden, dass die in Rede stehende Geschwindigkeit der Richtung und Grösse nach mit der Kraft übereinstimmt, welche ein Element eines elektrischen Stromes, das am Orte von $d\tau$ sich befindet und die Richtung der Drehungsachse hat, auf einen Magnetpol ausübt, dessen Coordinaten x, y, z sind.

Wir leiten noch einen merkwürdigen Ausdruck für die lebendige Kraft der Flüssigkeit ab. Bezeichnen wir dieselbe wieder durch T und setzen die Dichtigkeit der Flüssigkeit $= 1$, so ist

$$T = \tfrac{1}{2}\int d\tau\,(u^2 + v^2 + w^2), \qquad 7)$$

wo die Integration über einen Raum auszudehnen ist, der durch eine

geschlossene Fläche begrenzt ist, deren sämmtliche Punkte in der Unendlichkeit liegen. Welches die Gestalt dieser Fläche ist, ist in Bezug auf den Werth von T gleichgültig, wie die Rechnung zeigen wird, die wir durchführen wollen. Mit Hülfe der Gleichungen 3) giebt die Gleichung 7)

$$T = \frac{1}{2}\int d\tau \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) u + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) v + \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) w \right\}.$$

Jeden der 6 Theile, in welche dieses Integral sich zerlegen lässt, integrire man partiell nach x, y oder z; da U, V, W und u, v, w überall stetig sind und in der Unendlichkeit der Art unendlich klein werden, dass, wenn R die Entfernung des Punktes, auf den sie sich beziehen, von einem im Endlichen liegenden Punkte bezeichnet,

$$RU, \quad RV, \quad RW \quad \text{und} \quad R^2 u, \quad R^2 v, \quad R^2 w$$

nicht unendlich sind, wenn R es ist, so ergiebt sich dann

$$T = \frac{1}{2}\int d\tau \left\{ U \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + V \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + W \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{du}{dy} \right) \right\}$$

oder nach 1)

$$T = \int d\tau \, (U\xi + V\eta + W\zeta). \qquad 8)$$

Bezeichnet man durch $d\tau'$ ein zweites Volumenelement, durch ξ', η', ζ' die Werthe von ξ, η, ζ für dasselbe, und durch r den Abstand der Elemente $d\tau$ und $d\tau'$ von einander, so kann man in Folge der Gleichungen 5) hierfür auch schreiben

$$T = \frac{1}{2\pi}\iint \frac{d\tau \, d\tau'}{r} (\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta'). \qquad 9)$$

§ 2.

Bevor wir von den im vorigen § entwickelten Gleichungen eine Anwendung machen, wollen wir entsprechende Gleichungen für einen Fall ableiten, in dem die Rechnungen viel einfacher werden, als in dem dort behandelten, für den Fall nämlich, dass die Bewegung überall parallel *einer* Ebene, der xy-Ebene, und unabhängig von der z-Ordinate des betrachteten Punktes ist. Wir wollen uns vorstellen, dass die Flüssigkeit durch zwei der xy-Ebene parallele Wände begrenzt ist; zwischen diesen soll sie sich in die Unendlichkeit erstrecken und hier ruhen.

Unter den genannten Voraussetzungen ergeben die Gleichungen 1)

$$\xi = 0, \quad \eta = 0$$

und

$$2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \qquad 10)$$

Daraus folgt, dass die Wirbelfäden der z-Achse parallel sind. Da sie hiernach ihre Länge nicht ändern, so muss nach einem im § 3 der fünfzehnten Vorlesung bewiesenen Satze der Werth von ζ für irgend ein Flüssigkeitstheilchen der Zeit nach unveränderlich sein.

Sind für einen Augenblick die Werthe von ζ als Functionen von x und y gegeben, so findet man u und v für denselben Augenblick aus der Gleichung 10) und der Gleichung

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y},$$

welche die Bedingung der Incompressibilität ausspricht. Diese Gleichungen in Verbindung mit der Festsetzung, dass u und v überall stetig sind und in der Unendlichkeit verschwinden, bestimmen u und v eindeutig und ergeben

$$u = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial W}{\partial x}$$
$$W = -\frac{1}{\pi}\int \zeta \, df \lg \varrho, \tag{11}$$

wo df ein Element der xy-Ebene bedeutet, ζ auf dieses sich bezieht und ϱ die Entfernung desselben von dem Punkte (x, y) der xy-Ebene bezeichnet. Beide Behauptungen lassen sich leicht beweisen mit Hülfe der im § 9 der sechszehnten Vorlesung gemachten Auseinandersetzungen durch Betrachtungen, die denen ganz ähnlich sind, durch welche die entsprechenden im vorigen § bewiesen sind.

Hat man aus 11) u und v bestimmt, so findet man aus den Gleichungen

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v$$

bei Benutzung des Umstandes, dass ζ für jedes Flüssigkeitstheilchen ungeändert bleibt, die Bewegung des Theilchens, auf welches man x und y bezieht.

Die Gleichungen 11) zeigen, dass jeder Wirbelfaden, dessen Querschnitt df ist, gewisse Theile zu den Werthen von u und v beiträgt, nämlich die Theile

$$-\frac{1}{\pi}\frac{\zeta df}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\pi}\frac{\zeta df}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial x}.$$

Sieht man dieselben als die Componenten einer Geschwindigkeit an, so ist die Richtung dieser senkrecht auf der Linie ϱ und ihre Grösse ist

$$\frac{1}{\pi}\frac{\zeta df}{\varrho}.$$

Setzt man den Abstand der beiden, der xy-Ebene parallelen, die Flüssigkeit begrenzenden Wände $= 1$ und sucht einen Ausdruck

für die lebendige Kraft T auf einem Wege, der dem im vorigen § bei der Berechnung von T eingeschlagenen analog ist, so ergiebt sich T als unendlich; es sei denn, dass

$$\int \zeta \, df = 0$$

ist.

Wir definiren die Grössen x_0 und y_0 durch die Gleichungen

$$x_0 \int \zeta \, df = \int x \zeta \, df, \quad y_0 \int \zeta \, df = \int y \zeta \, df; \tag{12)}$$

bezeichnen wir ζ als die Dichtigkeit einer Masse, die auf dem Element df der xy-Ebene ausgebreitet ist, so werden x_0 und y_0 die Coordinaten des Schwerpunktes der ganzen vorhandenen Masse; wir wollen den Punkt, dessen Coordinaten x_0 und y_0 sind, den *Schwerpunkt der Wirbelfäden* nennen. Dieser Punkt verändert nicht seinen Ort, wie die folgende Betrachtung lehrt. Da ζ und df, bezogen auf dasselbe Flüssigkeitstheilchen, der Zeit nach unveränderlich sind, so folgt aus den Gleichungen 12)

$$\frac{dx_0}{dt} \int \zeta \, df = \int u \zeta \, df, \quad \frac{dy_0}{dt} \int \zeta \, df = \int v \zeta \, df.$$

Setzen wir hier für u und v ihre Werthe aus 11), so erhalten wir, wenn df' ein zweites Element der xy-Ebene und ϱ die Entfernung der Elemente df und df' von einander bedeutet,

$$\frac{dx_0}{dt} \int \zeta \, df = -\frac{1}{\pi} \int\int \zeta \zeta' \, df \, df' \frac{y - y'}{\varrho^2}$$

$$\frac{dy_0}{dt} \int \zeta \, df = \frac{1}{\pi} \int\int \zeta \zeta' \, df \, df' \frac{x - x'}{\varrho^2}.$$

Jedes dieser beiden Doppelintegrale ist $= 0$. Jedes Paar von Elementen der Fläche, über die zu integriren ist, kommt nämlich zweimal in ihm vor; einmal ist das erste Element für df, das zweite für df' zu setzen, und umgekehrt das andere Mal; bei der Vertauschung der gestrichenen und ungestrichenen Buchstaben nehmen die zu integrirenden Grössen aber die entgegengesetzten Werthe an, es heben sich daher paarweise die Elemente eines jeden der beiden Doppelintegrale auf. Daraus folgt

$$\frac{dx_0}{dt} = 0, \quad \frac{dy_0}{dt} = 0,$$

d. h. der Schwerpunkt der Wirbelfäden ändert seinen Ort mit der Zeit nicht.

§ 3.

Die im vorigen § entwickelten Sätze wollen wir nun auf den Fall anwenden, dass nur *ein* Wirbelfaden oder einige Wirbelfäden

von unendlich kleinem Querschnitt vorhanden sind. Wir nehmen zunächst an, dass nur *ein* solcher existirt und setzen für denselben

$$\int \zeta \, df = m\,; \tag{13}$$

dabei sehen wir m als endlich an; es muss dann ζ unendlich grosse Werthe haben. Wir setzen nicht voraus, dass ζ constant ist; aber sein Vorzeichen soll ζ nicht wechseln; der Schwerpunkt des Fadens liegt dann immer in oder unendlich nahe an seinem Querschnitt. Für alle Punkte, die in endlicher Entfernung von dem Wirbelfaden liegen, ist den Gleichungen 11) zufolge

$$u = \frac{\partial W}{\partial y}\,, \quad v = -\frac{\partial W}{\partial x}\,, \quad W = -\frac{1}{\pi}\, m \lg \varrho\,,$$

wo der Anfangspunkt von ϱ ein beliebiger Punkt des Querschnitts des Fadens ist. Unendlich nahe an und in dem Faden sind W, u, v im Allgemeinen unendlich gross und ihre Werthe sind von seinem Querschnitt und den Werthen, die ζ für die einzelnen Theilchen hat, abhängig; für den Schwerpunkt des Fadens sind aber nach dem am Ende des § 2 bewiesenen Satze u und $v = 0$. Insofern können wir sagen, dass der Wirbelfaden an seinem Orte bleibt, obwohl im Allgemeinen sein Querschnitt sich ändert und sein Schwerpunkt zu verschiedenen Zeiten in verschiedene Flüssigkeitstheilchen fällt; jedes Flüssigkeitstheilchen, das in endlicher Entfernung von ihm sich befindet, beschreibt um ihn einen Kreis mit der gleichbleibenden Geschwindigkeit

$$\frac{m}{\pi \varrho}\,.$$

Nun seien mehrere solche Wirbelfäden, wie wir eben einen uns gedacht haben, vorhanden; m_1, m_2, . . seien die Werthe des in 13) $= m$ gesetzten Integrals für dieselben; $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$ die Coordinaten ihrer Schwerpunkte zur Zeit t; $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ die Entfernungen dieser von dem Punkte (x, y); dann ist für alle Punkte, die in endlichen Entfernungen von den Wirbelfäden liegen,

$$u = \frac{\partial W}{\partial y}\,, \quad v = -\frac{\partial W}{\partial x}\,, \quad W = -\frac{1}{\pi} \sum m_1 \lg \varrho_1\,,$$

wo die Summe in Bezug auf den Index zu nehmen ist. Die Schwerpunkte der Wirbelfäden bewegen sich; diejenigen Theile von u und v für den Schwerpunkt eines Fadens, die von *diesem* Faden herrühren, sind aber Null; es ist daher, wenn wir u_1 und v_1 auf den Schwerpunkt des Fadens beziehen, für welchen der Index 1 gilt, vorausgesetzt, dass je zwei Fäden in endlicher Entfernung von einander sich befinden,

$$u_1 = \frac{\partial W_1}{\partial y_1}\,, \quad v_1 = -\frac{\partial W_1}{\partial x_1}\,, \quad W_1 = -\frac{1}{\pi}\left(m_2 \lg \varrho_{12} + m_3 \lg \varrho_{13} + \cdots\right),$$

wo ϱ_{12}, ϱ_{13}, . . die Entfernungen des Schwerpunktes des Fadens 1 von den Schwerpunkten der Fäden 2, 3, . . bedeuten. Die Gleichungen, welche nach dem Muster dieser gebildet werden können, lassen sich schreiben

$$\left.\begin{array}{c} m_1 \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial P}{\partial y_1}, \quad m_2 \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial P}{\partial y_2}, \quad . \; . \\ m_1 \frac{dy_1}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_1}, \quad m_2 \frac{dy_2}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_2}, \quad . \; . \\ P = -\frac{1}{\pi} \sum m_1 m_2 \lg \varrho_{12}, \end{array}\right\} \qquad 14)$$

wo die Summe in Bezug auf alle Combinationen je zweier verschiedener Indices zu nehmen ist.

Einige Integrale der Gleichungen 14) lassen sich finden, wie gross auch die Zahl der Wirbelfäden ist. Der Werth von P bleibt ungeändert, wenn x_1, x_2, . . oder y_1, y_2, . . um dieselbe Grösse vermehrt werden; daraus folgt

$$\sum \frac{\partial P}{\partial x_1} = 0 \quad \text{und} \quad \sum \frac{\partial P}{\partial y_1} = 0,$$

d. h.

$$\sum m_1 x_1 = \text{const.} \quad \text{und} \quad \sum m_1 y_1 = \text{const.} \qquad 15)$$

Diese Integrale lehren nichts Neues; sie sprechen den schon bewiesenen Satz aus, dass der gemeinsame Schwerpunkt der Wirbelfäden an seinem Orte bleibt.

Multiplicirt man die Gleichungen der ersten Horizontalreihe in 14) mit dy_1, dy_2, . ., die der zweiten mit $-dx_1$, $-dx_2$, . . und addirt dieselben, so erhält man

$$dP = 0, \quad \text{d. h.} \quad P = \text{const.} \qquad 16)$$

Ein viertes Integral findet man, wenn man statt der rechtwinkligen Coordinaten Polarcoordinaten einführt, durch die folgende Ueberlegung. Es sei

$$\begin{array}{ll} x_1 = \varrho_1 \cos \vartheta_1, & x_2 = \varrho_2 \cos \vartheta_2, \quad . \; . \\ y_1 = \varrho_1 \sin \vartheta_1, & y_2 = \varrho_2 \sin \vartheta_2, \quad . \; . \end{array}$$

Die Differentialgleichungen 14) gehen durch diese Substitutionen über in

$$\left.\begin{array}{c} m_1 \varrho_1 \frac{d\varrho_1}{dt} = \frac{\partial P}{\partial \vartheta_1}, \quad m_2 \varrho_2 \frac{d\varrho_2}{dt} = \frac{\partial P}{\partial \vartheta_2}, \quad . \\ m_1 \varrho_1 \frac{d\vartheta_1}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial \varrho_1}, \quad m_2 \varrho_2 \frac{d\vartheta_2}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial \varrho_2}, \quad . \end{array}\right\} \qquad 17)$$

Aus dem Umstande, dass P nach der in 14) gegebenen Definition ungeändert bleibt, wenn die Winkel ϑ_1, ϑ_2, . . um dieselbe Grösse wachsen, folgt

$$\sum \frac{\partial P}{\partial \vartheta_1} = 0;$$

die Gleichungen der oberen Horizontalreihe in 17) ergeben daher

$$\sum m_1 \varrho_1^2 = \text{const.} \tag{18}$$

Wir ziehen auch aus den Gleichungen der unteren Horizontalreihe in 17) einen Schluss. Werden, während die Winkel $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$ ungeändert bleiben, $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ in dem Verhältniss von $1:n$ vergrössert, also $\lg \varrho_1, \lg \varrho_2, \ldots$ um $\lg n$ vermehrt, so wachsen die Grössen ϱ_{12} auch in dem Verhältniss $1:n$, also die Grössen $\lg \varrho_{12}$ um $\lg n$; nach 14) wächst dann also P um

$$-\frac{1}{\pi} \lg n \cdot \sum m_1 m_2.$$

Daraus folgt

$$\sum \frac{\partial P}{\partial \lg \varrho_1} = -\frac{1}{\pi} \sum m_1 m_2$$

oder

$$\sum \varrho_1 \frac{\partial P}{\partial \varrho_1} = -\frac{1}{\pi} \sum m_1 m_2$$

und daher den Gleichungen 17) zufolge

$$\sum m_1 \varrho_1^2 d\vartheta_1 = \frac{dt}{\pi} \sum m_1 m_2. \tag{19}$$

Sind *drei* Wirbelfäden vorhanden, so kommt hiernach die Aufgabe, ihre Bewegung zu bestimmen, auf die Auflösung von Gleichungen und die Ausführung von Quadraturen zurück. Führt man nämlich als zu bestimmende Variable etwa $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \vartheta_2 - \vartheta_2, \vartheta_3 - \vartheta_1$ und ϑ_1 ein, multiplicirt die Gleichungen 15) einmal mit $\cos \vartheta_1, \sin \vartheta_1$, dann mit $-\sin \vartheta_1, \cos \vartheta_1$, und addirt sie jedesmal, so kann man durch Auflösung der so entstehenden Gleichungen und der Gleichungen 16) und 18) von den Variabeln $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \vartheta_2 - \vartheta_1, \vartheta_3 - \vartheta_1$ vier durch die fünfte ausdrücken. Gesetzt, es seien durch ϱ_1 die übrigen ausgedrückt; aus 19) und der Gleichung

$$m_1 \varrho_1 d\vartheta_1 = -\frac{\partial P}{\partial \varrho_1} dt,$$

welche in dem Systeme 17) vorkommt, kann man dann durch Quadraturen ϑ_1 und t als Functionen von ϱ_1 finden*).

Sehr leicht angebbar ist die Bewegung der Wirbelfäden, wenn deren nur *zwei* vorhanden sind. Man nehme den Schwerpunkt derselben zum Anfangspunkte der Coordinaten; dabei wird dann

$$\frac{d\vartheta_1}{dt} = \frac{d\vartheta_2}{dt},$$

die Gleichungen 16) und 18) ergeben

$$\varrho_1 = \text{const.}, \quad \varrho_2 = \text{const.}$$

*) Vergl. Gröbli, Inaugural-Dissertation, Göttingen 1877.

und aus 19) folgt

$$\frac{d\vartheta_1}{dt} = \frac{d\vartheta_2}{dt} = \frac{1}{\pi} \frac{m_1 m_2}{m_1 \varrho_1^2 + m_2 \varrho_2^2}. \qquad 20)$$

Mit der hierdurch bestimmten Winkelgeschwindigkeit drehen sich die beiden Wirbelfäden um ihren Schwerpunkt. Dabei ist

$$m_1 \varrho_1 \mp m_2 \varrho_2 = 0,$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem m_1 und m_2 von gleichem oder entgegengesetztem Vorzeichen sind, d. h. je nachdem die Wirbelfäden in gleichem oder entgegengesetzten Sinne rotiren. Aus 20) folgt daher

$$\varrho_1 \frac{d\vartheta_1}{dt} = \frac{1}{\pi} \frac{m_2}{\varrho_2 \pm \varrho_1}$$

$$\varrho_2 \frac{d\vartheta_2}{dt} = \frac{1}{\pi} \frac{m_1}{\varrho_1 \pm \varrho_2}.$$

Eine besondere Betrachtung verdient der Fall, dass

$$m_2 = - m_1$$

ist; der Schwerpunkt der Fäden liegt dann in der Unendlichkeit, ϱ_1 und ϱ_2 sind unendlich gross, aber die Differenz dieser Längen ist endlich und gleich dem Abstande der Fäden von einander. Die Bewegung der Fäden ist eine, bei der sie mit gleicher Geschwindigkeit senkrecht zu ihrer Verbindungslinie fortschreiten. Diese Geschwindigkeit ist

$$\varrho_1 \frac{d\vartheta_1}{dt} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\pi} \frac{m_2}{\varrho_2 - \varrho_1}.$$

Die Theilchen, welche zwischen den beiden Fäden liegen, bewegen sich in derselben Richtung, wie diese; die Theilchen, welche in der *Mitte* zwischen ihnen sich befinden, mit einer 4 mal so grossen Geschwindigkeit, als sie.

Die Flüssigkeitstheilchen, welche in einem Augenblicke in der Ebene liegen, welche den Abstand der beiden Fäden halbirt und senkrecht schneidet, bleiben in dieser Ebene. Die gedachte Bewegung der Flüssigkeit kann daher auch bestehen, wenn die genannte Ebene eine feste Wand ist; man kann dann die Flüssigkeit auf der einen Seite dieser sich fortdenken, und kommt so auf den Fall eines Wirbelfadens, der parallel einer, die Flüssigkeit begrenzenden, festen Wand fortschreitet.

§ 4.

Wir wollen nun noch die im § 2 abgeleiteten Gleichungen auf einen Fall anwenden, in dem die vorhandenen Wirbelfäden sich stetig an einander schliessen und einen Cylinder von endlichem Querschnitt bilden. Wir nehmen an, dass ζ denselben Werth für alle Punkte des Querschnitts hat und dass dieser in einem Augenblick eine

Ellipse ist; die Rechnung wird zeigen, dass allen Bedingungen des Problems dann durch die Annahme genügt wird, dass derselbe *immer* eine Ellipse ist, deren Achsen gleiche Längen behalten und mit gleichbleibender Geschwindigkeit sich drehen. Die Gleichung der Grenzlinie des Querschnitts zur Zeit t schreiben wir

$$F(x, y, t) = 0;$$

da diese Linie immer dieselben Flüssigkeitstheilchen enthält, so muss nach den bei der Gleichung 31) der zehnten Vorlesung gemachten Auseinandersetzungen für sie auch

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

oder bei Rücksicht auf die Gleichungen 11)

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{21}$$

sein. Nun setzen wir

$$F = a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 - 1,$$

wo a_{11}, a_{12}, a_{22} gewisse Functionen von t sind. Führen wir neben dem Coordinatensystem der x, y ein zweites, dass der x', y' ein, dessen Achsen in die Hauptachsen der in Rede stehenden Ellipse fallen, schreiben wir die Gleichung dieser

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

und setzen

$$x' = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta, \quad y' = -x \sin \vartheta + y \cos \vartheta, \tag{22}$$

so wird

$$\begin{aligned} a^2 b^2 a_{11} &= b^2 \cos^2 \vartheta + a^2 \sin^2 \vartheta \\ a^2 b^2 a_{12} &= (b^2 - a^2) \cos \vartheta \sin \vartheta \\ a^2 b^2 a_{22} &= b^2 \sin^2 \vartheta + a^2 \cos^2 \vartheta, \end{aligned} \tag{23}$$

wo ϑ von t abhängig ist, a und b aber constant sind. Was den, aus 11) zu bestimmenden Werth von W betrifft, so ist nach der in der Gleichung 10) der achtzehnten Vorlesung gemachten Angabe

$$W = \text{const.} - \frac{\zeta}{a+b} (b x'^2 + a y'^2)$$

für jeden Punkt im Innern der Wirbelfäden oder in ihrer Grenze. Man hat daher für diese Punkte

$$W = \text{const.} - \frac{\zeta}{a+b} (A_{11} x^2 + 2 A_{12} xy + A_{22} y^2),$$

wo

$$\begin{aligned} A_{11} &= b \cos^2 \vartheta + a \sin^2 \vartheta \\ A_{12} &= (b - a) \cos \vartheta \sin \vartheta \\ A_{22} &= b \sin^2 \vartheta + a \cos^2 \vartheta. \end{aligned} \tag{24}$$

Die Gleichung 21) ist hiernach nicht allein an der Grenze, sondern für alle Punkte des Querschnitts der Wirbelfäden erfüllt, falls ϑ so als Function von t bestimmt wird, dass den drei Gleichungen

$$(a+b)\frac{d a_{11}}{dt} = 4\zeta(a_{11}A_{12} - a_{12}A_{11})$$

$$(a+b)\frac{d a_{12}}{dt} = 2\zeta(a_{11}A_{22} - a_{22}A_{11})$$

$$(a+b)\frac{d a_{22}}{dt} = 4\zeta(a_{12}A_{21} - a_{22}A_{12})$$

Genüge geschieht. Die Gleichungen 23) und 24) zeigen nach leichter Rechnung, dass das der Fall ist, wenn

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 2\zeta\frac{ab}{(a+b)^2}$$

gemacht wird. Mit der hierdurch bestimmten Winkelgeschwindigkeit dreht sich der elliptische Cylinder, den die Wirbelfäden bilden, um seine Achse; dabei erfahren die Fäden aber auch relative Verschiebungen. Man findet diese, wenn man die auf dasselbe Flüssigkeitstheilchen bezogenen Coordinaten x', y' durch die Zeit ausdrückt. Durch eine Betrachtung, wie wir sie schon an die Gleichungen 2) der neunten Vorlesung zu knüpfen hatten, und bei Berücksichtigung des Umstandes, dass die Componenten der Geschwindigkeit nach den Achsen der x' und y'

$$\frac{\partial W}{\partial y'} \quad \text{und} \quad -\frac{\partial W}{\partial x'}$$

sind, folgt aus 22)

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{\partial W}{\partial y'} + y'\frac{d\vartheta}{dt}, \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial x'} - x'\frac{d\vartheta}{dt},$$

d. h.

$$\frac{dx'}{dt} = -\frac{2\zeta a^2}{(a+b)^2}y', \quad \frac{dy'}{dt} = \frac{2\zeta b^2}{(a+b)^2}x'.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$2\zeta\frac{ab}{(a+b)^2} = \lambda,$$

d. h. nennt man λ die Winkelgeschwindigkeit, mit der der betrachtete elliptische Cylinder sich dreht, so sind die Integrale dieser Gleichungen

$$x' = a\varkappa\cos(\lambda t + \mu), \quad y' = b\varkappa\sin(\lambda t + \mu),$$

wo $\varkappa$ und μ die Constanten der Integration sind und das Flüssigkeitstheilchen bestimmen, auf welches x' und y' sich beziehen; die erste von diesen muss ein echter Bruch sein, da die durchgeführte Rechnung nur für *die* Flüssigkeitstheile gilt, welche die Wirbelfäden bilden. Berechnet man x und y aus x' und y' mit Hülfe der

Gleichungen 22) und wählt den Anfangspunkt der Zeit so, dass ϑ und t gleichzeitig verschwinden, so ergiebt sich

$$x = a\varkappa \cos(\lambda t + \mu) \cos \lambda t - b\varkappa \sin(\lambda t + \mu) \sin \lambda t$$
$$y = a\varkappa \cos(\lambda t + \mu) \sin \lambda t + b\varkappa \sin(\lambda t + \mu) \cos \lambda t$$

oder

$$x = \frac{a+b}{2} \varkappa \cos(2\lambda t + \mu) + \frac{a-b}{2} \varkappa \cos \mu$$

$$y = \frac{a+b}{2} \varkappa \sin(2\lambda t + \mu) - \frac{a-b}{2} \varkappa \sin \mu .$$

Diese Gleichungen zeigen, dass ein jedes der betrachteten Flüssigkeitstheilchen sich in einem Kreise mit gleichbleibender Geschwindigkeit bewegt und einen Umlauf auf diesem in der Zeit $\frac{\pi}{\lambda}$ vollendet; die Radien und Mittelpunkte dieser Kreise sind für die verschiedenen Theilchen verschieden.

Ist eine von den Halbachsen a und b der Ellipse als unendlich gross gegen die andere zu betrachten, so verschwindet λ; die Linie, in welche die Ellipse sich dann verwandelt, erleidet also keine Drehung. Ist $a = b$, so wird $\lambda = \frac{\zeta}{2}$; die Theile des Kreises, in welchen die Ellipse dann übergeht, drehen sich ohne Veränderung ihrer relativen Lage um den Mittelpunkt mit der Winkelgeschwindigkeit ζ.

§ 5.

Es soll jetzt von den im § 1 entwickelten Gleichungen eine Anwendung auf den Fall gemacht werden, dass alle vorhandenen Wirbellinien Kreise sind, die zur gemeinschaftlichen Achse die z-Achse haben. Wenn dieser Zustand in einem Augenblicke besteht, so besteht er immer; setzt man

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

so ist Gestalt und Lage jeder Wirbellinie zu irgend einer Zeit durch die beiden Variabeln ϱ und z bestimmt; die Bahn eines Flüssigkeitstheilchens liegt in einer durch die z-Achse gehenden Ebene und ihre Gleichung ist eine Gleichung zwischen ϱ und z.

Macht man

$$x = \varrho \cos \vartheta, \quad y = \varrho \sin \vartheta,$$

so wird unter der genannten Annahme

$$\xi = -\sigma \sin \vartheta, \quad \eta = \sigma \cos \vartheta, \quad \zeta = 0,$$

wo σ nicht von ϑ abhängt. In Folge der letzten dieser Gleichungen und der letzten der Gleichungen 5) ist

$$W = 0,$$

also nach 3)

$$u = -\frac{\partial V}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{25}$$

Bezeichnet man durch $d\tau'$ ein Element des Volumens, durch σ', ϑ', ϱ', z' die Werthe von σ, ϑ, ϱ, z für dieses und durch r seine Entfernung von dem Punkte (ϑ, ϱ, z) oder (x, y, z), so folgt aus 5) weiter

$$U = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\sigma' \sin\vartheta' d\tau'}{r}, \quad V = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\sigma' \cos\vartheta' d\tau'}{r};$$

dabei hat man

$$d\tau' = \varrho' d\varrho' dz' d\vartheta'$$
$$r^2 = (z' - z)^2 + \varrho'^2 + \varrho^2 - 2\varrho'\varrho\cos(\vartheta' - \vartheta).$$

Führt man an Stelle von ϑ'

$$\varphi = \vartheta' - \vartheta$$

ein und bemerkt, dass in Bezug auf φ von 0 bis 2π integrirt werden kann, und dass

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi \, d\varphi}{\sqrt{(z' - z)^2 + \varrho'^2 + \varrho^2 - 2\varrho'\varrho\cos\varphi}} = 0$$

ist, so ergiebt sich

$$U = -S\sin\vartheta, \quad V = S\cos\vartheta, \tag{26}$$

wo S nicht von ϑ abhängig ist. Setzt man

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi \, d\varphi}{\sqrt{(z' - z)^2 + \varrho'^2 + \varrho^2 - 2\varrho'\varrho\cos\varphi}} = R(z' - z, \; \varrho', \varrho), \tag{27}$$

so wird

$$S = \frac{1}{2\pi}\int\int \sigma' \varrho' \, d\varrho' dz' R. \tag{28}$$

Bezeichnet man noch durch s die Componente der Geschwindigkeit nach der Richtung, in welcher ϱ wächst, d. h. macht man

$$u = s\cos\vartheta, \quad v = s\sin\vartheta,$$

so ergeben die Gleichungen 25) und 26) für die beiden zu bestimmenden Geschwindigkeitscomponenten s und w

$$s\varrho = -\frac{\partial(S\varrho)}{\partial z}, \quad w\varrho = \frac{\partial(S\varrho)}{\partial\varrho}. \tag{29}$$

Dabei ist für ein jedes Flüssigkeitstheilchen

$$s = \frac{d\varrho}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt}.$$

Für die lebendige Kraft der Flüssigkeit, T, findet man aus 8)

$$T = \int S\sigma\, d\tau$$

oder

$$T = 2\pi \int S\varrho\sigma\, df \tag{30}$$

oder auch

$$= \int\int R\varrho\varrho'\sigma\sigma'\, df\, df',$$

wo df und df' die Querschnitte der vorhandenen Wirbelfäden bezeichnen.

Was den Werth der Function R anbelangt, so findet man aus 27), wenn man

$$\varphi = \pi - 2\psi$$

setzt,

$$R = -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - 2\sin^2\psi)\, d\psi}{\sqrt{(z' - z)^2 + (\varrho' + \varrho)^2 - 4\varrho'\varrho\sin^2\psi}}$$

oder, wenn man

$$k^2 = \frac{4\varrho'\varrho}{(z' - z)^2 + (\varrho' + \varrho)^2}$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}}, \quad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}\, d\psi$$

macht,

$$R = \frac{2}{\sqrt{\varrho'\varrho}}\left(\left(\frac{2}{k} - k\right)K - \frac{2}{k}E\right). \tag{31}$$

Wir wollen nun Betrachtungen anstellen, die denjenigen entsprechen, welche wir im § 2 an die Gleichungen 12) geknüpft haben. Es beruhten diese wesentlich auf dem Umstande, dass die Function

$$\lg\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$$

die Eigenschaft besitzt, dass ihre nach x und y genommenen Differentialquotienten die entgegengesetzten Werthe annehmen, wenn man die gestrichenen Buchstaben mit den ungestrichenen vertauscht. Nun hat die durch 27) oder 31) definirte Function R die ähnliche Eigenschaft, dass $\frac{\partial R}{\partial z}$ den entgegengesetzten Werth erhält, wenn man die gestrichenen Buchstaben mit den ungestrichenen vertauscht; daraus folgt

$$0 = \int\int \varrho\varrho' \frac{\partial R}{\partial z}\sigma\sigma'\, df\, df'$$

oder bei Rücksicht auf die Gleichung, die durch Differentiation nach z aus 28) entsteht,

$$0 = \int \varrho \frac{\partial S}{\partial z} \sigma \, df.$$

Nach 29) lässt sich diese Gleichung schreiben

$$\int \varrho s \sigma \, df = 0 \quad \text{oder} \int \varrho \frac{d\varrho}{dt} \sigma \, df = 0$$

oder

$$\int \varrho^2 \sigma \, df = \text{const.}, \tag{32)}$$

da $\sigma \, df$ für jeden Wirbelfaden der Zeit nach unveränderlich ist.

Dieser Gleichung lässt eine zweite sich an die Seite stellen. Bildet man aus dem Werthe von k^2 den Ausdruck für $\lg k$ und differentiirt die so erhaltene Gleichung partiell nach ϱ und nach z, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{2}{k} \varrho \frac{\partial k}{\partial \varrho} &= \frac{(z' - z)^2 + \varrho'^2 - \varrho^2}{(z' - z)^2 + (\varrho' + \varrho)^2} \\ \frac{2}{k} z \frac{\partial k}{\partial z} &= \frac{2z(z' - z)}{(z' - z)^2 + (\varrho' + \varrho)^2}, \end{aligned} \tag{33)}$$

also

$$\frac{2}{k}\left(\varrho \frac{\partial k}{\partial \varrho} + z \frac{\partial k}{\partial z}\right) = \frac{z'^2 - z^2 + \varrho'^2 - \varrho^2}{(z' - z)^2 + (\varrho' + \varrho)^2}.$$

Da k bei der Vertauschung der gestrichenen und ungestrichenen Buchstaben sich nicht ändert, so ist hieraus zu schliessen, dass

$$\varrho \frac{\partial k}{\partial \varrho} + z \frac{\partial k}{\partial z}$$

bei dieser Vertauschung den entgegengesetzten Werth bekommt. Dieselbe Eigenschaft hat daher auch nach 31)

$$\frac{\partial R}{\partial k}\left(\varrho \frac{\partial k}{\partial \varrho} + z \frac{\partial k}{\partial z}\right)$$

oder, was dasselbe ist, da

$$\frac{\partial R}{\partial \varrho} = \frac{\partial R}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \varrho} - \frac{1}{2} \frac{R}{\varrho}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial z},$$

$$\varrho \frac{\partial R}{\partial \varrho} + z \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{1}{2} R.$$

Hieraus folgt

$$\iint \left(\varrho \frac{\partial R}{\partial \varrho} + z \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{1}{2} R\right) \varrho \varrho' \sigma \sigma' \, df \, df' = 0$$

oder bei Rücksicht auf die Gleichung 28)

$$\int \left(\varrho \frac{\partial S}{\partial \varrho} + z \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{1}{2} S\right) \varrho \sigma \, df = 0.$$

Da

$$\varrho \frac{\partial S}{\partial \varrho} = \frac{\partial (S \varrho)}{\partial \varrho} - S$$

ist, so lässt sich hierfür nach 29) und 30) auch schreiben

$$\int (w\varrho - sz)\,\varrho\sigma\,df = \frac{T}{4\pi}$$

oder endlich 34)

$$\int \left(\varrho \frac{dz}{dt} - z\frac{d\varrho}{dt}\right) \varrho\sigma\,df = \frac{T}{4\pi}\,.$$

Noch führen wir die Gleichung

$$T = \text{const.} \tag{35)}$$

an; sie spricht den Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft aus, der für den vorliegenden Fall gilt.

§ 6.

Wir wollen jetzt den Fall verfolgen, dass nur *ein* kreisförmiger Wirbelfaden von unendlich kleinem Querschnitt vorhanden ist. Die Dimensionen des Querschnitts seien von der Ordnung der unendlich kleinen Länge ε; wir setzen

$$m = \int \sigma\,df \tag{36)}$$

und nehmen m als endlich an; es ist dann σ, von dem wir voraussetzen, dass es überall dasselbe Vorzeichen hat, von der Ordnung von $\frac{1}{\varepsilon^2}$. Es seien ferner

$$\varrho = \varrho_0\,, \quad z = z_0$$

die Gleichungen einer Kreislinie, von der wir jetzt nur festsetzen, dass sie in dem Wirbelfaden oder unendlich nahe an ihm sich befindet, die wir später aber genauer bestimmen wollen. Für alle Punkte, die in endlicher Entfernung von dieser Kreislinie liegen, ist dann nach 28)

$$S\varrho = \frac{m}{2\pi}\,\varrho\varrho_0 R\,(z - z_0\,,\ \varrho,\ \varrho_0);$$

hieraus sind mit Hülfe von 29) und 31) für diese Punkte die Geschwindigkeiten s, w zu berechnen. r_0 und z_0 sind aber Functionen der Zeit; diese müssen gefunden werden, wenn die Bewegung irgend eines Flüssigkeitstheilchens ermittelt werden soll, und hierzu ist die Betrachtung solcher Punkte nöthig, die der Kreislinie $(\varrho_0,\ z_0)$ unendlich nahe, nämlich in dem Wirbelfaden liegen. Für solche Punkte sind S, s und w unendlich gross; wir wollen zusehen, von welchen Ordnungen sie es sind.

Der Gleichung 28) zufolge ist S im Innern des Wirbelfadens von derselben Grössenordnung, wie R für Werthe von ϱ, z, ϱ', z',

die zwei Kreislinien entsprechen, deren Abstand von der Ordnung von ε ist. Setzt man

$$k_1^2 = 1 - k^2 = \frac{(z'-z)^2 + (\varrho'-\varrho)^2}{(z'-z)^2 + (\varrho'+\varrho)^2},$$

so ist daher S von derselben Ordnung, wie R für einen Werth von k_1, der von der Ordnung von ε ist. Um diese zu finden, bemerken wir zunächst, dass, wenn k_1 unendlich klein ist, man bei Vernachlässigung von unendlich Kleinem

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \, d\psi = 1$$

hat; wir schreiben ferner

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\psi'} \frac{d\psi}{\sqrt{\cos^2\psi + k_1^2 \sin^2\psi}} + \int_0^{\psi'} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi + k_1^2 \cos^2\varphi}}$$

und nehmen ψ' als unendlich klein, aber gegen k_1 unendlich gross an. Bis auf unendlich Kleines richtig ist dann

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\psi'} \frac{d\psi}{\cos\psi} + \int_0^{\psi'} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2 + k_1^2}}.$$

Hieraus folgt

$$K = \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\psi'}{2}\right) + \lg \frac{\psi' + \sqrt{\psi'^2 + k_1^2}}{k_1}$$

d. h.

$$= -\lg \frac{\psi'}{2} + \lg \frac{2\psi'}{k_1},$$

also

$$K = \lg \frac{4}{k_1}.$$

Hiernach ist S im Innern des Wirbelfadens von der Ordnung von $\lg \varepsilon$; von derselben Ordnung ist nach 30) auch die lebendige Kraft T.

Um die Grössenordnungen von s und w aus den Gleichungen 29) und 28) ermitteln zu können, müssen wir noch die Ordnungen von $\frac{\partial R}{\partial \varrho}$ und $\frac{\partial R}{\partial z}$, also die Ordnung von $\frac{\partial R}{\partial k}$ für ein unendlich kleines k_1 aufsuchen. Aus den Gleichungen, welche K und E definiren und der Gleichung

$$0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - 2\sin^2\psi + k^2 \sin^4\psi}{(1 - k^2 \sin^2\psi)^{\frac{3}{2}}} \, d\psi,$$

welche aus der identischen Gleichung

$$d \frac{\sin\psi \cos\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}} = \frac{1 - 2\sin^2\psi + k^2 \sin^4\psi}{(1 - k^2 \sin^2\psi)^{\frac{3}{2}}} \, d\psi$$

sich ergiebt, findet man leicht

$$\frac{dK}{dk} = \frac{E - k_1^2 K}{k k_1^2}, \quad \frac{dE}{dk} = -\frac{K - E}{k}.$$

Es folgt hieraus, dass, wenn k_1 unendlich klein ist, $\frac{\partial R}{\partial k}$ von der Ordnung von $\frac{1}{k_1^2}$ wird; da nach 33) $\frac{\partial k}{\partial \varrho}$ und $\frac{\partial k}{\partial z}$ von der Ordnung von k_1 sind, so werden $\frac{\partial R}{\partial \varrho}$ und $\frac{\partial R}{\partial z}$ von der Ordnung von $\frac{1}{k_1}$. Innerhalb des Wirbelringes ist k_1 von der Ordnung von ε; die Gleichungen 29) und 28) führen daher zu dem Schlusse, dass hier die Geschwindigkeiten s und w von der Ordnung von $\frac{1}{\varepsilon}$ sind.

Wir setzen jetzt genauer die Bedeutung der Zeichen ϱ_0, z_0 fest, die bereits eingeführt, aber noch nicht vollständig definirt sind. Es soll das durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varrho_0^2 \int \sigma\, df &= \int \varrho^2 \sigma\, df \\ z_0 \int \varrho^2 \sigma\, df &= \int z \varrho^2 \sigma\, df \end{aligned} \tag{37}$$

geschehen. Da, wie wir vorausgesetzt haben, σ überall dasselbe Vorzeichen besitzt, so liegt dann, wie es sein sollte, der Kreis (ϱ_0, z_0) in dem Wirbelfaden oder ihm unendlich nahe. Aus 32) und dem schon mehrfach benutzten Umstande, dass $\sigma\, df$ mit der Zeit sich nicht ändert, folgt dabei, dass auch ϱ_0 der Zeit nach unveränderlich ist. Die Grösse z_0 aber ändert sich mit der Zeit; wir wollen untersuchen, wie. Aus den Gleichungen 37) und 36) folgt

$$m \varrho_0^2 z_0 = \int z \varrho^2 \sigma\, df$$

und daraus weiter

$$m \varrho_0^2 \frac{dz_0}{dt} = \int \varrho^2 \frac{dz}{dt} \sigma\, df + 2\int z \varrho \frac{d\varrho}{dt} \sigma\, df.$$

Die Gleichung 34) lässt sich hiernach schreiben

$$m \varrho_0^2 \frac{dz_0}{dt} = \frac{T}{4\pi} + 3\int z \varrho \frac{d\varrho}{dt} \sigma\, df. \tag{38}$$

Das erste Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung ist, wie wir gesehen haben, constant und unendlich gross von der Ordnung von $\lg \varepsilon$; das zweite Glied ist endlich, wie aus der Gleichung 32) in Verbindung mit der Thatsache hervorgeht, dass die Unterschiede der Werthe, welche z in ihm erhält, von der Ordnung von ε, die Werthe von $\frac{d\varrho}{dt}$ aber von der Ordnung von $\frac{1}{\varepsilon}$ sind. Daraus folgt, dass $\frac{dz_0}{dt}$ unendlich gross von der Ordnung von $\lg \varepsilon$ und, falls man

Endliches gegen Grössen von dieser Ordnung vernachlässigt, constant ist.

Der Wirbelfaden behält daher denselben Radius, schreitet aber in der Richtung der z-Achse mit der Geschwindigkeit $\frac{dz_0}{dt}$ fort. Diese Geschwindigkeit hat dasselbe Vorzeichen wie m oder σ; es folgt das aus der Gleichung 38), da T eine positive Grösse ist. Diesen Satz wollen wir noch in anderer Weise aussprechen. Nach den bei den Ausdrücken 6) gemachten Auseinandersetzungen fliesst die Flüssigkeit durch alle Theile der durch den Wirbelfaden begrenzten Kreisfläche, welche in endlicher Entfernung von diesem sich befinden, in der Richtung der z-Achse oder der entgegengesetzten Richtung je nach dem Vorzeichen von σ. Aus der am Anfange des § 5 für σ gegebenen Definition folgt, dass in Punkten, für welche der dort mit ϑ bezeichnete Winkel $= 0$ ist, $\sigma = \eta$ wird; und aus der Festsetzung, die über eine *positive* Drehung im § 2 der fünften Vorlesung (Seite 47) gemacht und ohne Ausnahme beibehalten ist, dass in der genannten Kreisfläche die Bewegung die Richtung der z-Achse hat, falls η für $\vartheta = 0$ positiv ist. Daraus ergiebt sich, dass der Wirbelfaden in *derselben* Richtung fortschreitet, in der die Flüssigkeit in der durch ihn begrenzten Kreisfläche strömt.

Diese Resultate sind zuerst von Helmholtz abgeleitet in seiner Abhandlung: Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen (Borchardt's Journal Bd. 55). Er schliesst dieselbe mit den folgenden Bemerkungen.

„Es lässt sich nun auch im Allgemeinen übersehen, wie sich zwei ringförmige Wirbelfäden, deren Achse dieselbe ist, gegen einander verhalten werden, da jeder abgesehen von seiner eigenen Fortbewegung auch der Bewegung der Wassertheilchen folgt, die der andere hervorbringt. Haben sie gleiche Rotationsrichtung, so schreiten sie beide in gleichem Sinne fort, und es wird der vorangehende sich erweitern, dann langsamer fortschreiten, der nachfolgende sich verengern und schneller fortschreiten, schliesslich bei nicht zu differenten Fortpflanzungsgeschwindigkeiten den andern einholen, durch ihn hindurchgehen. Dann wird sich dasselbe Spiel mit dem andern wiederholen, so dass die Ringe abwechselnd einer durch den andern hindurchgehen.

„Haben die Wirbelfäden gleiche Radien, gleiche und entgegengesetzte Rotationsgeschwindigkeiten, so werden sie sich einander nähern, und sich gegenseitig erweitern, so dass schliesslich, wenn sie sich sehr nahe gekommen sind, ihre Bewegung gegen einander immer schwächer wird, die Erweiterung dagegen mit wachsender Geschwindigkeit geschieht. Sind die beiden Wirbelfäden ganz symmetrisch, so ist in der Mitte zwischen beiden die der Achse parallele Geschwin-

digkeit der Wassertheilchen gleich Null. Man kann sich hier also eine feste Wand angebracht denken, ohne die Bewegung zu stören und erhält so den Fall eines Wirbelringes, der gegen eine feste Wand anläuft.

„Ich bemerke noch, dass man diese Bewegungen der kreisförmigen Wirbelringe in der Natur leicht studiren kann, indem man eine halb eingetauchte Kreisscheibe, oder die ungefähr halbkreisförmig begrenzte Spitze eines Löffels schnell eine kurze Strecke längs der Oberfläche der Flüssigkeit hinführt, und dann schnell herauszieht. Es bleiben dann halbe Wirbelringe in der Flüssigkeit zurück, deren Achse in der freien Oberfläche liegt. Die freie Oberfläche bildet also eine durch die Achse gelegte Begrenzungsebene der Wassermasse, wodurch an den Bewegungen nichts Wesentliches geändert wird. Die Wirbelringe schreiten fort, erweitern sich, wenn sie gegen eine Wand laufen, und werden durch andere Wirbelringe erweitert oder verengert, ganz wie wir es aus der Theorie abgeleitet haben.“

Einundzwanzigste Vorlesung.

(Functionen eines complexen Arguments. Ihre Anwendung, um mögliche Flüssigkeitsbewegungen zu finden. In den kleinsten Theilen ähnliche Abbildung eines ebenen Flächenstückes auf einem andern. Lineare Functionen. Mehrwerthige Functionen. Abbildung einer Sichel auf einer andern.)

§ 1.

Eine sehr interessante Klasse von Flüssigkeitsbewegungen ist diejenige, zu welcher die *Flüssigkeitsstrahlen* gehören, wie sie etwa bei dem Ausfluss von Wasser sich bilden. Bis jetzt ist es nicht gelungen, eine solche Bewegung in dem Falle durch Rechnung zu bestimmen, dass das Geschwindigkeitspotential, dessen Existenz vorausgesetzt werden soll, von den 3 Coordinaten x, y, z abhängig ist; man kann das aber unter der Annahme, dass das Geschwindigkeitspotential nur eine Function von x und y ist. Die Vereinfachung, die durch diese Annahme bei hydrodynamischen Problemen hervorgebracht wird, haben wir schon in der vorigen Vorlesung an einem Beispiel kennen gelernt. Der hauptsächlichste Grund dieser Vereinfachung liegt darin, dass die partielle Differentialgleichung, der das Geschwindigkeitspotential genügt,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

erfüllt wird durch den reellen oder auch den imaginären Theil irgend einer Function des complexen Arguments $x + iy$.

Man setze

$$z = x + iy,$$

bilde irgend einen analytischen Ausdruck von z, der Z genannt werden möge, und der ausser reellen Grössen neben z auch i enthalten kann; man transformire diesen nach den für reelle Grössen geltenden Rechnungsregeln, indem man i wie eine unbekannte reelle Constante behandelt, dabei aber

$$i^2 = -1$$

setzt. Bekanntlich lässt sich dadurch Z auf die Form

$$Z = X + iY$$

bringen, wo X und Y reelle Functionen von x und y sind. Man

nennt z und Z complexe Grössen, x und X ihre reellen, iy und iY ihre imaginären Theile, Z eine Function von z. Zwei complexe Grössen heissen einander gleich, wenn sowohl ihre reellen, als ihre imaginären Theile einander gleich sind; die positiv zu nehmende Wurzel

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

heisst der Modul von z.

Bei der angegebenen Bedeutung der Zeichen ist

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{dZ}{dz}, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = i \frac{dZ}{dz}, \quad \text{also } i \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial y},$$

d. h.

$$i \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y} + i \frac{\partial Y}{\partial y},$$

mithin

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = - \frac{\partial X}{\partial y}. \qquad 1)$$

Diese beiden Gleichungen können wir als eine Definition, die allgemeiner als die vorher angeführte ist, dafür ansehen, dass Z eine Function von z ist. Aus ihnen folgt

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0$$

und auch

$$\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial y} = 0,$$

welche Gleichung ausspricht, dass die Linien $X =$ const. und die Linien $Y =$ const. sich senkrecht schneiden.

Nach den gemachten Auseinandersetzungen findet man eine mögliche Flüssigkeitsbewegung, wenn man für Z einen beliebigen Ausdruck in z annimmt und das Geschwindigkeitspotential φ einer der beiden Grössen X und Y gleichsetzt. Die andere von diesen hat dann auch eine einfache Bedeutung; nennt man sie ψ, so ist nämlich

$$\psi = \text{const.}$$

die Gleichung der Stromlinien.

Wir wollen einige einfache Beispiele betrachten. Wir setzen zuerst

$$Z = \lg z, \quad \text{also} \quad z = e^Z.$$

Macht man

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta,$$

so folgt hieraus

$$r (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = e^X (\cos X + i \sin Y)$$

oder

$$X = \lg r, \quad Y = \vartheta,$$

wo unter $\lg r$ der reelle Werth dieser Grösse zu verstehen ist. Wir haben daher entweder

$$\varphi = \lg r \quad \text{und} \quad \psi = \vartheta$$

oder

$$\varphi = \vartheta \quad \text{und} \quad \psi = \lg r.$$

Im ersten Fall sind die Stromlinien die nach dem Punkte $z = 0$ gerichteten Geraden, die Linien gleichen Geschwindigkeitspotentials die um diesen Punkt beschriebenen Kreise; im zweiten findet das Umgekehrte statt. In beiden Fällen ist die Geschwindigkeit $= \frac{1}{r}$. Immer können zwei Stromlinien in feste Wände verwandelt werden, ohne dass die Bewegung zwischen ihnen eine Aenderung erleidet; die aufgestellten Formeln gelten also auch, wenn zwei von dem Punkte $z = 0$ ausgehende Gerade oder zwei um diesen Punkt als Mittelpunkt beschriebene Kreise feste Wände sind.

Um ein zweites Beispiel zu erhalten, setzen wir

$$Z = \lg \frac{z - c_1}{z - c_2},$$

wo c_1 und c_2 zwei complexe Constanten bedeuten. Macht man

$$c_1 = a_1 + ib_1, \quad c_2 = a_2 + ib_2$$

und

$$x - a_1 = r_1 \cos \vartheta_1, \qquad x - a_2 = r_2 \cos \vartheta_2$$

$$y - b_1 = r_1 \sin \vartheta_1, \qquad y - b_2 = r_2 \sin \vartheta_2,$$

so folgt daraus

$$X = \lg \frac{r_1}{r_2}, \quad Y = \vartheta_1 - \vartheta_2.$$

Nehmen wir $\varphi = X$, $\psi = Y$ an, so sind die Stromlinien, wie elementare geometrische Betrachtungen lehren, die Kreisbögen, welche die Punkte $z = c_1$ und $z = c_2$ mit einander verbinden. Aus dem einen dieser beiden Punkte strömt die Flüssigkeit aus, in den andern strömt sie ein. Die Linien gleichen Geschwindigkeitspotentials sind die Kreise, welche über dem Abstand zweier Punkte als Durchmesser beschrieben sind, die zu den Punkten $z = c_1$ und $z = c_2$ harmonisch liegen. Irgend zwei Stromlinien, z. B. die beiden Theile *eines* durch diese Punkte gelegten Kreises, können feste Wände sein. Setzen wir umgekehrt $\varphi = Y$, $\psi = X$, so vertauschen die beiden Systeme von Kreisen ihre Rollen.

Wir kommen auf einen speciellen Fall der in der siebenzehnten Vorlesung behandelten Strömungen, wenn wir

$$Z = \arcsin z, \quad \text{also} \quad z = \sin Z$$

setzen. Es wird dann

$$x = \sin X \frac{e^Y + e^{-Y}}{2}$$

$$y = \cos X \frac{e^Y - e^{-Y}}{2}.$$

Daraus folgt

$$\frac{x^2}{\sin^2 X} - \frac{y^2}{\cos^2 X} = 1$$

$$\frac{4x^2}{(e^Y + e^{-Y})^2} + \frac{4y^2}{(e^Y - e^{-Y})^2} = 1.$$

Die Gleichungen $X = \text{const.}$ und $Y = \text{const.}$ stellen hiernach zwei Systeme confocaler Hyperbeln und Ellipsen dar, deren Brennpunkte die Coordinaten $x = \pm 1$, $y = 0$ haben.

§ 2.

Wir haben in den Gleichungen 1) des vorigen § dafür, dass $X + iY$ oder Z eine Function von $x + iy$ oder z ist, eine Definition aufgestellt, welche nicht voraussetzt, dass ein analytischer Ausdruck für Z gegeben ist. Von dieser ausgehend, wollen wir nun beweisen, dass, wenn Z eine Function von z, auch umgekehrt z eine Function von Z ist. Wir setzen

$$\begin{aligned} M^2 &= \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 \\ &= \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}, \end{aligned} \qquad 2)$$

welche Ausdrücke in Folge der Gleichungen 1) alle einander gleich sind. Durch Auflösung der identischen Gleichungen

$$1 = \frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x} \qquad 0 = \frac{\partial y}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial x}{dX}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y} \qquad 1 = \frac{\partial y}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y}$$

erhält man dann

$$\frac{\partial x}{\partial X} = \frac{1}{M^2}\frac{\partial X}{\partial x} \qquad \frac{\partial y}{\partial X} = -\frac{1}{M^2}\frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial x}{\partial Y} = -\frac{1}{M^2}\frac{\partial X}{\partial y} \qquad \frac{\partial y}{\partial Y} = \frac{1}{M^2}\frac{\partial Y}{\partial y},$$

und hieraus folgt bei Rücksicht auf die Gleichungen 1)

$$\frac{\partial x}{\partial X} = \frac{\partial y}{\partial Y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial x}{\partial Y} = -\frac{\partial y}{\partial X},$$

wodurch die ausgesprochene Behauptung bewiesen ist.

Sind $Z = X + iY$ und $Z' = X' + iY'$ Functionen von z, so ist auch ZZ' eine Function von z. Es ist nämlich

$$ZZ' = XX' - YY' + i(XY' + X'Y);$$

ferner ist

$$\frac{\partial(XX' - YY')}{\partial x} = X\frac{\partial X'}{\partial x} + X'\frac{\partial X}{\partial x} - Y\frac{\partial Y'}{\partial x} - Y'\frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(XY' + X'Y)}{\partial y} = X\frac{\partial Y'}{\partial y} + X'\frac{\partial Y}{\partial y} + Y\frac{\partial X'}{\partial y} + Y'\frac{\partial X}{\partial y}$$

$$\frac{\partial(XX' - YY')}{\partial y} = X\frac{\partial X'}{\partial y} + X'\frac{\partial X}{\partial y} - Y\frac{\partial Y'}{\partial y} - Y'\frac{\partial Y}{\partial y}$$

$$\frac{\partial(XY' + X'Y)}{\partial x} = X\frac{\partial Y'}{\partial x} + X'\frac{\partial Y}{\partial x} + Y\frac{\partial X'}{\partial x} + Y'\frac{\partial Y}{\partial x}$$

und hieraus folgt mit Hülfe der Gleichungen 1) und der Gleichungen

$$\frac{\partial X'}{\partial x} = \frac{\partial Y'}{\partial y}, \quad \frac{\partial Y'}{\partial x} = -\frac{\partial X'}{\partial y}:$$

$$\frac{\partial(XX' - YY')}{\partial x} = \frac{\partial(XY' + X'Y)}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial(XY' + X'Y)}{\partial x} = -\frac{\partial(XX' - YY')}{\partial y}.$$

Wir fassen jetzt den Differentialquotienten

$$\frac{dZ}{dz} \text{ d. h. } \frac{dX + i\,dY}{dx + i\,dy}$$

ins Auge; derselbe ist

$$= \frac{\left(\frac{\partial X}{\partial x} + i\frac{\partial Y}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial X}{\partial y} + i\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dy}{dx + i\,dy}$$

oder nach 1)

$$= \frac{\partial X}{\partial x} + i\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Er ist daher von dx und dy unabhängig, eine Function von x und y. Er ist eine Function von z, wie man sieht, wenn man die Gleichungen 1) partiell nach x differentiirt.

Wenn in einem endlichen Stücke der xy-Ebene Z eine einwerthige stetige Function von z ist, d. h. X und Y einwerthige, stetige Functionen von x und y sind, die den Gleichungen 1) genügen, so ist, wie wir nun zeigen wollen, auch $\frac{dZ}{dz}$ eine einwerthige stetige Function von z in demselben Gebiete. Es seien X und Y zwei einwerthige stetige Functionen von x und y für einen Theil der xy-Ebene, deren Element df genannt werden möge; dl sei ein Element der Grenzlinie dieses Theiles, n die nach seinem Innern gerichtete Normale von dl. Nach einem vielfach benutzten Satze ist dann

$$\left.\begin{aligned}\int df\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)&=-\int dl\Big(X\cos(nx)-Y\cos(ny)\Big)\\ \int df\left(\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial x}\right)&=-\int dl\Big(X\cos(ny)+Y\cos(nx)\Big).\end{aligned}\right\}\quad 3)$$

Diese Gleichungen transformiren wir zunächst dadurch, dass wir statt der beiden Winkel (nx) und (ny) *einen* einführen. Die Drehung einer Linie bezeichnen wir als positiv, wenn sie in dem Sinne geschieht, in dem die x-Achse um einen rechten Winkel gedreht werden muss, damit sie in die y-Achse fällt, und nennen ν den Winkel, um den eine Linie in positivem Sinne gedreht werden muss, um aus einer Lage, in der sie der x-Achse parallel ist, in eine zu kommen, in der sie parallel der Normale n ist; man hat dann

$$\cos(nx)=\cos\nu,\quad \cos(ny)=\sin\nu.$$

Diese Werthe von $\cos(nx)$ und $\cos(ny)$ setzen wir in die Gleichungen 3), nehmen an, dass Z, d. h. $X+iY$, eine Function von z, d. h. $x+iy$, ist, wodurch ihre linken Seiten verschwinden, multipliciren die zweite mit i und addiren sie zur ersten; wir erhalten dann

$$0=\int Z\,dl\,(\cos\nu+i\sin\nu).$$

Wir bezeichnen nun durch dz den Zuwachs, den z erleidet, wenn der Punkt (xy), oder der Punkt z, wie wir sagen wollen, das Element dl in *der* Richtung durchläuft, welche die Normale n erhält, wenn sie in negativem Sinne um einen rechten Winkel gedreht wird; es ist dann

$$\left.\begin{aligned}dz&=dl\left(\cos\left(\nu-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\nu-\frac{\pi}{2}\right)\right)\\ &=-i\,dl\,(\cos\nu+i\sin\nu),\end{aligned}\right\}\quad 4)$$

woraus folgt

$$0=\int Z\,dz. \qquad 5)$$

Es sei

$$c=a+ib,$$

wo a und b die Coordinaten eines Punktes der Fläche bezeichnen, deren Element df genannt ist; in der Gleichung 5) setzen wir, was erlaubt ist,

$$\frac{Z}{z-c}\text{ an Stelle von }Z,$$

und wenden sie an auf jene Fläche mit Ausschluss eines Kreises, der mit dem unendlich kleinen Radius r um den Punkt c als Mittelpunkt beschrieben ist; für die Peripherie dieses Kreises ist

$$z-c=r\,(\cos\nu+i\sin\nu)$$

und daher nach 4)

$$\frac{dz}{z-c} = -i\frac{dl}{r},$$

also

$$\int \frac{Z}{z-c}\,dz = -i2\pi Z_c,$$

wo Z_c den Werth von Z im Punkte c bedeutet. Daraus folgt endlich

$$Z_c = \frac{1}{i2\pi}\int \frac{Z}{z-c}\,dz, \qquad 6)$$

wo die Integration über die Grenzlinie des ursprünglich gedachten Gebietes von z in dem bei 4) angegebenen Sinne auszudehnen ist. Diesen Sinn wollen wir noch auf eine andere Weise definiren. Man denke sich auf die xy-Ebene so gestellt, dass, wenn man in der Richtung der positiven x-Achse hinblickt, die Richtung der positiven y-Achse nach *links* geht; der Sinn der Integration ist dann derjenige, in dem man die Theile der Grenze des Gebietes von z durchwandern muss, um dieses zur *Linken* zu haben. Es lässt sich das noch anders ausdrücken, wenn das Gebiet von z eine *einfach zusammenhängende* Fläche ist, d. h. eine solche, die vollständig begrenzt ist durch *eine* in sich zurückkehrende, sich nicht schneidende Linie. Denken wir uns von einem Punkte einer solchen ebenen Fläche eine gerade Linie nach einem Punkte der Grenze gezogen und lassen den letzteren einen *Umlauf* auf der Grenze in dem einen oder dem andern Sinne ausführen, so erleidet die gerade Linie eine Drehung um 2π in positivem oder negativem Sinne; wir wollen den Umlauf einen *positiven* nennen, wenn bei ihm die Linie um 2π in positivem Sinne gedreht wird. Die Integration in 6) ist dann so zu nehmen, dass sie einem positiven Umlaufe entspricht. Ist das Gebiet von z nicht eine einfach zusammenhängende Fläche, sondern besteht seine Grenze aus mehreren geschlossenen Linien, so kann man dasselbe in eine einfach zusammenhängende Fläche durch *Querschnitte* verwandeln, d. h. durch Linien, von denen jede zwei Punkte zweier geschlossenen Grenzlinien verbindet; die beiden Seiten eines jeden Querschnitts hat man dann als zur Grenze des Gebietes gehörig zu betrachten. Dadurch wird das in 6) vorkommende Integral nicht geändert, da $\frac{Z}{z-c}$ eine einwerthige stetige Function von z ist, so lange nicht $z = c$ wird.

Die Gleichung 6), die wir auch aus der Gleichung 28) der sechszehnten Vorlesung hätten ableiten können, beweist die ausgesprochene Behauptung, dass $\frac{dZ}{dz}$ in demselben Gebiete, wie Z, eine einwerthige stetige Function von z ist.

Wir knüpfen nun noch eine Folgerung an die Gleichung 5). Es sei Z eine einwerthige stetige Function von z in einem einfach zusammenhängenden Theile der z-Ebene. Von einem Punkte desselben z_0 oder (x_0, y_0) denken wir uns nach einem zweiten Punkte z in ihm eine beliebige Linie gezogen und betrachten das Integral

$$\int Z\,dz = W = U + iV,$$

genommen über die Linie in dem Sinne von z_0 nach z. Ersetzen wir die Linie durch irgend eine andere, die von z_0 nach z führt, so können wir auf die von beiden begrenzte Fläche die Gleichung 5) anwenden; sie ergiebt, dass für die zweite Linie W denselben Werth hat, wie für die erste, dass also W unabhängig ist von der gewählten Linie; es ist also W eine Function von x und y. Es ist W eine Function von z; denn man hat

$$U = \int_{x_0, y_0}^{x, y} (X\,dx - Y\,dy)$$

$$V = \int_{x_0, y_0}^{x, y} (X\,dy + Y\,dx)$$

und hieraus folgt

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = X, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -Y.$$

§ 3.

Wir haben x und y als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes in einer Ebene bezeichnet; wir wollen ebenso X und Y als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes in einer andern Ebene ansehen. Es soll Z eine Function von z, also auch z eine Function von Z sein; in den einander entsprechenden Gebieten von z und Z, die wir betrachten, soll Z eine einwerthige stetige Function von z, und z eine einwerthige stetige Function von Z sein. Nach einem im vorigen § bewiesenen Satze ist dann auch $\frac{dZ}{dz}$ eine einwerthige stetige Function von z, und $\frac{dz}{dZ}$ eine solche von Z; keiner dieser beiden Differentialquotienten wird daher unendlich und jeder von ihnen also weder Null, noch unendlich. Wir setzen

$$\frac{dZ}{dz} = M(\cos\vartheta + i\sin\vartheta);$$

M, der Modul des genannten Differentialquotienten, ist dann die positive, durch die Gleichungen 2) bestimmte Grösse; M und ϑ

sind, da $\frac{dZ}{dz}$ von dx und dy unabhängig ist, Functionen von x und y. Die aufgestellte Gleichung giebt

$$dX + i\,dY = M(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)(dx + i\,dy),$$

d. h.

$$\begin{aligned} dX &= M(\cos\vartheta\cdot dx - \sin\vartheta\cdot dy)\\ dY &= M(\sin\vartheta\cdot dx + \cos\vartheta\cdot dy). \end{aligned} \tag{7}$$

Nehmen wir an, dass die Z-Ebene und die z-Ebene mit einer materiellen Ebene, die X-Achse mit der x-Achse, die Y-Achse mit der y-Achse zusammenfällt und betrachten x, y als die Coordinaten eines materiellen Punktes in *einem* Zustande der Ebene X, Y als die Coordinaten desselben materiellen Punktes in einem *veränderten* Zustande der Ebene, so haben wir in den Gleichungen 7) einen speciellen Fall der in der zehnten Vorlesung discutirten Gleichungen; die Gleichungen 7) lehren die Veränderung kennen, die ein unendlich kleiner Theil der Ebene erfahren hat, und zeigen, dass diese besteht: in einer Verschiebung, in einer Drehung in positivem Sinne um den Winkel ϑ, und in einer, in allen Richtungen gleichen Dilatation, bei der alle linearen Dimensionen in dem Verhältniss von $1 : M$ vergrössert sind. Wir schliessen daraus, dass ein unendlich kleiner Theil der materiellen Ebene sich selbst *ähnlich* geblieben ist. Die Veränderung, welche er erfahren hat, dürfen wir uns als continuirlich und so hervorgebracht vorstellen, dass M weder Null, noch unendlich wurde; ist sie in dieser Weise vor sich gegangen, so ist der Sinn eines positiven Umlaufs um den betrachteten Theil, wenn dieser ein einfach zusammenhängender ist, dabei nicht unbestimmt geworden und nicht sprungweise geändert, er ist also derselbe geblieben. Lassen wir nun die Vorstellung fallen, dass die z- und Z-Ebenen mit einer materiellen Ebene zusammenfallen, so bleibt doch gültig, dass entsprechende, unendlich kleine Theile derselben einander ähnlich sind, und dass positive Umläufe um diese, wenn sie einfach zusammenhängend sind, einander entsprechen.

Betrachten wir entsprechende, *endliche* Stücke der beiden Ebenen, so sind diese im Allgemeinen nicht einander ähnlich; dieselben sind aber in *allen* ihren kleinsten Theilen ähnlich; sie sind durch die zwischen Z und z angenommene Beziehung, wie man sagt, *in den kleinsten Theilen ähnlich auf einander abgebildet.* Den Punkten der Grenze des einen Stückes entsprechen ausschliesslich die Punkte der Grenze des andern; einem Punkte im Innern des einen kann nämlich nicht ein Punkt in der Grenze des andern entsprechen, da einem unendlich kleinen Kreise, dessen Mittelpunkt jener ist, ein unendlich kleiner Kreis, dessen Mittelpunkt dieser ist, entsprechen muss. Ist das eine Stück durch eine in sich zurückkehrende Linie vollständig begrenzt,

d. h. ist es einfach zusammenhängend, so muss es auch das andere sein. Einem positiven Umlauf um das eine Stück entspricht ein positiver Umlauf um das andere.

§ 4.

Der Voraussetzung, dass Z und z einwerthige, stetige Functionen von einander sind, wird ohne Beschränkung ihrer Gebiete genügt, wenn man die eine einer ganzen linearen Function der andern gleichsetzt.

Lässt man die X-Achse mit der x-Achse, die Y-Achse mit der y-Achse zusammenfallen und sieht man, wie wir früher es thaten, X, Y und x, y als die Coordinaten desselben materiellen Punktes der xy-Ebene in zwei verschiedenen Zuständen dieser an, so entspricht die Gleichung

$$Z = a + ib + z$$

einer Verschiebung der Ebene um a parallel der x-Achse und um b parallel der y-Achse, die Gleichung

$$Z = (\cos\alpha + i\sin\alpha)\,z,$$

aus der

$$X = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$

$$Y = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

folgt, stellt eine Drehung der Ebene um den Winkel α dar; die Gleichung

$$Z = mz,$$

wo m eine positive Constante bedeutet, eine Ausdehnung der Ebene, bei der alle Linien in dem Verhältniss $1 : m$ vergrössert sind und ihre Richtungen behalten haben, der Punkt $z = 0$ an seinem Orte geblieben ist. In allen diesen Fällen, also immer, wenn Z eine ganze lineare Function von z ist, sind auch *endliche* entsprechende Gebiete dieser beiden Variabeln einander ähnlich.

Macht man Z einer *gebrochenen* linearen Function von z gleich, also

$$Z = \frac{\alpha + \beta z}{\gamma + \delta z}, \quad z = -\frac{\alpha - \gamma Z}{\beta - \delta Z}, \tag{8}$$

wo α, β, γ, δ complexe Constanten bedeuten, so sind ebenfalls Z und z durchaus einwerthige Functionen von einander; aber sie sind nicht überall stetig; wenn $\gamma + \delta z = 0$, ist Z, und wenn $\beta - \delta z = 0$, ist z unendlich, also unstetig. Um die Sätze anwenden zu können, die wir unter der Voraussetzung abgeleitet haben, dass Z und z einwerthige und stetige Functionen von einander sind, wollen wir das Gebiet von z durch zwei geschlossene Linien begrenzen, von denen

die eine unendlich klein ist und den Punkt $\gamma + \delta z = 0$ umgiebt, die andere unendlich gross ist. Das Gebiet von Z ist dann auch durch eine unendlich kleine und eine unendlich grosse geschlossene Linie begrenzt, von denen die kleine der grossen Grenzlinie des z-Gebietes und umgekehrt entspricht.

Bei der durch die Gleichungen 8) angegebenen Beziehung zwischen z und Z entspricht jeder Kreislinie in der z-Ebene wiederum eine Kreislinie in der Z-Ebene. Um diese Behauptung zu beweisen, führen wir zwei neue Variable, z' und Z', ein, indem wir

$$z = a + bz', \quad Z = A + BZ'$$

setzen und wählen die complexen Constanten a, b, A, B so, dass die Gleichungen 8) ergeben

$$Z' = \frac{1}{z'} \cdot$$

Um die Gleichungen zu finden, denen gemäss zu diesem Zwecke a, b, A, B zu bestimmen sind, brauchen wir nur auszudrücken, dass von den Grössen z' und Z' die eine verschwindet, wenn die andere unendlich ist, und dass, wenn die eine $= 1$ wird, die andere denselben Werth erhält; daraus folgt

$$\beta - A\delta = 0$$
$$\gamma + a\delta = 0$$
$$\alpha + a\beta = Bb\delta.$$

Diesen Gleichungen gemäss lassen sich a, b, A, B immer wählen, sobald nur nicht $\delta = 0$ ist. Diesen Fall aber, in dem Z eine *ganze* lineare Function von z ist, können wir ausschliessen, da für ihn die zu beweisende Behauptung im Früheren schon bewiesen ist. Einer Kreislinie in der z'-Ebene entspricht aber eine Kreislinie in der Z'-Ebene; denn, ist

$$z' = x' + iy', \quad Z' = X' + iY',$$

so hat man

$$X' + iY' = \frac{1}{x' + iy'} = \frac{x' - iy'}{x'^2 + y'^2},$$

also

$$X' = \frac{x'}{x'^2 + y'^2}, \quad Y' = -\frac{y'}{x'^2 + y'^2}$$

und

$$x' = \frac{X'}{X'^2 + Y'^2}, \quad y' = -\frac{Y'}{X'^2 + Y'^2};$$

besteht zwischen x' und y' die Gleichung

$$a_1(x'^2 + y'^2) + a_2 x' + a_3 y' + a_4 = 0,$$

so ergiebt sich hieraus zwischen X' und Y' die Gleichung

$$a_1 + a_2 X' - a_3 Y' + a_4(X'^2 + Y'^2) = 0;$$

d. h. einer Kreislinie in der z'-Ebene entspricht eine Kreislinie in der Z'-Ebene. Da nun nach dem Früheren einer Kreislinie in der z-Ebene eine Kreislinie in der z'-Ebene und einer Kreislinie in der Z'-Ebene wieder eine Kreislinie in der Z-Ebene entspricht, so entspricht auch jeder Kreislinie in der z-Ebene eine Kreislinie in der Z-Ebene.

In den Relationen 8), welche die Beziehung zwischen z und Z feststellen, kommen 3 von einander unabhängige, complexe Constanten vor, nämlich die Verhältnisse von $\alpha : \beta : \gamma : \delta$, da diese 4 Grössen mit *einer* Constanten multiplicirt werden können, ohne dass jene Beziehung geändert wird. Diese 3 Constanten können aus 3 linearen Gleichungen so bestimmt werden, dass 3 beliebigen Punkten der z-Ebene, a, b, c, drei beliebige Punkte der Z-Ebene, A, B, C, paarweise entsprechen; es entsprechen sich dann auch die Kreislinien, welche durch a, b, c und A, B, C gelegt werden können. Wir wollen die Kreisflächen, welche durch diese Kreislinien begrenzt sind, f und F nennen. Dieselben entsprechen sich, falls in f nicht der Punkt $\gamma + \delta z = 0$ liegt; dann ist nämlich f ein einfach zusammenhängender Theil des Gebietes von z, und diesem muss ein einfach zusammenhängender Theil des Gebietes von Z entsprechen. Liegt aber der Punkt $\gamma + \delta z = 0$ innerhalb der Fläche f, so entsprechen sich f und F nicht, sondern jede dieser Flächen entspricht der *Ergänzungsfläche* der andern, wenn wir als Ergänzungsfläche von f den Theil des Gebietes von z bezeichnen, der nach Ausschluss von f übrig bleibt; man muss dann nämlich aus der Fläche f einen unendlich kleinen Theil, der den Punkt $\gamma + \delta z = 0$ enthält, ausschliessen, um aus ihr einen Theil des Gebietes von z zu bilden; die Grenze dieses unendlich kleinen Theiles entspricht aber einer unendlich grossen geschlossenen Linie in der Z-Ebene. Es ist ersichtlich, dass diese Schlüsse auch gelten, wenn f und F zwei irgendwie gestaltete, einfach zusammenhängende Theile der z- und Z-Ebene sind, deren Grenzlinien einander entsprechen. Ob diese Flächen sich selbst oder ihren Ergänzungsflächen entsprechen, entscheidet man am leichtesten mit Hülfe der folgenden Betrachtung. In dem Falle, dass der Punkt $\gamma + \delta z = 0$ innerhalb f liegt, verwandle man durch einen Querschnitt die doppelt zusammenhängende Fläche, welche f nach Ausschluss eines unendlich kleinen, den Punkt $\gamma + \delta z = 0$ enthaltenden Theiles bildet, in eine einfach zusammenhängende, und lege den entsprechenden Querschnitt in der Ergänzungsfläche von F. Erinnert man sich nun an den Satz, dass, wenn z und Z einwerthige stetige Functionen von einander sind, entsprechende Umläufe um entsprechende, einfach zusammenhängende Flächen von gleichem Vorzeichen sind, und nennt a, A, b, B, c, C entsprechende Punkte der Grenzlinien von f und F, so sieht man ein, dass diese Flächen

selbst sich entsprechen, wenn $abca$ und $ABCA$ Umläufe um sie von gleichem Vorzeichen sind, und dass im entgegengesetzten Falle die Flächen f und F ihren Ergänzungsflächen entsprechen.

Die Kreislinien, die durch zwei Punkte a, b der z-Ebene gehen, entsprechen in der Z-Ebene Kreislinien, welche durch die entsprechenden Punkte A, B gehen und unter denselben Winkeln sich schneiden, da die eine Ebene in den kleinsten Theilen ähnlich auf der andern abgebildet wird. Rückt der Punkt B in die Unendlichkeit, so werden die durch A gehenden Kreise zu geraden Linien. Wir wollen eine Fläche, die durch zwei Kreisbögen begrenzt ist, eine *Sichel* nennen, und die Fläche, in welche eine Sichel übergeht, wenn die eine ihrer beiden Spitzen in die Unendlichkeit rückt, einen *Keil*. Die Gleichungen 8) erlauben hiernach eine beliebige Sichel in der z-Ebene auf einer beliebigen Sichel von *gleichem Winkel* in der Z-Ebene so abzubilden, dass den Spitzen jener a, b die Spitzen dieser A, B und ausserdem zwei beliebig gewählte Punkte der Umfänge, c und C, sich entsprechen, vorausgesetzt, dass die Punkte c und C so gewählt sind, dass die Umläufe um die Sicheln $abca$ und $ABCA$ von gleichem Vorzeichen sind. Ein specieller Fall dieser Abbildung ist die Abbildung einer Sichel auf einem Keile von gleichem Winkel.

§ 5.

Wir haben im vorigen § angenommen, dass Z und z unbeschränkt einwerthige Functionen von einander sind; wir wollen nun annehmen, das zwischen diesen beiden Variabeln eine Beziehung festgesetzt sei, in Folge deren Z und z im Allgemeinen mehrwerthige stetige Functionen von einander sind. Es werden diese sich aber wie einwerthige verhalten, d. h. jedem Punkte des Gebietes von z wird *ein* Punkt des Gebietes von Z und umgekehrt entsprechen, wenn diese beiden Gebiete passend eingeschränkt sind.

Es sei z_0 ein Werth von z oder, wie wir auch sagen wollen, ein Punkt der z-Ebene. Gehören zu diesem mehrere Werthe von Z oder mehrere Punkte der Z-Ebene, so wählen wir von diesen einen, Z_0, aus. Den Punkten in der Nähe von z_0 ordnen wir Punkte in der Nähe von Z_0 zu. Einem hinreichend kleinen Gebiete von z, das den Punkt z_0 enthält, entspricht dann ein in den kleinsten Theilen ähnliches Gebiet von Z, das den Punkt Z_0 enthält, gerade so, als ob wir es mit unbeschränkt einwerthigen Functionen zu thun hätten; das Verhältniss entsprechender, unendlich kleiner Dimensionen ist überall durch den Modul von $\frac{dZ}{dz}$ bestimmt. Nun erweitern wir allmählich die Grenzen der beiden Gebiete, indem wir unendlich kleine Theile der z-Ebene auf der Z-Ebene, oder umgekehrt, ähnlich und

in dem durch den genannten Modul bestimmten Verhältnisse abbilden. Wir vermeiden dabei die Punkte, in denen $\frac{dZ}{dz}$ Null oder unendlich ist, und in denen daher auch dieses Verhältniss Null oder unendlich sein würde. Es kann eintreten, dass, während das Gebiet von z durch eine in sich zurückkehrende, sich nicht schneidende Linie begrenzt ist, die dieser entsprechende Linie der Z-Ebene sich selbst schneidet; es fallen dann zwei Theile des Gebietes von Z übereinander und z hat aufgehört eine einwerthige Function von Z zu sein; so lange der genannte Fall nicht eingetreten ist, ist z eine einwerthige Function von Z. Wir ziehen hieraus den folgenden Schluss:

Wenn das Gebiet von z keinen Punkt enthält, für den $\frac{dZ}{dz}$ Null oder unendlich ist, wenn es begrenzt ist durch eine geschlossene, sich nicht schneidende Linie, und die dieser entsprechende Linie der Z-Ebene sich nicht schneidet, so begrenzt diese Linie ein Gebiet von Z, dessen Punkte eindeutig den Punkten des Gebietes von z entsprechen; es sind dann Z und z in den genannten Gebieten einwerthige Functionen von einander. Die Grenzen des Gebietes von z können dabei Punkten, in denen $\frac{dZ}{dz}$ Null oder unendlich ist, unendlich nahe gerückt sein; in dem hierdurch bestimmten Sinne kann man sagen, dass solche Punkte in der Grenzlinie des Gebietes liegen können.

Wir führen einige hierher gehörige Abbildungen an, von denen wir Gebrauch zu machen haben werden.

Zuerst nehmen wir

$$Z = z^n \tag{9}$$

an, wo n eine reelle Constante bedeutet. Setzen wir

$$X = R\cos\theta \qquad x = r\cos\vartheta$$
$$Y = R\sin\theta \qquad y = r\sin\vartheta,$$

so folgt aus dieser Gleichung

$$R = r^n \qquad \theta = n\vartheta.$$

Einem Kreise r = const. entspricht ein Kreis R = const., einer Geraden ϑ = const. eine Gerade θ = const. Denken wir uns das z-Gebiet durch 2 Kreise r = const. und 2 Gerade ϑ = const. begrenzt, so sind die Grenzen des Z-Gebietes 2 Kreise R = const. und 2 Gerade θ = const. Von den Kreisen können die kleineren unendlich klein, die grösseren unendlich gross gewählt werden; die beiden Gebiete werden dann 2 Keile von ungleichen Winkeln. Sind diese Winkel α und A, so ist

$$A = n\alpha;$$

es entsprechen sich z und Z eindeutig, wenn keiner der Winkel α und A grösser als 2π ist. Da

$$\frac{dZ}{dz} = n z^{n-1},$$

so ist $\frac{dZ}{dz}$ für $z = 0$ Null oder unendlich, je nachdem n grösser oder kleiner als 1 ist.

Nun wollen wir ableiten, wie eine Sichel auf einer anderen von verschiedenem Winkel so abgebildet werden kann, dass die Spitzen derselben einander entsprechen und zwei beliebig gewählte Punkte ihrer Umfänge. Dabei ist vorausgesetzt (und in ähnlichen Fällen werden wir stillschweigend voraussetzen), dass die Punkte der Umfänge, die einander entsprechen sollen, so gewählt sind, dass entsprechende Umläufe um die in Rede stehenden Flächen von gleichem Vorzeichen sind. Während zwischen z und Z die Gleichung 9) besteht, setzen wir

$$z = k\,\frac{z' - c_1}{z' - c_2} \quad \text{und} \quad Z = K\,\frac{Z' - C_1}{Z' - C_2}\,. \tag{10}$$

Dadurch werden die beiden Keile, welche die Gebiete von z und Z wieder bilden sollen, resp. auf zwei Sicheln von den Winkeln α und A in den Ebenen der z' und Z' abgebildet, deren Spitzen die Punkte $z' = c_1$, $z' = c_2$, $Z' = C_1$, $Z' = C_2$ sind. Die complexen Constanten k und K können so gewählt sein, dass zwei entsprechende, sonst beliebige Punkte der Keilumfänge zwei beliebig angenommenen Punkten der Sichelumfänge entsprechen. Eliminirt man aus den Gleichungen 9) und 10) z und Z und setzt

$$N = \frac{K}{k^n},$$

so erhält man

$$N\,\frac{Z' - C_1}{Z' - C_2} = \left(\frac{z' - c_1}{z' - c_2}\right)^{\frac{A}{\alpha}}; \tag{11}$$

hierdurch sind die beiden Sicheln auf einander abgebildet so, dass die Spitzen einander entsprechen und die Punkte, die auf ihren Umfängen beliebig angenommen waren. An den Spitzen ist $\frac{dZ'}{dz'}$ Null oder unendlich, je nachdem A grösser oder kleiner als α ist.

Wir wollen nun zeigen, wie zwei Sicheln von verschiedenem Winkel so auf einander abgebildet werden können, dass 3 beliebigen Punkten des Umfangs der einen 3 beliebige Punkte des Umfangs der andern entsprechen. Wir wollen annehmen, dass die Sichel in der Z'-Ebene, auf die sich die Gleichung 11) bezieht, ein voller Kreis, also

$$A = \pi$$

ist; irgend 2 Punkte des Umfanges können als ihre Spitzen angesehen werden. Lassen wir dann noch bei den Zeichen z' und Z' die Striche fort, so erhalten wir

$$N \frac{Z - C_1}{Z - C_2} = \left(\frac{z - c_1}{z - c_2}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}. \tag{12}$$

Bestimmt man die Constanten N_1, C_1, C_2 in dieser Gleichung so, dass drei beliebige Punkte des Umfanges der Sichel in der z-Ebene dreien in der Z-Ebene angenommenen Punkten entsprechen, so ist durch dieselbe jene Sichel auf der Fläche des Kreises abgebildet, dessen Umfang durch diese 3 Punkte geht. Wir führen nun wieder eine neue Variable z' ein und denken uns in der z'-Ebene eine Sichel, deren Spitzen die Punkte $z' = c_1'$ und $z' = c_2'$ sind, und deren Winkel α' ist; wir setzen dann

$$N' \frac{Z - C_1'}{Z - C_2'} = \left(\frac{z' - c_1'}{z' - c_2'}\right)^{\frac{\pi}{\alpha'}} \tag{13}$$

und bestimmen die Constanten N', C_1', C_2' so, dass drei beliebige Punkte des Umfanges dieser Sichel denjenigen Punkten der Z-Ebene entsprechen, die bereits bei der Betrachtung der Sichel in der z-Ebene angenommen sind. Die beiden Sicheln sind dann auf denselben Kreis, also auch auf einander abgebildet, und zwar so, dass die 3 Punkte, die auf dem Umfange der einen willkürlich angenommen sind, den 3 Punkten entsprechen, die auf dem Umfange der andern willkürlich gewählt sind. Die Gleichung zwischen z und z', welche dieses leistet, erhält man, wenn man Z aus 12) und 13) eliminirt; durch dieselbe wird eine der beiden Grössen

$$\left(\frac{z - c_1}{z - c_2}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \left(\frac{z' - c_1'}{z' - c_2'}\right)^{\frac{\pi}{\alpha'}} \tag{14}$$

als eine gebrochene lineare Function der andern ausgedrückt; die 3 Constanten, welche in dieser Function vorkommen, finden ihre Bestimmung durch die 3 Paare von Punkten, welche einander entsprechen sollen.

Wir werden den Fall zu betrachten haben, dass die eine von den beiden Sicheln in einen durch zwei parallele Gerade begrenzten Streifen übergegangen ist, und wollen daher diesen Fall noch erörtern. Wir wollen annehmen, dass

$$-c_1 = c_2 = m(\cos\gamma + i \sin\gamma)$$

ist; dabei bezeichnet dann m den halben Abstand der Spitzen der in der z-Ebene gedachten Sichel, γ einen Winkel, welchen die Verbindungslinie der Spitzen mit der x-Achse bildet. Es seien ferner die Längen

der beiden, die Sichel begrenzenden Kreisbögen, in Theilen ihrer Radien ausgedrückt, $2u$ und $2v$, so dass

$$v - u = \alpha$$

ist; endlich sei b die *Breite* der Sichel, d. h. der Abstand der Schnittpunkte ihres Umfanges mit der Verbindungslinie der Mittelpunkte der Kreise, deren Theile die Sichel begrenzen. Es ergiebt sich dann durch sehr einfache geometrische Betrachtungen

$$b = m\left(\operatorname{tg}\frac{v}{2} - \operatorname{tg}\frac{u}{2}\right). \qquad 15)$$

Fig. 10.



Die Sichel verwandelt sich in einen Streifen der bezeichneten Art, wenn man m unendlich gross, v und u, mithin auch α, unendlich klein werden lässt; die Breite, b, des Streifens ergiebt sich dann aus 15)

$$b = \frac{m\alpha}{2}$$

und γ ist ein Winkel, den die Längsrichtung des Streifens mit der x-Achse bildet. Bezeichnet man noch den gemeinschaftlichen, unendlich grossen Werth von $-c_1$ und c_2 durch c, so erhält man für

$$\left(\frac{z - c_1}{c_2 - z}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}},$$

welcher Ausdruck sich von dem ersten der in 14) angegebenen Ausdrücke durch einen constanten Factor, nämlich den Factor $(-1)^{\frac{\pi}{\alpha}}$ unterscheidet,

$$\left(\frac{z - c_1}{c_2 - z}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} = \left(1 + 2\frac{z}{c}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}},$$

$$= \left(1 + \frac{\alpha}{\pi}\frac{2\pi}{\alpha c}z\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Lässt man nun α verschwinden, während αc einen constanten Werth behält, so folgt hieraus, wie die Entwickelung nach dem binomischen Lehrsatz zeigt,

$$\left(\frac{z - c_1}{c_2 - z}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} = e^{\frac{2\pi z}{\alpha c}}$$

$$= e^{\frac{\pi z}{b}(\cos\gamma - i\sin\gamma)}. \qquad 16)$$

Zweiundzwanzigste Vorlesung.

(Flüssigkeitsstrahlen. Strahl, der aus einem Gefässe von gewisser Gestalt austritt. Strahl, der eine ebene Wand trifft. Ebene Wand in einem Strome von unendlicher Breite. Druck, den diese Wand erleidet.)

§ 1.

Bei einer stationären Bewegung einer incompressibeln Flüssigkeit, bei der ein Geschwindigkeitspotential, φ, existirt und äussere Kräfte nicht wirken, ist der Gleichung 20) der fünfzehnten Vorlesung zufolge

$$p = C - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right), \qquad 1)$$

wo p den Druck, C eine Constante bezeichnet und die Dichtigkeit der Flüssigkeit $= 1$ gesetzt ist. Es nimmt hiernach der Druck ab, wenn die Geschwindigkeit wächst, und es müsste jener $-\infty$ werden, wenn diese ∞ wird. Erfahrungsmässig kann der Druck in einer Flüssigkeit aber nicht unter einen gewissen negativen Werth sinken, ohne dass die Flüssigkeit zerreisst und dadurch eine gewisse Discontinuität der Bewegung hervorgebracht wird. Hierauf beruht es, dass Wasser z. B. einen *Strahl* bildet, wenn es aus der Oeffnung eines Gefässes in ruhendes Wasser fliesst. Wir haben bisher angenommen, dass die Geschwindigkeit überall stetig mit dem Orte sich ändert; wir wollen nun diese Voraussetzung aufgeben und es als möglich ansehen, dass in Flächen Flüssigkeitstheilchen an einander grenzen, die verschiedene Geschwindigkeiten besitzen, dafür aber die Bedingung stellen, dass der Druck nicht unter einen gewissen Werth sinkt. Diese Bedingung ist gleichbedeutend mit der, dass die Geschwindigkeit einen gewissen, von jener Constanten C abhängigen Werth nicht übersteigt. Eine Fläche, an der die Geschwindigkeit sprungweise sich ändert, verhält sich wie die Trennungsfläche zweier verschiedenen Flüssigkeiten; auf beiden Seiten derselben muss der Druck und muss die Componente der Geschwindigkeit nach der Normale denselben Werth haben. Wir werden uns auf die Betrachtung des Falles beschränken, dass wir nur *ein* Gebiet bewegter Flüssigkeit haben, welches an *ruhende* Flüssigkeit grenzt. Die Fläche, in der das geschieht, muss hiernach aus Stromlinien gebildet sein, und die

Geschwindigkeit in ihr überall denselben Werth haben. Diesen Werth wollen wir $= 1$ setzen. Wir werden ferner annehmen, dass das Geschwindigkeitspotential φ nur von den beiden Coordinaten x und y abhängt, werden

$$z = x + iy\,, \quad w = \varphi + i\psi$$

setzen und suchen w so als Function von z zu bestimmen, dass den eben ausgesprochenen Bedingungen genügt wird. Dabei werden wir zu benutzen haben, dass

$$\psi = \text{const.}$$

die Gleichung der Stromlinien ist. Für die Geschwindigkeit leiten wir einen Ausdruck durch die folgende Betrachtung ab. Es ist

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dz} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\,\frac{\partial\varphi}{\partial y},\end{aligned}$$

also

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}} \cdot \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}}\,. \tag{2}$$

Nun setzen wir

$$\frac{dz}{dw} = \zeta = \xi + i\eta = \varrho\,(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \tag{3}$$

und betrachten ξ und η als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes in einer Ebene, die wir die ζ-Ebene nennen werden; die ξ-Achse soll dabei parallel der x-Achse, die η-Achse parallel der y-Achse gewählt sein. Die Vergleichung der Gleichungen 2) und 3) zeigt dann, dass, wenn man von dem Punkte $\zeta = 0$ nach dem Punkte ζ eine gerade Linie zieht, die Länge dieser, also ϱ, das Reciproke der Geschwindigkeit und ihre Richtung die Richtung der Bewegung in dem Punkte z ist.

Die Grenzen des von der betrachteten bewegten Flüssigkeit erfüllten Raumes oder, wie wir statt dessen sagen wollen, die Grenzen des Gebietes von z setzen sich aus drei verschiedenartigen Theilen zusammen. Einen Theil bilden Linien, durch welche die Flüssigkeit ein- und ausströmt; einen zweiten feste Wände; für diese ist $\psi = \text{const.}$; den dritten endlich machen die Flächen aus, in denen die bewegte Flüssigkeit mit der ruhenden in Berührung ist; wir wollen sie die *freien* Grenzen jener nennen; für sie ist ebenfalls $\psi = \text{const.}$, ausserdem aber $\varrho = 1$.

Um Flüssigkeitsbewegungen der in Rede stehenden Art zu finden, sehen wir auch φ und ψ als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes in einer Ebene, die wir die w-Ebene nennen wollen, an,

machen über die Gebiete von w und ζ geeignete Annahmen, suchen die Relation zwischen w und ζ, durch welche diese beiden Gebiete in den kleinsten Theilen ähnlich auf einander abgebildet werden, und berechnen z aus dieser mit Hülfe von 3). Das Gebiet von z, welches den Gebieten von w und ζ entspricht, bestimmt den von der bewegten Flüssigkeit erfüllten Raum.

§ 2.

Als Gebiet von w wollen wir nun einen Streifen annehmen, dessen Grenzen die Gleichungen

$$\psi = \psi_0 \qquad \varphi = -\infty$$

$$\psi = \psi_0 + b \qquad \varphi = +\infty$$

haben, wo ψ_0 und b zwei Constanten bedeuten; als Gebiet von ζ eine Sichel, bei welcher der eine begrenzende Kreisbogen die Gleichung

$$\rho = 1$$

hat und für deren Inneres überall $\rho > 1$ ist. Nach den im § 5 der vorigen Vorlesung gemachten Auseinandersetzungen können wir die Gleichung zwischen w und ζ aufstellen, durch welche das eine dieser Gebiete auf dem andern abgebildet wird; dieselbe bestimmt w und ζ als einwerthige Functionen von einander innerhalb dieser Gebiete. Dabei können drei Punkte des Umfanges des einen dreien Punkten des Umfanges des andern willkürlich zugeordnet werden. Wir setzen fest, dass

$$\zeta = \zeta_1 \quad \text{für} \quad \varphi = -\infty$$

$$\zeta = \zeta_2 \quad \text{für} \quad \varphi = +\infty$$

sei, und nehmen den Punkt ζ_2 auf dem Kreisbogen $\rho = 1$, den Punkt ζ_1 auf dem andern Kreisbogen der Grenze des ζ-Gebietes an. Ohne über das dritte Paar sich entsprechender Punkte eine Bestimmung zu treffen und ohne auf die Gleichung zwischen w und ζ näher einzugehen, lässt sich dann schon der Charakter des Gebietes von z und der Charakter der den gemachten Annahmen entsprechenden Flüssigkeitsbewegung im Allgemeinen angeben.

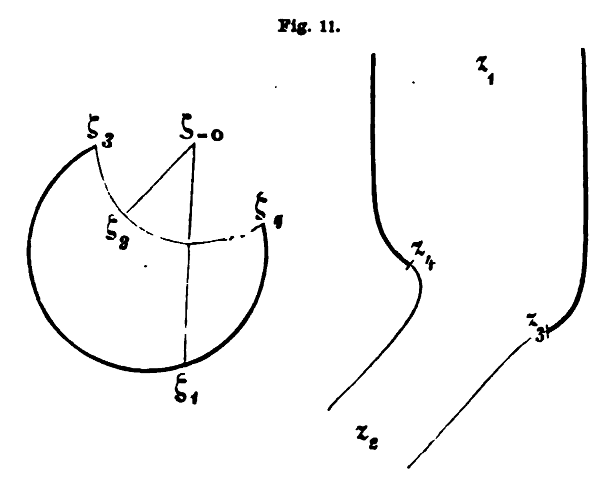
Aus der Gleichung

$$z = \int \zeta \, dw,$$

die aus 3) folgt, ergiebt sich zunächst, dass das Gebiet von z sich in die Unendlichkeit erstreckt, da das Gebiet von w diese Eigenschaft hat und ζ nirgends verschwindet. Es sei z_1 ein Punkt der z-Ebene, für den $\varphi = -\infty$ ist, und z_2 ein Punkt, für den $\varphi = +\infty$ ist, so dass die Punkte z_1 und z_2, die in der Unendlichkeit liegen, den Punkten

ζ_1 und ζ_2 entsprechen. Die von dem Punkte $\zeta = 0$ nach ζ_1 und ζ_2 gezogenen, geraden Linien wollen wir der Grösse und Richtung nach durch ϱ_1 und ϱ_2 bezeichnen, wobei dann die Grösse von $\varrho_2 = 1$; in z_1 und in endlicher Entfernung davon ist dann die Richtung der Bewegung die von ϱ_1, die Geschwindigkeit $= \frac{1}{\varrho_1}$; in z_2 und in endlicher Entfernung davon ist die Richtung der Bewegung die von ϱ_2, die Geschwindigkeit $= 1$. Ueberall ist das Gebiet von z eine in den kleinsten Theilen ähnliche Abbildung des Gebietes von w, bei der alle Längen im Verhältniss von $1 : \varrho$ vergrössert sind; bei z_2 ist daher das Gebiet von z dem von w congruent und b die Breite des Stromes, bei z_1 ist diese Breite $\varrho_1 b$. Bei z_1 müssen die Grenzen des Stromes feste Wände, bei z_2 können sie freie Grenzen sein. Freie Grenzen können überhaupt *die* Theile der Grenze des Gebietes von z sein, welche *den* Theilen der Grenze des Gebietes von ζ entsprechen, für welche $\varrho = 1$ ist, während *die* Theile der Grenze des Gebietes von z feste Wände sein müssen, welche den Theilen des zweiten Kreisbogens in der Grenze des ζ-Gebietes entsprechen. Es seien ζ_3 und ζ_4 die Spitzen der Sichel, welche das ζ-Gebiet bildet, z_3 und z_4 die entsprechenden Punkte im z-Gebiete; jeder dieser beiden Punkte bildet das Ende einer festen Wand und den Anfang einer freien Grenze. Fig. 11 soll die in Rede stehenden Gebiete von ζ und z zur Anschauung bringen; die stärkeren Linien in dem letzteren sollen die festen Wände, die schwächeren die freien Grenzen darstellen; diese geben die Gestalt des *Strahles* an, der aus einem Gefässe austritt, dessen Gestalt durch jene bestimmt ist.

Fig. 11.



Wir machen auf eine Eigenthümlichkeit noch aufmerksam, die die Punkte z_3 und z_4 darbieten. In ihnen haben die durch sie gezogenen Stromlinien bestimmte Tangenten; es sind diese parallel den Linien

ϱ_3 und ϱ_4 in der ζ-Ebene. Es sind aber z_3 und z_4 *Wendungspunkte*, und zwar die einzigen, welche die genannten Stromlinien besitzen, wie daraus hervorgeht, dass überall die Tangente mit der dem betrachteten Punkte entsprechenden Linie ϱ parallel ist; vorausgesetzt, dass, wie bei der gegebenen Figur, keine Tangente von dem Punkte ζ_0 an den Kreisbogen $\zeta_3\ \zeta_1\ \zeta_4$ gezogen werden kann. Wir wollen den Krümmungsradius in z_3 oder z_4 aufsuchen. Es sei dl ein Element einer Stromlinie und $d\varphi$ die Aenderung, die das Geschwindigkeitspotential auf demselben erleidet; da $\frac{1}{\varrho}$ die Geschwindigkeit ist, so ist dann

$$\frac{d\varphi}{dl} = \frac{1}{\varrho} \quad \text{oder} \quad dl = \varrho\, d\varphi.$$

Gebrauchen wir wieder das durch die Gleichung 3) definirte Zeichen ϑ, so erhalten wir hiernach für den Krümmungsradius von dl den Ausdruck

$$\frac{\varrho\, d\varphi}{d\vartheta}$$

oder, da für jede Stromlinie ψ constant ist und daher dw für $d\varphi$ gesetzt werden kann, den Ausdruck

$$\frac{\varrho\, dw}{d\vartheta}. \tag{4}$$

Hier führen wir $d\zeta$ an Stelle von $d\vartheta$ ein; wir haben in Folge der Gleichung 3)

$$\lg \zeta = \lg \varrho + i\vartheta,$$

also

$$\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{d\varrho}{\varrho} + i\, d\vartheta. \tag{5}$$

Gehört nun, wie wir zunächst annehmen wollen, dl der freien Grenze des Strahles an, so ist $\varrho = 1$, also $d\varrho = 0$, mithin

$$d\vartheta = -i\frac{d\zeta}{\zeta}$$

und daher der in 4) gegebene Ausdruck des Krümmungsradius

$$= i\zeta\frac{dw}{d\zeta}.$$

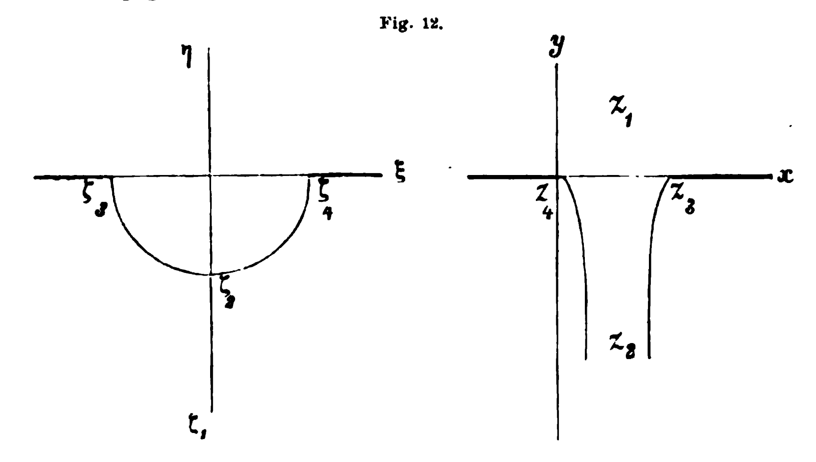
Rückt der Punkt z einem der Punkte z_3, z_4, also der Punkt ζ einem der Punkte ζ_3, ζ_4 unendlich nahe, so wird $\frac{dw}{d\zeta}$ unendlich klein, vorausgesetzt, dass der Winkel an den Spitzen der Sichel, welche das ζ-Gebiet bildet, kleiner als π ist, da die einander entsprechenden Theile der Gebiete von ζ und w, für welche ζ unendlich wenig von ζ_3 oder ζ_4 abweicht, als Theile von Keilen betrachtet werden dürfen, die auf einander abgebildet sind durch die Relation, die zwischen ζ und w besteht. Daraus folgt, dass die betrachteten Krümmungsradien unendlich klein sind.

Gehört dl einer der festen Wände an, so ist nicht $d\varrho = 0$; durch Differentiation der Gleichung zwischen ϱ und ϑ, welche den zweiten der Kreisbögen darstellt, die das Gebiet von ζ begrenzen, erhält man aber dann eine Gleichung zwischen $d\varrho$ und $d\vartheta$, aus der in Verbindung mit der Gleichung 5) $d\vartheta$ durch $d\zeta$ ausgedrückt werden kann — es sei denn, dass der zweite Kreisbogen in eine gerade Linie übergegangen ist, in welchem Falle seine Gleichung $\vartheta =$ const., d. h. $d\vartheta = 0$ ist. Im Allgemeinen erhält man daher auch hier aus 4) für den Krümmungsradius einen Ausdruck, der $\frac{dw}{d\zeta}$ als Factor enthält, und also verschwindet, wenn der Punkt z in dem Punkt z_3 oder z_4 rückt. In dem genannten Ausnahmsfalle aber ist der Krümmungsradius an der festen Wand unendlich und springt von Unendlich zu Null, wenn der Punkt z durch z_3 oder z_4 hindurchgeht.

§ 3.

Die Rechnung, die wir im vorigen § bezeichnet haben, wollen wir nun in einem speciellen Falle durchführen. Von den beiden Kreisbögen, welche das Gebiet von ζ begrenzen, sei der eine, derjenige, für welchen $\varrho = 1$ ist, ein Halbkreis, der andere habe einen unendlich grossen Radius; der Punkt ζ_2 halbire den Halbkreis und der Punkt ζ_1 liege in der Unendlichkeit auf der von dem Punkte $\zeta = 0$ durch ζ_2 gezogenen Geraden. Fig. 12 soll für diesen Fall die Gebiete von ζ und z darstellen; in ihr sind ausser den Grenzen dieser Gebiete die Achsen der ξ, η und x, y, die wir einführen wollen, angegeben.

Fig. 12.



Nehmen wir als die Grenzen des Streifens, der das Gebiet von w bildet, die Linien

$$\psi = 0 \quad \text{und} \quad \psi = \pi$$

an, so haben wir zunächst nach der bei den Ausdrücken 14) der vorigen Vorlesung angegebenen Regel und der Gleichung 16) derselben Vorlesung

$$\left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right)^2 = K\,\frac{e^w - C}{e^w - C'} \qquad 6)$$

zu setzen. Zur Bestimmung der drei Constanten C, C' und K haben wir nach den bereits gemachten Festsetzungen die beiden Bedingungen, dass

$$\text{für } \zeta = -i\infty \qquad \varphi = -\infty$$

$$\text{für } \zeta = -i \qquad \varphi = +\infty$$

ist; wir fügen diesen willkürlich die dritte hinzu, dass

$$\text{für } \zeta = 1 \qquad w = 0$$

sei. Daraus ergiebt sich

$$K = -1, \quad C = 1, \quad C' = -1,$$

also

$$\left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right)^2 = \frac{1-e^w}{1+e^w}.$$

Hieraus ist ζ zu bestimmen; man erhält dafür die quadratische Gleichung

$$(\zeta-1)^2\,\frac{e^{-w}+1}{2} + (\zeta+1)^2\,\frac{e^{-w}-1}{2} = 0,$$

d. h.

$$\zeta^2 - 2\zeta e^{-w} + 1 = 0,$$

woraus folgt

$$\zeta = e^{-w} + \sqrt{e^{-2w} - 1}\,. \qquad 7)$$

Das Vorzeichen der Wurzelgrösse ist für *einen* Werth von w durch die Festsetzung, die wir getroffen haben, bestimmt, dass ζ unendlich (und nicht Null) werde für $\varphi = -\infty$; damit ist dasselbe für das ganze Gebiet von w bestimmt, da, wie wir wissen, für dieses Gebiet ζ eine einwerthige Function von w ist. Nach 3) ist nun

$$z = \int \left(e^{-w} + \sqrt{e^{-2w} - 1}\right) dw,$$

wo die untere Grenze des Integrals beliebig gewählt werden kann und $= 0$ gesetzt werden möge; der Punkt $z = 0$ entspricht dann dem Punkte $\zeta = 1$, ist also der mit z_4 bezeichnete Punkt. Die Integration bei dem ersten Theile des für z gefundenen Ausdrucks ist unmittelbar ausführbar; bei dem zweiten wird sie es, wenn man als Integrationsvariable $\sqrt{e^{-2w} - 1}$ an Stelle von w einführt. Man erhält so

$$z = 1 - e^{-w} + \sqrt{e^{-2w} - 1} + \operatorname{arctg}\sqrt{e^{-2w} - 1}\,, \qquad 8)$$

wo der vorkommende arctg für $w = 0$ verschwindet. Hieraus sind die Grenzen des Gebietes von z zu bestimmen.

Wenn $\psi = 0$ ist und φ zwischen 0 und $-\infty$ variirt, so folgt aus 8)

$$x = 1 - e^{-\varphi} - \sqrt{e^{-2\varphi} - 1} + \operatorname{arctg} \sqrt{e^{-2\varphi} - 1}$$
$$y = 0,$$

wo die Wurzelgrösse (wie jede reelle Wurzelgrösse) positiv gerechnet werden soll und der arctg im ersten Quadranten liegt. Durch diese Gleichungen ist die negative x-Achse dargestellt; sie bildet eine feste Wand. Für $\varphi = -\infty$ und $\psi = 0$ ist also

$$x = 1 - 2e^{-\varphi} + \frac{\pi}{2}, \quad y = 0.$$

Hat φ einen constanten, unendlich grossen, negativen Werth und wächst ψ von Null bis π, so ist

$$x = 1 - 2e^{-\varphi} \cos \psi + \frac{\pi}{2}$$
$$y = \quad 2e^{-\varphi} \sin \psi.$$

Bei diesem Schlusse ist benutzt, dass arctg u, d. h.

$$\int_0^u \frac{du}{1 + u^2}$$

seinen Werth nicht ändert, wenn der Punkt u auf einer ganz in der Unendlichkeit liegenden Linie bewegt wird. Die Gleichungen 9) stellen einen Halbkreis dar, dessen Mittelpunkt die x-Ordinate $1 + \frac{\pi}{2}$, die y-Ordinate 0 hat, und dessen Radius $2e^{-\varphi}$ ist. Durch diesen Halbkreis strömt die Flüssigkeit nach seinem Mittelpunkte hin mit einer Geschwindigkeit, die dem Reciproken seines Radius gleich ist. Für $\varphi = -\infty$ und $\psi = \pi$ ist

$$x = 1 + 2e^{-\varphi} + \frac{\pi}{2}, \quad y = 0.$$

Ist $\psi = \pi$ und liegt φ zwischen $-\infty$ und 0, so ist

$$x = 1 + e^{-\varphi} + \sqrt{e^{-2\varphi} - 1} + \pi - \operatorname{arctg} \sqrt{e^{-2\varphi} - 1}$$
$$y = 0,$$

wo der arctg wieder im ersten Quadranten zu wählen ist. Diese Gleichungen stellen den Theil der x-Achse zwischen den Punkten $x = 2 + \pi$ und $x = +\infty$ dar; auch er ist feste Wand. Für $\psi = \pi$, $\varphi = 0$ ist, ebenso wie für $\psi = 0$, $\varphi = 0$, wie aus der Gleichung 7) hervorgeht, $\frac{d\zeta}{dw}$ unendlich; $w = 0$ und $w = i\pi$ sind die einzigen Punkte in der Grenze des Gebietes von w, für welche dieses stattfindet; daraus folgt, dass der Punkt $x = 2 + \pi$, $y = 0$ der mit z_3 bezeichnete ist.

Wenn $\psi = \pi$ und φ positiv ist, so ergiebt sich, da

$$\operatorname{arctg} iu = i\,\tfrac{1}{2} \lg \frac{1+u}{1-u},$$

und nun y negativ werden muss,

$$x = 1 + e^{-\varphi} + \pi$$
$$y = \sqrt{1 - e^{-2\varphi}} - \tfrac{1}{2} \lg \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2\varphi}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2\varphi}}}.$$

Diese Linie ist eine freie Grenze des Strahles.

Für $\psi = \pi$, $\varphi = +\infty$ ist

$$x = 1 + \pi, \quad y = 1 - \lg 2 - \varphi.$$

Giebt man dem φ einen constanten, unendlich grossen, positiven Werth und lässt ψ von π bis 0 abnehmen, so findet man

$$x = 1 + \psi$$
$$y = 1 - \lg 2 - \varphi.$$

Diese Gleichungen stellen eine der x-Achse parallele Linie von der Länge π dar, für die $y = -\infty$ ist; durch diese Linie strömt die Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit 1 in der Richtung der negativen y-Achse.

Für $\varphi = +\infty$ und $\psi = 0$ ist

$$x = 1, \quad y = 1 - \lg 2 - \varphi.$$

Nimmt man endlich $\psi = 0$ und φ positiv an, so ergiebt sich

$$x = 1 - e^{-\varphi}$$
$$y = \sqrt{1 - e^{-2\varphi}} - \tfrac{1}{2} \lg \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2\varphi}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2\varphi}}}.$$

Die hierdurch dargestellte Linie ist die zweite freie Grenze des Strahles. Setzt man in diesen Gleichungen $\varphi = 0$, so kommt man zu dem Punkte $z = 0$ zurück, von dem wir bei der Aufsuchung der Grenzen des Gebietes von z ausgegangen sind.

§ 4.

Wir wollen nun einen Fall betrachten, der auch den eben behandelten als speciellen in sich schliesst. Das Gebiet von w soll, wie in diesem, durch die Linien

$$\psi = 0 \qquad \varphi = -\infty$$
$$\psi = \pi \qquad \varphi = +\infty$$

begrenzt sein; das Gebiet von ζ aber sei begrenzt durch einen Kreisbogen, der um den Punkt $\zeta = 0$ mit dem Radius 1 beschrieben ist, die Länge α hat und für dessen Endpunkte ζ die Werthe ζ_3 und ζ_4 besitzt, durch die Verlängerung der nach diesen Punkten gezogenen Radien und einen unendlich grossen, concentrischen Kreis-

bogen. Dieses Gebiet von ζ lässt sich nach den über die Gleichung 9) der vorigen Vorlesung gemachten Auseinandersetzungen durch die Substitution

$$Z = \zeta^{\frac{\pi}{\alpha}}$$

abbilden auf ein Gebiet der Variabeln Z, welches durch einen Halbkreis vom Radius 1, die Verlängerungen der nach seinen Endpunkten gezogenen Radien und einen unendlich grossen, concentrischen Halbkreis begrenzt ist. Die Werthe, welche Z dabei für $\zeta = \zeta_3$ und $\zeta = \zeta_4$ erhält, nennen wir Z_3 und Z_4, so dass

$$Z_3 = \zeta_3^{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad Z_4 = \zeta_4^{\frac{\pi}{\alpha}}$$

ist. Das Gebiet von Z stimmt im Endlichen aber überein mit dem Gebiete, welches wir für ζ im vorigen § angenommen haben, und wird daher durch die Gleichung

$$\left(\frac{Z - Z_3}{Z - Z_4}\right)^2 = K\,\frac{e^w - C}{e^w - C'},$$

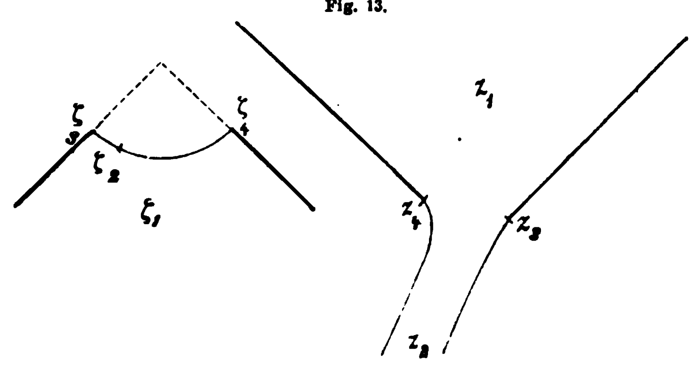
die der Gleichung 6) nachgebildet ist, auf dem Gebiete von w abgebildet. Daraus folgt dann zwischen ζ und w die Relation

$$\left(\frac{\zeta^{\frac{\pi}{\alpha}} - \zeta_3^{\frac{\pi}{\alpha}}}{\zeta^{\frac{\pi}{\alpha}} - \zeta_4^{\frac{\pi}{\alpha}}}\right)^2 = K\,\frac{e^w - C}{e^w - C'}; \tag{10}$$

wir nennen wieder ζ_1 und ζ_2 die willkürlich zu wählenden Punkte der Grenze des Gebietes von ζ, für welche $\varphi = -\infty$ und $\varphi = +\infty$ ist; setzen wir dann noch zwei Punkte der Grenzen der Gebiete von ζ und w als einander entsprechend fest, so sind die Constanten K, C, C' bestimmt.

Wir wollen ζ_1 in der Unendlichkeit ζ_2 auf dem mit dem Radius 1 beschriebenen Kreisbogen annehmen; Fig. 13 stellt dann die entsprechenden Gebiete von ζ und z dar.

Fig. 13.



Die Theile des Gebietes von z, für welche $\varphi = -\infty$ oder $\varphi = +\infty$ ist, liegen in der Unendlichkeit; die festen Wände sind

gerade in ihrer ganzen Ausdehnung und haben die Richtungen von ϱ_3 und ϱ_4; der Strahl hat in der Unendlichkeit die Richtung von ϱ_2 und die Breite π.

Wir betrachten noch einen besondern, hierher gehörigen Fall. Es sei

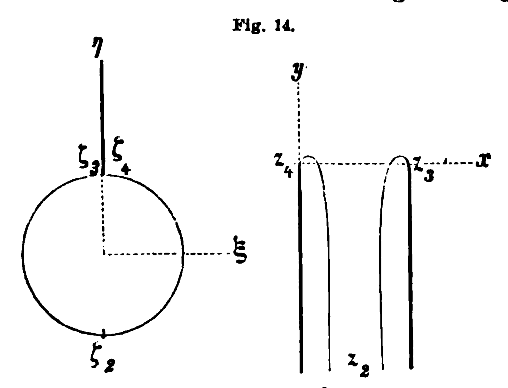
$$\alpha = 2\pi, \quad \zeta_3 = \zeta_4 = i, \quad \zeta_2 = -i$$

und für $w = 0$

$$\zeta = i, \quad z = 0.$$

Die Gebiete von ζ und z sind dann durch Fig. 14 dargestellt.

Fig. 14.



Bei der Bildung der Gleichung 10) treten die Grössen $\sqrt{\zeta_3}$ und $\sqrt{\zeta_4}$ auf; diese sind nicht einander gleich, obwohl ζ_3 und ζ_4 es sind, sondern entgegengesetzt, weil die eine von ihnen stetig in die andere übergehen muss, wenn der Punkt ζ auf einem, in seinem Gebiete liegenden Wege von ζ_3 nach ζ_4, oder umgekehrt, geführt wird. Hiernach und in Folge der Bedingungen, dass

$$\begin{aligned} &\text{für } \varphi = -\infty \quad && \zeta = \infty \\ &\varphi = +\infty && \zeta = -i \\ &w = 0 && \zeta = i \end{aligned}$$

werde, geht die genannte Gleichung über in

$$\left(\frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{i}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{i}}\right)^2 = \frac{1 - e^w}{1 + e^w},$$

d. h.

$$\zeta - \sqrt{\zeta}\, 2\sqrt{i}\, e^{-w} - i = 0.$$

Die Summe der beiden Werthe von $\sqrt{\zeta}$, die sich hieraus ergeben, ist $= 2\sqrt{i}\, e^{-w}$, ihr Product $= -i$; die Summe der beiden Werthe von ζ ist daher $= 2i\,(2e^{-2w} - 1)$ und das Product derselben $= -1$; für ζ gilt also die quadratische Gleichung

$$\zeta^2 - 2\zeta i\,(2e^{-2w} - 1) - 1 = 0,$$

aus welcher folgt

$$\zeta = i\left(2e^{-2w} - 1 + 2e^{-w}\sqrt{e^{-2w} - 1}\right).$$

Das Vorzeichen der hier vorkommenden Wurzelgrösse ist dadurch bestimmt, dass, wenn $\varphi = -\infty$ ist, ζ unendlich und nicht Null wird.

Aus

$$z = \int_0^w \zeta\, dw$$

ergiebt sich hiernach

$$z = -i\left(e^{-2w} + w - 1 + e^{-w}\sqrt{e^{-2w} - 1} - \lg\left(e^{-w} + \sqrt{e^{-2w} - 1}\right)\right),$$

wo der lg für $w = 0$ verschwindet.

Ist $\psi = 0$ und nimmt φ von 0 bis $-\infty$ ab, so ist hiernach

$$x = 0$$

$$y = -\left(e^{-2\varphi} + \varphi - 1 + e^{-\varphi}\sqrt{e^{-2\varphi} - 1} - \lg\left(e^{-\varphi} + \sqrt{e^{-2\varphi} - 1}\right)\right),$$

durch welche Gleichungen die negative y-Achse dargestellt ist.

Hat φ einen constanten, unendlichen, negativen Werth und wächst ψ von 0 bis π, so wird

$$x = -2e^{-2\varphi}\sin 2\psi + 2\psi$$

$$y = -2e^{-2\varphi}\cos 2\psi - 2\varphi + \tfrac{3}{2} + \lg 2.$$

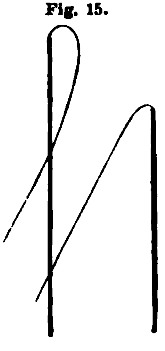
Ist $\psi = \pi$ und φ negativ, so findet man

$$x = 2\pi$$

$$y = -\left(e^{-2\varphi} + \varphi - 1 + e^{-\varphi}\sqrt{e^{-2\varphi} - 1} - \lg\left(e^{-\varphi} + \sqrt{e^{-2\varphi} - 1}\right)\right).$$

Diese Gleichungen stellen die zweite feste Wand dar, die also in dem Abstande 2π von der ersten sich befindet. Die Breite des Strahles ist den vorausgeschickten allgemeinen Betrachtungen zufolge $= \pi$.

Fig. 15.



Der eben erörterte Fall eines Flüssigkeitsstrahles ist der erste, welcher mathematisch behandelt worden ist, und zwar von Helmholtz*).

Giebt man, ohne sonst in den gemachten Annahmen eine Aenderung zu treffen, dem Punkte ζ_2 eine andere Lage, als sie in Fig. 14 angegeben ist, auf dem Kreise $\varrho = 1$, so erhalten die Grenzen des Gebietes von z die in Fig. 15 dargestellte Gestalt. Diese Grenzen schneiden sich selbst; eine dem entsprechende Flüssigkeitsbewegung ist nicht möglich.

*) Monatsberichte der Berliner Akademie, April 1868.

§ 5.

Wir wollen nun über das Gebiet von w eine andere Annahme als bisher machen. Es sei dasselbe begrenzt durch die Linien

$$\psi = -\frac{\pi}{2} \qquad \varphi = -\infty$$

$$\psi = +\frac{\pi}{2} \qquad \varphi = +\infty$$

und durch die beiden Seiten der Linie, für welche

$$\psi = 0 \quad \text{und} \quad \varphi > 0$$

ist. Die folgende Betrachtung lehrt, wie dieses Gebiet sich auf einer Sichel abbilden lässt.

Das Gebiet, welches aus ihm entsteht, wenn man die Linie $\psi = 0$, $\varphi > 0$ nicht zur Grenze gehörig rechnet, wird durch

$$e^w = \frac{1+Z}{1-Z} \tag{11}$$

auf einem Kreise in der Z-Ebene abgebildet, und zwar so, dass

$$\text{für } \varphi = -\infty \qquad Z = -1$$

$$\varphi = +\infty \qquad Z = +1$$

$$w = i\frac{\pi}{2} \qquad Z = i$$

ist; der Radius des Kreises ist hiernach $= 1$, sein Mittelpunkt ist der Punkt $Z = 0$, und entspricht dem Punkte $w = 0$. Ist $\psi = 0$, $\varphi > 0$, so ist Z reell und kleiner als 1; der Linie $\psi = 0$, $\varphi > 0$ entspricht der Radius, der von dem Punkte $Z = 0$ nach dem Punkte $Z = 1$ gezogen ist. Durch die Gleichung 11) wird daher das im Anfange dieses § bezeichnete Gebiet von w auf einem Gebiete von Z abgebildet, das durch den genannten Kreis und die beiden Seiten des genannten Radius begrenzt ist. *Dieses* aber wird durch

$$Z = Z'^2$$

auf einem Halbkreise von Radius 1 in der Z'-Ebene abgebildet, also auf einer Sichel; der Winkel an den Spitzen derselben ist $\frac{\pi}{2}$ und für ihre Spitzen ist $Z' = \pm 1$. Auf dieser Sichel ist also das Gebiet von w, das wir angenommen haben, durch

$$e^w = \frac{1+Z'^2}{1-Z'^2}$$

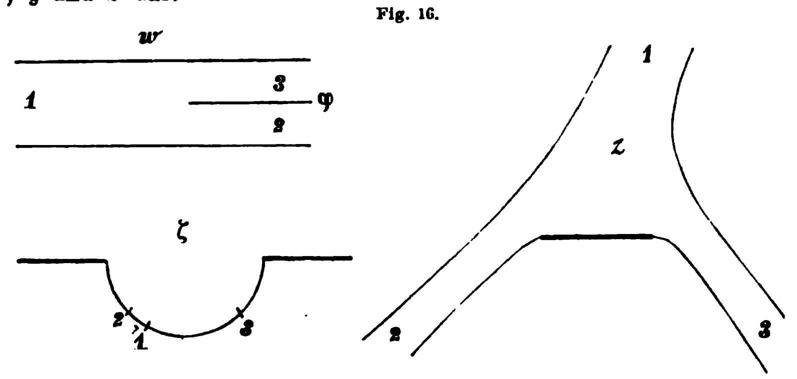
abgebildet und kann daher mit Hülfe der im § 5 der einundzwanzigsten Vorlesung gemachten Auseinandersetzungen auf jeder andern Sichel abgebildet werden, und zwar so, dass drei beliebigen Punkten seines Umfanges drei beliebige Punkte des Umfanges dieser entsprechen.

Als Grenzen des Gebietes von ζ wollen wir wieder einen Halbkreis vom Radius 1 und einen unendlich grossen Kreisbogen annehmen und wollen festsetzen, dass, wenn ζ_1, ζ_2, ζ_3 drei Punkte des Halbkreises sind,

$$\text{für } \varphi = -\infty \qquad \zeta = \zeta_1$$
$$\psi < 0, \quad \varphi = +\infty \qquad \zeta = \zeta_2$$
$$\psi > 0, \quad \varphi = +\infty \qquad \zeta = \zeta_3$$

ist. Der Charakter des Gebietes von z lässt sich dann wieder im Allgemeinen mit Leichtigkeit angeben. Fig. 16 stellt die Gebiete von w, ζ und z dar.

Fig. 16.



Aus der Unendlichkeit kommt ein Strahl, der dort die Breite π, die Geschwindigkeit 1 und die Richtung von ϱ_1 hat; in die Unendlichkeit gehen zwei Strahlen, die dort die Breite $\frac{\pi}{2}$, die Geschwindigkeit 1 und die Richtungen von ϱ_2 und ϱ_3 haben. Die Grenzen jenes Strahles gehen in die äusseren Grenzen dieser durch die Linien über, die den Kreisbögen $\zeta_1\,\zeta_2$ und $\zeta_1\,\zeta_3$ entsprechen. Die inneren Grenzen der beiden in die Unendlichkeit laufenden Strahlen gehen in einander über durch eine Linie, die zum Theil freie Grenze, zum Theil feste Wand ist. Die Enden der letzteren entsprechen den Spitzen des Gebietes von ζ und zwei gewissen Punkten des w-Gebietes, für welche $\psi = 0$, $\varphi > 0$ ist. Die Wand liegt ganz im Endlichen, ist gerade und dem unendlichen Kreisbogen der Grenze des ζ-Gebietes, so weit er im Endlichen liegt, parallel. In ihr giebt es einen Punkt, dem Punkte $w = 0$ entsprechend, wo die Geschwindigkeit Null ist und eine Stromlinie sich in zwei theilt.

Wir gehen näher auf einen Fall ein, der als in dem besprochenen enthalten angesehen werden kann, den wir aber selbständig behandeln wollen.

Die Grenzen des Gebietes von ζ seien die in Fig. 16 dargestellten, das Gebiet von w aber sei die unendliche Ebene, die durch die beiden Seiten der Linie $\psi = 0$, $\varphi > 0$ begrenzt ist. Dabei sei

$$\text{für } w = \infty \qquad \zeta = -i$$
$$w = 1 \qquad \zeta = \pm 1;$$

die letzte Bedingung ist erfüllbar, da der Punkt $w = 1$ zweimal in der Grenze des Gebietes von w vorkommt und daher zweien Punkten in der Grenze des Gebietes von ζ entsprechen muss. Die Relation zwischen w und ζ, durch welche die Gebiete der beiden Variabeln diesen Festsetzungen gemäss auf einander abgebildet werden, findet man leicht durch die folgende Betrachtung. Das Gebiet von w wird durch

$$w = Z^2$$

auf der Hälfte der Z-Ebene der Art abgebildet, dass

$$\text{für } w = \infty \qquad Z = \infty$$
$$w = 1 \qquad Z = \pm 1$$

ist. Dieses Gebiet von Z ist ein Kreis von unendlich grossem Radius; die Sichel, welche das Gebiet von ζ ausmacht, wird auf demselben durch

$$\left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right)^2 = \frac{1-Z}{1+Z}$$

so abgebildet, dass

$$\text{für } \zeta = -i \qquad Z = \infty$$
$$\zeta = +1 \qquad Z = +1$$
$$\zeta = -1 \qquad Z = -1$$

ist. Daraus folgt die Relation zwischen ζ und w

$$\left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right)^2 = \frac{1-\sqrt{w}}{1+\sqrt{w}}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\zeta^2 - 2\zeta\frac{1}{\sqrt{w}} + 1 = 0,$$

also

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{w}} + \sqrt{\frac{1}{w} - 1}. \qquad 12)$$

Das Vorzeichen der zweiten der beiden hier vorkommenden Wurzelgrössen ist durch die Festsetzung bestimmt, dass $\zeta = -i$ für $w = \infty$ wird, das der ersten dann dadurch, dass für $w = 0$, ζ unendlich und nicht Null werden muss, da in dem Gebiete von ζ keine Werthe vorkommen, deren Modul kleiner als 1 ist. Setzt man noch fest, dass z und w gleichzeitig verschwinden, so ergiebt sich aus 12)

$$z = 2\sqrt{w} + w\sqrt{\frac{1}{w} - 1} + \text{arc sin}\sqrt{w},$$

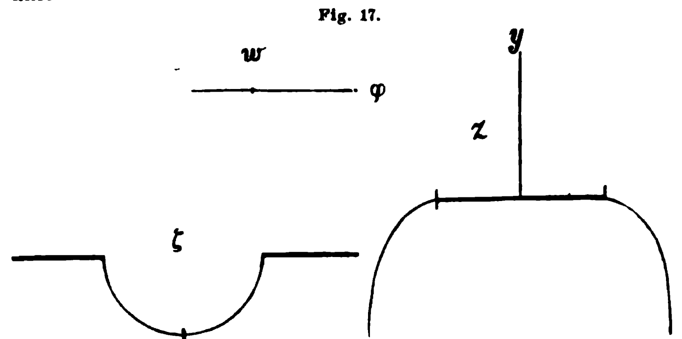
wo der arc sin Null ist für $w = 0$. Für die feste Wand ist $\sqrt{w}$ reell

und variirt von -1 bis $+1$; für dieselbe ist daher $y = 0$ und x liegt zwischen

$$-2 - \frac{\pi}{2} \text{ und } 2 + \frac{\pi}{2}.$$

Fig. 17 stellt für den jetzt betrachteten Fall die Gebiete von w, ζ und z dar.

Fig. 17.



Ein Strom von unendlicher Breite, der in der Unendlichkeit überall die Geschwindigkeit 1 und die Richtung der negativen y-Achse hat, trifft eine Wand von der Breite $4 + \pi$, die senkrecht zur y-Achse ist; in den freien Grenzen, die von den Enden dieser ausgehen, berührt er ruhende Flüssigkeit.

§ 6.

Wir wollen nun eine Betrachtung über den *Druck* anstellen, den eine feste Wand bei solchen Flüssigkeitsbewegungen, wie wir sie in dieser Vorlesung untersucht haben, erleidet. Der Druck p in irgend einem Punkte der bewegten Flüssigkeit ist der Gleichung 1) zufolge bestimmt durch

$$p = C - \tfrac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right)$$

oder

$$p = C - \tfrac{1}{2}\frac{1}{\varrho^2}.$$

In der ruhenden Flüssigkeit ist der Druck einer Constanten gleich, die durch C_0 bezeichnet werden möge. An der freien Grenze der bewegten und der ruhenden Flüssigkeit ist der Druck auf beiden Seiten derselbe und $\varrho = 1$; daraus folgt

$$C_0 = C - \tfrac{1}{2},$$

also

$$p = C_0 + \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\varrho^2}\right).$$

Nun sei dl ein Element einer Wand, die auf der einen Seite mit der

bewegten, auf der andern mit der ruhenden Flüssigkeit in Berührung ist; der Ueberschuss des Druckes, der auf dieses von der ersten Seite wirkt, über den von der zweiten Seite wirkenden, oder, wie wir der Kürze wegen sagen wollen, der Druck, den das Element dl erleidet, ist daher

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\varrho^2}\right)dl.$$

Um mit Hülfe dieses Ausdrucks den Druck zu berechnen, den ein endlicher Theil der Wand oder die ganze Wand erleidet, ist es zweckmässig, als Integrationsvariable w einzuführen. Wie wir bereits am Ende des § 2 benutzt haben, ist $dl = \varrho\, d\varphi$, oder, da für die Wand ψ constant ist, $dl = \varrho\, dw$; wobei indessen zu beachten ist, dass $d\varphi$ und dw, ebenso wie dl, positiv zu wählen sind. Der Druck, den das Element dl erleidet, wird daher

$$= \frac{1}{2}\left(\varrho-\frac{1}{\varrho}\right)dw.$$

Die weiteren Entwickelungen wollen wir auf den Fall beschränken, dass die Wand gerade und parallel der x-Achse ist. An ihr ist dann ζ reell und daher

$$\varrho = \pm\,\zeta,$$

wo das Vorzeichen dadurch bestimmt ist, dass ϱ positiv ist. Der Druck, den die ganze Wand erleidet, ist also

$$\int \pm\,\frac{1}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)dw,$$

wo die Integration über die Wand auszudehnen und das Vorzeichen so zu wählen ist, dass alle Elemente des Integrals positiv sind.

In dem Falle, auf den Fig. 17 sich bezieht, ist in Folge der Gleichung 12)

$$\frac{1}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right) = \sqrt{\frac{1}{w}-1}.$$

Da längs der Wand $\sqrt{w}$ von -1 bis $+1$ zunimmt, so ergiebt sich hieraus der Druck, den die Wand in diesem Falle erleidet,

$$= \pi.$$

§ 7.

Wir wollen endlich uns von einigen Voraussetzungen frei machen, die wir in dieser Vorlesung eingeführt haben, um die Formeln abzukürzen.

Schreibt man in der Gleichung zwischen z und w, welche eine Flüssigkeitsbewegung der betrachteten Art darstellt, $\frac{w}{n}$ für w, wo n eine positive Constante bedeutet, so stellt die neue Gleichung eine

Bewegung dar, bei der die Stromlinien die alten sind, die Geschwindigkeit überall proportional mit n, der Druck, den eine Wand erleidet, proportional mit n^2 ist.

Schreibt man in derselben Gleichung $\frac{z}{m}$ und $\frac{w}{m}$ für z und w, wo m wieder eine positive Constante ist, so stellt die neue eine Bewegung dar, bei der die Stromlinien den früheren ähnlich sind und die Geschwindigkeit an den entsprechenden Punkten dieselbe ist. Die linearen Dimensionen der Stromlinien sind mit m proportional; mit m proportional ist auch der Druck, den eine Wand erleidet.

Ist die Dichtigkeit der Flüssigkeit nicht $= 1$, wie wir angenommen haben, sondern $= \mu$, so ist der Druck, den eine Wand erleidet, proportional mit μ.

Kehren wir nun noch einmal zur Betrachtung der Strömung zurück, auf welche Fig. 17 sich bezieht, nehmen aber an, dass l die Länge der festen Wand, v die Geschwindigkeit an der freien Grenze der bewegten Flüssigkeit oder in der Unendlichkeit, μ die Dichtigkeit der Flüssigkeit ist; der Druck, den die feste Wand erfährt, ist dann hiernach

$$= \mu v^2 \frac{l\pi}{4+\pi}.$$

Dreiundzwanzigste Vorlesung.

(Bewegung der Luft oder einer anderen compressibeln Flüssigkeit, auf deren Theile keine Kräfte wirken. Es wird die Existenz eines Geschwindigkeitspotentials vorausgesetzt und die Geschwindigkeit als unendlich klein angenommen. Aufstellung der Bedingungen, durch welche das Geschwindigkeitspotential bestimmt ist. Ebene Wellen. Reflexion derselben. Kugelförmige Wellen. Berechnung des Geschwindigkeitspotentials aus dem Anfangszustande für den Fall, dass der Luftraum unbegrenzt ist. Bewegung einer festen Kugel in der Luft. Schwingungen einer Kugel. Intensität des erzeugten Tones. Schwingungen zweier kleiner Kugeln.)

§ 1.

Wir haben bis jetzt die Bewegung einer Flüssigkeit nur unter der Voraussetzung näher untersucht, dass diese als incompressibel betrachtet werden kann; wir wollen nun auf die Aenderungen der Dichtigkeit Rücksicht nehmen. Zu den Erscheinungen, mit denen wir es hier zu thun haben werden, gehören vornehmlich die *Schallschwingungen der Luft*; wir wollen uns vorstellen, dass die Flüssigkeit, um die es sich handelt, die *Luft* ist, obwohl die Rechnungen, die wir durchführen werden, für jede Flüssigkeit gelten. Wir setzen die Existenz eines Geschwindigkeitspotentials voraus, nehmen an, dass Kräfte nicht wirken, und dass die Geschwindigkeiten überall stetig sich ändern; für den Punkt (x, y, z) und die Zeit t bezeichnen wir das Geschwindigkeitspotential durch φ, den Druck durch p, die Dichtigkeit durch μ. Nach den Gleichungen 20), 21) und 6) der fünfzehnten Vorlesung ist dann

$$-P = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right) \qquad 1)$$

$$0 = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\partial y} + \frac{\partial \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z}}{\partial z} \qquad 2)$$

$$P = \int \frac{dp}{\mu}, \qquad 3)$$

wo das für P angegebene Integral aus der Relation zu berechnen ist, die zwischen p und μ besteht, und die untere Grenze der Integration dabei beliebig gewählt werden kann. Wir werden uns auf die Betrachtung des Falles beschränken, dass die Geschwindig-

keiten, sowie die Aenderungen des Druckes und der Dichtigkeit als unendlich klein anzusehen sind. Wir können dann zunächst

$$dp = a^2 \, d\mu \tag{4}$$

setzen, wo a eine positive Constante bedeutet, die, wie wir sehen werden, *die Fortpflanzungsgeschwindigkeit* des Schalles in der Luft ist. Wir machen ferner

$$\mu = \mu_0 (1 + \sigma), \tag{5}$$

indem wir unter μ_0 eine Constante verstehen, die unendlich wenig von den Werthen, die μ erhält, verschieden ist; die Grösse σ nennen wir die *Verdichtung* im Punkte (x, y, z) zur Zeit t. Berücksichtigen wir nur die Glieder niedrigster Ordnung, so folgt aus 3), 4) und 5), wenn wir P und σ gleichzeitig verschwinden lassen,

$$P = a^2 \sigma$$

und aus 1) und 2)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + a^2 \sigma = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \Delta \varphi = 0.$$

Hieraus ergiebt sich für φ die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi. \tag{7}$$

Nach dem Begriffe des Geschwindigkeitspotentials sind $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ die Componenten der Geschwindigkeit, und nach der Gleichung 6) ist $-\frac{1}{a^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ die Verdichtung σ im Punkte (x, y, z) zur Zeit t; alle diese Grössen sind daher gefunden, wenn φ als Function von x, y, z und t bis auf eine additive, von diesen 4 Argumenten unabhängige Constante ermittelt ist. Wir wollen beweisen, dass durch die Gleichung 7) φ vollkommen bestimmt ist, wenn φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ für $t = 0$ als Functionen von x, y, z und für alle Elemente der Grenzfläche der betrachteten Luftmasse $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ als Function von t gegeben sind und φ als stetig angenommen wird. Man bezeichne durch $d\tau$ das Volumen, welches ein Element der Luftmasse zur Zeit t einnimmt, multiplicire die Gleichung 7) mit $\frac{\partial \varphi}{\partial t} d\tau$ und integrire nach $d\tau$; die so entstehende Gleichung lässt sich schreiben

$$\frac{d}{dt} \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 d\tau = 2 a^2 \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Delta \varphi \, d\tau, \tag{8}$$

da das Glied, welches bei der Entwickelung der linken Seite von 8) in Folge davon auftritt, dass $d\tau$ mit der Zeit sich ändert, unendlich

klein von höherer Ordnung ist, als die übrigen Glieder. Dieselbe Erwägung ergiebt

$$\frac{d}{dt}\int\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)d\tau$$

$$=2\int\left(\frac{\partial\frac{\partial\varphi}{\partial t}}{\partial x}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\frac{\partial\varphi}{\partial t}}{\partial y}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\frac{\partial\varphi}{\partial t}}{\partial z}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)d\tau.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung — mithin auch ihre linke — ist nach dem durch die Gleichung 14) der sechszehnten Vorlesung ausgesprochenen Green'schen Satze

$$=-2\int\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\Delta\varphi\,d\tau-2\int\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,ds,$$

wo ds ein Element der Oberfläche der Luftmasse und n die nach dem Innern dieser gerichtete Normale von ds bedeutet; es gilt diese Behauptung auch in dem Falle, dass φ vielwerthig ist, weil auch dann die Differentialquotienten von φ nach x, y, z und t einwerthig sind. Die Gleichung 8) wird hiernach

$$\frac{d}{dt}\int\left(\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)d\tau=-2\int\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,ds;$$

sie spricht den Satz von der lebendigen Kraft für den Fall, den wir betrachten, aus. Ist für alle Elemente der Oberfläche und für alle Werthe der Zeit $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$, so ist die gefundene Gleichung integrabel und giebt

$$\int\left(\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)d\tau=C,$$

wo C eine von t unabhängige Grösse bedeutet. Verschwinden überall φ und $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ für $t=0$, so ist $C=0$; es ist dann φ unabhängig von x, y, z und t, es ist dann also immer und überall $\varphi=0$. Wir haben somit bewiesen, dass, wenn φ der Differentialgleichung 7) genügt, für $t=0$, φ und $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ verschwinden und an der Oberfläche für alle Werthe der Zeit $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$ ist, allgemein $\varphi=0$ ist. Es folgt hieraus, dass, wenn φ_1 und φ_2 der Gleichung 7) genügen, für $t=0$

$$\varphi_1=\varphi_2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial t}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}$$

und für die Oberfläche

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}$$

ist, man allgemein $\varphi_1=\varphi_2$ hat.

Für ein gewisses Zeitintervall lässt sich φ für einen jeden Punkt der Luftmasse in einfacher Weise durch die Werthe ausdrücken, die φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ im Anfangspunkte der Zeit besitzen. Um das zu zeigen, wollen wir eine particuläre Lösung der Gleichung 7) benutzen, die im nächsten § abgeleitet werden soll.

§ 2.

Nimmt man an, dass φ von x und y unabhängig ist, so geht die Gleichung 7) über in diese

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \tag{9}$$

Setzt man

$$x = z - at, \quad y = z + at,$$

indem man den Zeichen x und y eine neue Bedeutung giebt, so hat man

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y};$$

die Gleichung 9) wird also

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0;$$

hieraus folgt, dass $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ von y unabhängig, φ also die Summe einer Function von x und einer Function von y sein muss. Die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung 9) ist daher

$$\varphi = F_1 (z - at) + F_2 (z + at), \tag{10}$$

wo F_1 und F_2 willkürliche Functionen der beigefügten Argumente bedeuten.

Gesetzt, es sei

$$\varphi = F_1 (z - at)$$

und es habe F_1 variable Werthe nur, wenn sein Argument zwischen 0 und ε liegt; zur Zeit t hat dann φ variable Werthe nur, wenn z zwischen at und $at + \varepsilon$ liegt, und zwar immer dieselben Werthe, welches auch der Werth von t sein möge; man sagt: eine *Welle* von gleichbleibender Gestalt pflanzt sich mit der Geschwindigkeit a in der Richtung der z-Achse fort. Ist

$$\varphi = F_2 (z + at)$$

und hat F_2 variable Werthe nur, wenn das Argument innerhalb eines gewissen Intervalls liegt, so hat man eine Welle, die mit derselben Geschwindigkeit in der entgegengesetzten Richtung sich fortpflanzt.

Die allgemeinere, durch die Gleichung 10) dargestellte Bewegung bezeichnet man als eine, bei der zwei Wellen oder zwei Wellensysteme vorhanden sind, die mit der Geschwindigkeit a in der Richtung der z-Achse und in der entgegengesetzten Richtung fortschreiten.

Wir wollen nun annehmen, dass eine feste Wand vorhanden sei, für welche $z = l$ ist, so dass für diesen Werth von z immer $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ sein muss; für die betrachtete Luftmasse sei $z < l$ und t sei positiv; zur Zeit $t = 0$ sei eine Welle vorhanden, die in der Richtung der z-Achse fortschreitet und jene Wand noch nicht erreicht hat. Für $t = 0$ und für hinreichend kleine Werthe von t ist dann

$$\varphi = F_1(z - at);$$

die Function $F_1(x)$ ist dabei für alle Werthe von x, die $< l$ sind, bis auf eine additive Constante bestimmt durch die Verdichtungen oder durch die Geschwindigkeiten, die zur Zeit $t = 0$ stattfinden; sie ist für die genannten Werthe von x völlig bestimmt, wenn wir noch festsetzen, dass $F_1(x) = 0$ ist, wenn x nahe $= l$ ist. Wenden wir die Gleichung 10) auf unsern Fall an, so haben wir $F_2(y) = 0$ zu setzen für alle Werthe von y, die kleiner als l sind; für grössere Werthe des Arguments bestimmt sich F_2 aus der Bedingung, die für $z = l$ zu erfüllen ist. Bezeichnet man nämlich durch F_1' und F_2' die nach ihren Argumenten genommenen Differentialquotienten von F_1 und F_2, so muss für alle positiven Werthe von t

$$F_1'(l - at) + F_2'(l + at) = 0$$

sein, oder, wenn man $y = l + at$ setzt, für alle Werthe von y, die grösser als l sind,

$$F_2'(y) = - F_1'(2l - y).$$

Integrirt man diese Gleichung, nachdem man sie mit dy multiplicirt hat und wählt die Constante der Integration so, dass $F_2(y)$ bei $y = l$ stetig bleibt, so erhält man

$$F_2(y) = F_1(2l - y).$$

Diese Gleichung gilt zunächst nur für den Fall, dass $y > l$; man kann sie auch für den Fall, dass $y < l$, in dem $F_2(y) = 0$ ist, gültig machen, indem man $F_1(x)$, welches bisher nur für Werthe von x definirt ist, die kleiner als l sind, für grössere Werthe gleich Null annimmt. Man hat dann allgemein

$$\varphi = F_1(z - at) + F_1(2l - z - at). \qquad 11)$$

Das zweite Glied in diesem Ausdrucke von φ stellt eine Welle dar, die in der der z-Achse entgegengesetzten Richtung fortschreitet; man sagt von dieser, sie sei *reflectirt*, sei entstanden durch *Reflexion* an der bei $z = l$ vorhandenen Wand.

Wir wollen den betrachteten Fall noch durch die Annahme specialisiren, dass l unendlich gross ist und $F_1(x)$ für unendlich grosse positive Werthe von x verschwindet. Für endliche Werthe von t ist dann die Gleichung 11)

$$\varphi = F_1(z - at),$$

d. h. die Bewegung geht so vor sich, als ob die Wand bei $z = l$ gar nicht vorhanden wäre. Für unendlich grosse Werthe von t gilt das aber nicht mehr; es hört an irgend einem Orte auf zu gelten, sobald die an der Wand reflectirte Welle ihn erreicht hat.

Wir haben jetzt *ebene* Wellen untersucht, wir wollen nun *kugelförmige* ins Auge fassen. Wir setzen

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

und nehmen an, dass φ ausser von t nur von r abhängig ist. Da dann

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}$$

ist, so wird die Gleichung 7)

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right),$$

oder nach Multiplication mit r

$$\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2}.$$

Diese Gleichung ist von derselben Form wie 9); ihre allgemeine Lösung ist

$$\varphi = \frac{1}{r}F_1(r - at) + \frac{1}{r}F_2(r + at), \tag{12)}$$

wo F_1 und F_2 wieder willkürliche Functionen bedeuten. Hierdurch sind zwei Systeme von Kugelwellen dargestellt, von denen das eine von dem Anfangspunkt der Coordinaten nach Aussen, das andere von Aussen nach diesem Punkte hin mit der Geschwindigkeit a sich fortpflanzt. Bei diesen Wellen bleiben aber während des Fortschreitens die Geschwindigkeiten und die Aenderungen der Dichtigkeit nicht sich gleich, wie es bei den ebenen Wellen der Fall ist, sondern wegen des Factors $\frac{1}{r}$ nehmen diese Grössen bei den sich ausbreitenden Wellen ab, bei den sich zusammenziehenden zu.

§ 3.

Wir sind jetzt vorbereitet, die am Ende des § 1 ausgesprochene Behauptung zu beweisen. Es seien U und V zwei Functionen der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z, die mit ihren ersten Differentialquotienten innerhalb eines vollständig begrenzten, einfach zusammen-

hängenden Raumes stetig sind; es sei $d\tau$ ein Element dieses Raumes, ds ein Element seiner Oberfläche und n die nach seinem Innern gerichtete Normale von ds; nach dem Green'schen Satze ist dann

$$\int d\tau\,(U \Delta V - V \Delta U) = \int ds \left(V \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial V}{\partial n} \right).$$

In dieser Gleichung setze man U gleich einem Geschwindigkeitspotential φ, wie wir es hier betrachten, das also der Gleichung 7) genügt, und wähle V so, dass

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \Delta V$$

ist; man hat dann

$$\int d\tau\,(\varphi \Delta V - V \Delta \varphi) = \frac{1}{a^2} \int d\tau \left(\varphi \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - V \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)$$
$$= \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} \int d\tau \left(\varphi \frac{\partial V}{\partial t} - V \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$

und erhält also, wenn man durch T einen beliebigen Werth von t bezeichnet,

$$\int_0^T dt \int ds \left(V \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial V}{\partial n} \right) = \frac{1}{a^2} \left[\int d\tau \left(\varphi \frac{\partial V}{\partial t} - V \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right]_0^T. \qquad 13)$$

Den Anfangspunkt der Coordinaten legen wir in einen beliebigen Punkt des Luftraums, auf den φ sich bezieht, und machen

$$V = \frac{F(r + at)}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

aus der Bedeutung, welche die Gleichung 12) hat, folgt, dass dieses V der dafür angenommenen partiellen Differentialgleichung genügt. Ueber die Function F nehmen wir an, dass sie von Null verschiedene Werthe nur hat, wenn ihr Argument zwischen at' und $at' + \varepsilon$ liegt, und hier positiv ist; dabei soll

$$0 < at' < at' + \varepsilon < aT$$

$$\int_{at'}^{at'+\varepsilon} F(r)\,dr = 1$$

und ε unendlich klein sein; es hat dann $F(r)$ Werthe, welche unendlich gross von der Ordnung von $\frac{1}{\varepsilon}$ sind. Der Raum, dessen Element $d\tau$ ist, soll durch zwei Kugelflächen begrenzt sein, deren gemeinsamer Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten ist, und von denen die eine einen Radius hat, der unendlich klein auch gegen ε ist, die andere einen Radius R, der gleich der kürzesten Entfernung des Anfangspunktes von der Oberfläche des Luftraums ist, auf den φ sich bezieht; dabei soll die Grösse t' so gewählt sein, dass

$$at' + \varepsilon < R.$$

Um unter diesen Voraussetzungen die Gleichung 13) zu entwickeln, bemerken wir zunächst, dass das Integral

$$\int ds \left(V \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial V}{\partial n} \right),$$

ausgedehnt über die Kugel vom Radius R, für alle positiven Werthe von t verschwindet, weil hier für diese V und $\frac{\partial V}{\partial n}$ (oder, was dasselbe ist, $-\frac{\partial V}{\partial r}$) gleich Null sind. Ueber die unendlich kleine Kugel ausgedehnt, ist

$$\int ds\, V \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

$$\int ds\, \varphi \frac{\partial V}{\partial n} = -4\pi \varphi_0 F(at),$$

wenn φ_0 den Werth von φ im Punkte $r = 0$ zur Zeit t bedeutet, wie man sieht, wenn man ds durch Polarcoordinaten ausdrückt. Durch Ausführung der Integration nach t findet man hiernach die linke Seite der Gleichung 13)

$$= \frac{4\pi}{a} \varphi_0,$$

wo φ_0 auf die Zeit t' sich bezieht.

Der in den eckigen Klammern auf der rechten Seite derselben Gleichung stehende Ausdruck verschwindet für $t = T$, weil V und $\frac{\partial V}{\partial t}$ für diesen Werth von t gleich Null sind; um seinen Werth für $t = 0$ zu finden, führen wir die Polarcoordinaten r, ϑ, ω ein und bezeichnen durch F' den Differentialquotienten der Function F nach ihrem Argument. Die rechte Seite der Gleichung 13) wird dann

$$\frac{1}{a^2} \int\int\int \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\omega\, r\, dr \left(F(r) \frac{\partial \varphi}{\partial t} - a F'(r)\, \varphi \right),$$

wo $t = 0$ in φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ zu setzen und zu integriren ist in Bezug auf ϑ von 0 bis π, in Bezug auf ω von 0 bis 2π und in Bezug auf r von 0 bis R. Die letzte dieser Integrationen lässt sich ausführen; in der That hat man

$$\int_0^R r\, dr\, F(r) \frac{\partial \varphi}{\partial t} = at' \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$\int_0^R r\, dr\, F'(r)\, \varphi = \Big[r \varphi F(r) \Big]_0^R - \int_0^R \frac{\partial (r\varphi)}{\partial r} F(r)\, dr$$

$$= -\frac{\partial (t'\varphi)}{\partial t'},$$

wo in $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ und φ auf der rechten Seite der Gleichheitszeichen

$$r = at'$$

zu setzen ist. Die Gleichung 13) giebt daher

$$4\pi\varphi_0 = \int\int \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\omega \left(t' \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial (t'\varphi)}{\partial t'}\right);$$

sie drückt den Werth, den φ im Punkte $r = 0$ zur Zeit t' hat, aus durch die Werthe, die $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ in der Kugelfläche und φ in und unendlich nahe an der Kugelfläche, welche mit dem Radius at' um den Punkt $r = 0$ beschrieben ist, zur Zeit $t = 0$ besitzt. Dieser Punkt kann beliebig in dem zu betrachtenden Luftraume gewählt werden; auch t' ist beliebig, nur muss es in dem Intervall von 0 bis $\frac{R}{a}$ liegen. Sind φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ für $t = 0$ überall gegeben, so kann man also φ für jeden Punkt und ein gewisses Zeitintervall ermitteln; ist der Luftraum als unbegrenzt zu betrachten, so findet man auf diese Weise φ vollständig.

§ 4.

Wir haben früher die Bewegung eines festen Körpers in einer als unbegrenzt zu betrachtenden Flüssigkeit ausführlich unter der Voraussetzung untersucht, dass diese als incompressibel angesehen werden kann; wir wollen nun eine solche Bewegung unter den einfachsten Annahmen mit Rücksicht auf die dabei eintretenden Dichtigkeitsänderungen verfolgen. Wir fassen die Luftbewegung ins Auge, für welche

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{F(r - at)}{r}\right) \tag{14)}$$

ist, wo r wieder die Linie bezeichnet, die vom Anfangspunkte der rechtwinkligen Coordinaten nach dem Punkte gezogen ist, auf den φ sich bezieht, F eine Function, über die zu verfügen wir uns vorbehalten; diesen Ausdruck kann man für das Geschwindigkeitspotential annehmen, da er der Gleichung 7) genügt. Gleichbedeutend mit der Gleichung 14) ist

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{F(r - at)}{r}\right) \cdot \frac{\partial r}{\partial z}$$

oder

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{F(r - at)}{r}\right) \cdot \cos\vartheta,$$

wenn ϑ den Winkel zwischen der z-Achse und der Richtung von r bedeutet. Die Componente der Geschwindigkeit eines Lufttheilchens nach der Richtung von r, d. h. $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$, ist daher bestimmt durch

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{F(r-at)}{r}\right)\cdot \cos\vartheta .$$

Nun sei R ein specieller Werth von r und

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2}\left(\frac{F(R-at)}{R}\right) = f(t); \qquad 15)$$

für $r = R$ ist dann

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = f(t)\cos\vartheta .$$

Hieraus folgt, dass die Gleichung 14) für den Fall gilt, dass eine feste Kugel vom Radius R, deren Mittelpunkt dem Anfangspunkt der Coordinaten unendlich nahe ist, in der Richtung der z-Achse so sich bewegt, dass $f(t)$ ihre unendlich kleine Geschwindigkeit zur Zeit t ist. Ist f beliebig gegeben, so dient die Gleichung 15) zur Bestimmung von F; bezeichnet man den ersten und zweiten Differentialquotienten der Function F nach ihrem Argument durch F' und F''; so ist nämlich

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2}\left(\frac{F(R-at)}{R}\right) = \frac{2}{R^3}F(R-at) - \frac{2}{R^2}F'(R-at) + \frac{1}{R}F''(R-at);$$

setzt man

$$F(R-at) = U(t) \quad \text{oder kürzer} \quad = U, \qquad 16)$$

so hat man

$$F'(R-at) = -\frac{1}{a}\frac{dU}{dt}, \qquad F''(R-at) = \frac{1}{a^2}\frac{d^2U}{dt^2};$$

die Gleichung 15) wird daher

$$\frac{2}{R^3}U + \frac{2}{aR^2}\frac{dU}{dt} + \frac{1}{a^2R}\frac{d^2U}{dt^2} = f(t). \qquad 17)$$

Die Integration dieser Differentialgleichung bietet keine Schwierigkeit dar; es seien λ_1 und λ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$2\frac{a^2}{R^2} + 2\frac{a}{R}\lambda + \lambda^2 = 0,$$

d. h. es sei

$$\lambda_1 = -\frac{a}{R}(1+i), \qquad \lambda_2 = -\frac{a}{R}(1-i), \qquad i = \sqrt{-1},$$

dann ist

$$U = U_1 e^{\lambda_1 t} + U_2 e^{\lambda_2 t},$$

wenn U_1 und U_2 als Functionen von t aus den Gleichungen

$$\frac{dU_1}{dt}e^{\lambda_1 t} + \frac{dU_2}{dt}e^{\lambda_2 t} = 0$$

$$\lambda_1\frac{dU_1}{dt}e^{\lambda_1 t} + \lambda_2\frac{dU_2}{dt}e^{\lambda_2 t} = a^2 R f(t)$$

bestimmt werden, d. h. wenn

$$U_1 = \frac{a^2 R}{\lambda_1 - \lambda_2} \int f(t)\, e^{-\lambda_1 t}\, dt$$

$$U_2 = \frac{a^2 R}{\lambda_2 - \lambda_1} \int f(t)\, e^{-\lambda_2 t}\, dt$$

gemacht wird, wo die unteren Grenzen der beiden Integrale willkürliche Constanten sind. Hat man U ermittelt, so findet man φ aus den Gleichungen 14) und 16), von denen die zweite

$$F(r - at) = U\left(t - \frac{r-R}{a}\right) \qquad 18)$$

giebt.

Wir wollen nun über die Function $f(t)$ die Voraussetzung machen, dass sie für alle negativen Werthe verschwindet, dass also die Kugel zur Zeit $t = 0$ sich zu bewegen anfängt; zugleich wollen wir als untere Grenze der in den Ausdrücken von U_1 und U_2 vorkommenden Integrale 0 annehmen; es verschwindet dann $U(t)$ für alle negativen Werthe von t und es verschwinden φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, wenn $t = 0$ und $r > R$ ist; die gemachte Annahme entspricht also dem Falle, dass zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit und die Verdichtung aller Lufttheilchen gleich Null sind. Dabei ist

$$F(r - at) = 0, \quad \text{wenn} \quad at < r - R;$$

ein jedes Lufttheilchen bleibt in Ruhe, so lange diese Ungleichung besteht.

Für positive Werthe von t kann $f(t)$ noch willkürlich gewählt werden. Gesetzt, es sei für diese

$$f(t) = c,$$

wo c eine Constante bedeutet, oder, was im Resultat auf dasselbe hinauskommt, es nehme, während t von Null bis zu einem unendlich kleinen Werthe wächst, $f(t)$ stetig von Null bis zu dem constanten Werthe c zu; es ergiebt sich dann

$$U(t) = \frac{a^2 R c}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\frac{1}{\lambda_1}(e^{\lambda_1 t} - 1) - \frac{1}{\lambda_2}(e^{\lambda_2 t} - 1)\right)$$

oder, wenn man die Werthe von λ_1 und λ_2 einführt,

$$U(t) = \frac{R^3 c}{2}\left(1 - \sqrt{2}\, e^{-\frac{at}{R}} \cos\left(\frac{at}{R} - \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Nach 18) ist daher, wenn $at > r - R$,

$$F(r - at) = \frac{R^2 c}{2}\left(1 - \sqrt{2}\, e^{\frac{r-R-at}{R}} \cos\left(\frac{r-R-at}{R} + \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Für sehr grosse Werthe von t wird

$$F(r - at) = \frac{R^2 c}{2},$$

und es erhält das Geschwindigkeitspotential φ denselben Werth, den wir früher bei der Untersuchung der Bewegung einer Kugel in einer incompressibeln Flüssigkeit gefunden haben.

Es lässt sich U auch leicht berechnen, wenn man für positive Werthe von t

$$f(t) = c \cos \varkappa a t \tag{19}$$

annimmt, wo $\varkappa$ eine Constante bedeutet; man kommt dabei am bequemsten zum Ziele, wenn man benutzt, dass die für $f(t)$ angenommene Function der reelle Theil von

$$c e^{i \varkappa a t}$$

ist, diese Exponentialgrösse für $f(t)$ in den Ausdruck von U einsetzt und den reellen Theil desselben bildet; diese Methode ist richtig, weil, wenn $f(t)$ der Summe zweier Functionen von t gleichgesetzt wird, man für U die Summe derjenigen Ausdrücke erhält, die für U gelten, wenn $f(t)$ gleich der einen oder gleich der andern jener Functionen ist, und weil U reell ist, wenn $f(t)$ es ist; so findet man $U(t)$ gleich dem reellen Theile von

$$\frac{R^3 c}{2}\left(\frac{e^{i\varkappa a t} - e^{-\frac{at}{R}} e^{-i\frac{at}{R}}}{1 + \varkappa R - i} + \frac{e^{i\varkappa a t} - e^{-\frac{at}{R}} e^{i\frac{at}{R}}}{1 - \varkappa R + i}\right).$$

Für sehr grosse Werthe von t ist hiernach

$$U = A \cos \varkappa a t + B \sin \varkappa a t, \tag{20}$$

wo A und B Constanten sind. Da dieser Ausdruck für U der reelle Theil von

$$(A - iB)(\cos \varkappa a t + i \sin \varkappa a t)$$

ist, so müssen dieselben der Gleichung

$$\frac{R^3 c}{2}\left(\frac{1}{1 + \varkappa R - i} + \frac{1}{1 - \varkappa R + i}\right) = A - iB$$

oder der Gleichung

$$A - iB = \frac{R^3 c}{2 - \varkappa^2 R^2 + i 2 \varkappa R}$$

genügen, woraus

$$A = R^3 c \, \frac{2 - \varkappa^2 R^2}{4 + \varkappa^4 R^4}, \quad B = R^3 c \, \frac{2 \varkappa R}{4 + \varkappa^4 R^4}$$

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \frac{R^3 c}{\sqrt{4 + \varkappa^4 R^4}}$$

folgt. Diese Werthe von A und B findet man auch leicht aus der Gleichung 17), wenn man in diese aus 19) und 20) die Ausdrücke für $f(t)$ und U einsetzt.

Für das Geschwindigkeitspotential φ ergiebt sich aus 20) mit Hülfe von 18) und 14)

$$U_1 = \frac{a^2 R}{\lambda_1 - \lambda_2} \int f(t)\, e^{-\lambda_1 t}\, dt$$

$$U_2 = \frac{a^2 R}{\lambda_2 - \lambda_1} \int f(t)\, e^{-\lambda_2 t}$$

gemacht wird, wo die unteren Grenzen ... kürliche Constanten sind. Hat man ... aus den Gleichungen 14) und 16), v ...

$$F(r - at) =$$

giebt.

... 21) ...ung dar... gt, ein ein... die eben ge... Schwingungs... wir die Dauer ... von ... *ungszahl* des Tones. ...er Schwingungsdauer

Wir wollen nun über... machen, dass sie für alle ... die Kugel zur Zeit $t =$ ... wir als untere Gren... kommenden Integr...

alle negativen V... ...ones. Unter der *Intensität* eines Tones $t = 0$ und r ...stehen wir eine Grösse, die mit dem Qua- Falle, dass ... Verdichtung, welche ein Lufttheilchen erleidet, aller Luf... ist, also proportional mit dem Werthe der Maxima,

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2$$

ei... im Laufe der Zeit hat. Bei der durch die Gleichung 21) dargestellten Luftbewegung ist die Intensität des Tones von r und ϑ abhängig; von r in ziemlich complicirter Weise, von ϑ einfach so, dass sie mit $\cos^2 \vartheta$ proportional ist; sie ist also gleich Null in der Ebene, die durch den Mittelpunkt der schwingenden Kugel, senkrecht zur Schwingungsrichtung dieser, gelegt ist.

§ 5.

In der achtzehnten Vorlesung haben wir den Fall untersucht, dass zwei unendlich kleine Kugeln in einer incompressibeln Flüssigkeit sich bewegen, und gesehen, dass in ihm das Geschwindigkeitspotential gleich der Summe der Werthe zu setzen ist, die es hat, wenn nur die eine oder die andere der beiden Kugeln vorhanden ist, für alle Flüssigkeitstheile, die nicht unendlich nahe an einer der Kugeln liegen. Es gilt dieses auch, wenn die Dichtigkeitsänderungen der Flüssigkeit zu berücksichtigen sind. Stellen wir uns zwei unendlich kleine, gleiche Kugeln vor, deren Mittelpunkte auf der z-Achse unendlich kleine Pendelschwingungen der Art ausführen, dass ihre Geschwindigkeiten in jedem Augenblicke gleich und entgegengesetzt gerichtet sind. Es seien r und r' die Entfernungen des Punktes, auf den φ sich bezieht, von den Mittelpunkten der Kugeln; die Luftbewegung, die der am Ende des vorigen § untersuchten

richt, ist dann, wenn der Anfangspunkt der Zeit passend ver-
rd, dargestellt durch die Gleichung

$$\varphi = C \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\sin \varkappa (r - a t)}{r} - \frac{\sin \varkappa (r' - a t)}{r'}\right),$$

nstante bedeutet.

die Punkte, in denen die Intensität des Tones gleich
immer verschwindet, so finden wir für diese

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\sin \varkappa r}{r} - \frac{\sin \varkappa r'}{r'}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\cos \varkappa r}{r} - \frac{\cos \varkappa r'}{r'}\right) = 0.$$

Abstand des Punktes, auf den sich φ bezieht,
so sind dieses zwei Gleichungen für ϱ und z. Im
n kann daher die Intensität des Tones nur in einzelnen
inien verschwinden, deren gemeinsame Achse die z-Achse ist.
Es giebt aber eine *Fläche*, in der die Intensität $= 0$ ist, wenn $\frac{1}{\varkappa}$, d. h. wenn die Wellenlänge des Tones unendlich gross gegen r und r' ist; dann wird die erste jener beiden Gleichungen überall erfüllt und die zweite ist

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) = 0$$

oder, wenn für die Mittelpunkte der beiden Kugeln $z = c$ und $z = -c$ ist,

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{(z-c)^2 + \varrho^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z+c)^2 + \varrho^2}}\right) = 0.$$

Diese Gleichung stellt eine Rotationsfläche dar, deren erzeugende Curve eine hyperbelartige Gestalt hat, durch die Mittelpunkte der beiden Kugeln geht und Asymptoten besitzt, die mit der z-Achse Winkel bilden, deren Cosinus $\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ sind.

In der Nähe der Enden einer tönenden Stimmgabel ist durch den Versuch eine Fläche von ähnlicher Art nachgewiesen, in der die Intensität des Tones verschwindet.

Vierundzwanzigste Vorlesung.

(Einfache Töne. Anwendung des Green'schen Satzes auf das Geschwindigkeitspotential eines einfachen Tones. Ebene Wellen. Stehende und fortschreitende Schwingungen. Eigentöne einer Luftsäule. Schwingungen der Luft in einer offenen Röhre. Resonanz. Kugelförmige Wellen. Schwingungen der Luft in einem Raume, dessen Dimensionen gegen die Wellenlänge unendlich klein sind. Cubische Pfeifen. Berechnung der Resonanz und Tonhöhe cubischer Pfeifen, wenn die Oeffnung eine Ellipse oder ein Kreis ist. Berechnung der Resonanz und Tonhöhe cylindrischer Pfeifen für gewisse Fälle.)

§ 1.

Wir wollen uns jetzt näher mit den Bewegungen der Luft beschäftigen, die einem einfachen Tone entsprechen, und eine Reihe von particulären Lösungen der Differentialgleichung, mit der wir es hier zu thun haben, aufstellen, welche für die Akustik und namentlich für die Theorie der Pfeifen von hervorragendem Interesse sind. Für einen einfachen Ton von der Schwingungszahl n ist das Geschwindigkeitspotential von der Form

$$\varphi = \psi' \cos 2\pi n t + \psi'' \sin 2\pi n t, \qquad 1)$$

wo ψ' und ψ'' Functionen von x, y, z sind; aus der Gleichung 7) der vorigen Vorlesung folgt für jede von diesen, wenn man wieder

$$\varkappa = \frac{2\pi n}{a}$$

setzt, dass sie der partiellen Differentialgleichung

$$\varDelta \psi + \varkappa^2 \psi = 0 \qquad 2)$$

genügt.

Bevor wir auf die Betrachtung specieller Fälle eingehen, wollen wir anführen, was der Green'sche Satz über die Functionen ergiebt, welche in einem vollkommen begrenzten Raume dieser Differentialgleichung genügen und mit ihren ersten Differentialquotienten einwerthig und stetig sind. Eine Lösung der Gleichung 2) ist

$$\frac{\cos \varkappa r}{r},$$

wo r die Entfernung des variabeln Punktes von irgend einem festen Punkte bedeutet; man kann das leicht durch Rechnung direct beweisen oder auch aus der Gleichung 12) der vorigen Vorlesung ableiten

In der Gleichung, die den Ausgangspunkt der Betrachtungen des § 3 der vorigen Vorlesung gebildet hat und die den Green'schen Satz, soweit wir ihn hier gebrauchen, ausspricht, setzen wir

$$U = \frac{\cos \varkappa r}{r}, \quad V = \psi,$$

wobei wir den Anfangspunkt von r in dem Raume annehmen, in dem ψ die genannten Eigenschaften hat, und wenden sie auf *den* Raum an, der von diesem übrig bleibt, wenn man eine unendlich kleine Kugel ausschliesst, deren Mittelpunkt der Anfangspunkt von r ist. Durch eine Betrachtung, wie sie im § 3 der vorigen Vorlesung und für einfachere Bedingungen im § 4 der sechszehnten durchgeführt ist, findet man dann

$$\psi = \frac{1}{4\pi}\int ds\, \psi \frac{\partial \frac{\cos \varkappa r}{r}}{\partial n} - \frac{1}{4\pi}\int ds \frac{\cos \varkappa r}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n},$$

wo auf der linken Seite des Gleichheitszeichens ψ sich auf den Anfangspunkt von r bezieht, und ds ein Element der Oberfläche des ursprünglich gedachten Raumes bezeichnet. Wir heben hervor, dass, wie diese Gleichung zeigt, bei den Voraussetzungen, die wir über ψ gemacht haben, alle höheren Differentialquotienten desselben stetig sind.

Wir fassen nun den Fall ins Auge, dass φ, also auch ψ (mit welchem Zeichen wir jede der beiden Grössen ψ' und ψ'' bezeichnen wollen), von x und y unabhängig ist. Die Gleichung 2) ist dann

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} = -\varkappa^2 \psi$$

und ihr allgemeines Integral

$$\psi = A \cos \varkappa z + B \sin \varkappa z.$$

Wir haben daher

$$\begin{aligned}\varphi = {} & (A' \cos \varkappa z + B' \sin \varkappa z) \cos 2\pi n t \\ & + (A'' \cos \varkappa z + B'' \sin \varkappa z) \sin 2\pi n t,\end{aligned} \tag{3}$$

wo A', B', A'', B'' willkürliche Constanten bedeuten. Diese Gleichung lässt sich auch schreiben

$$\varphi = A \cos \varkappa (z - z_0) \cos 2\pi n (t - t_0) + B \sin \varkappa (z - z_0) \sin 2\pi n (t - t_0),$$

wo A, B, z_0, t_0 neue Constanten sind, oder, wenn man den Anfangspunkt der z und den Anfangspunkt der Zeit passend verlegt,

$$\varphi = A \cos \varkappa z \cos 2\pi n t + B \sin \varkappa z \sin 2\pi n t. \tag{4}$$

Wir discutiren zuerst die Fälle, dass A oder B oder $A - B$ oder $A + B$ verschwindet.

Ist

$$B = 0,$$

so wird

$$\varphi = \quad A \cos \varkappa z \cos 2\pi n t$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = - \varkappa A \sin \varkappa z \cos 2\pi n t$$

$$\sigma = -\frac{1}{a^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \quad \frac{\varkappa}{a} A \cos \varkappa z \sin 2\pi n t.$$

Ist ζ die Verrückung, die ein Lufttheilchen zur Zeit t in der Richtung der z-Achse aus einer gewissen Lage, seiner Mittellage, erlitten hat, so ist, da ζ unendlich klein ist,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

und

$$\zeta = -\frac{A}{a} \sin \varkappa z \sin 2\varkappa n t.$$

Man sieht hieraus, dass ein jedes Lufttheilchen gerade so sich bewegt, wie ein Punkt eines Pendels bei unendlich kleinen Schwingungen; $-\frac{A}{a} \sin \varkappa z$, oder auch der absolute Werth dieses Grösse, wird die *Amplitude*, $2\pi n t$, oder auch der Ueberschuss hiervon über das zunächst liegende Vielfache von 2π, die *Phase* der Schwingungen des betrachteten Theilchens genannt. Die Phase für einen Augenblick ist überall dieselbe; die Amplitude ändert sich mit z. Nennt man λ die Wellenlänge, d. h. setzt man

$$\lambda = \frac{2\pi}{\varkappa},$$

so ist die Amplitude $= 0$, wo z ein Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$, ein Maximum, wo z ein ungerades Vielfaches von $\frac{\lambda}{4}$ ist; jene Orte nennt man *Knoten*, diese *Bäuche*. Die Verdichtung σ ändert sich nach einem ähnlichen Gesetze, wie die Verrückung ζ; ihre Maxima finden aber in den Knoten statt, und in den Bäuchen ist sie $= 0$.

Ganz Aehnliches gilt, wenn in der Gleichung 4) nicht B, sondern A verschwindet.

Schwingungen der betrachteten Art, nämlich solche, bei denen die Phase für einen Augenblick überall dieselbe ist, nennt man *stehende* Schwingungen.

Ist

$$A = \pm B,$$

so hat man sogenannte *fortschreitende* Schwingungen; es ist dann

$$\varphi = \quad A \cos \varkappa (z \mp at)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = - \varkappa A \sin \varkappa (z \mp at)$$

$$\zeta = \mp \frac{A}{a} \cos \varkappa (z \mp at)$$

$$\sigma = -\frac{1}{a^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mp \frac{\varkappa}{a} A \sin \varkappa (z \mp at);$$

je nachdem die oberen oder unteren Vorzeichen gelten, schreiten die Schwingungen in der Richtung der z-Achse oder in der entgegengesetzten Richtung fort; die Amplitude ist hier überall dieselbe, die Phase für einen Augenblick ändert sich von Ort zu Ort.

Die Bewegung, die durch die Gleichung 4) dargestellt ist, wenn die Constanten A und B keiner der gemachten Annahmen genügen, kann man als zusammengesetzt ansehen aus irgend zwei der 4 Schwingungsarten, die wir erörtert haben. Direct findet man aus der Gleichung 4)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = - \varkappa A \sin \varkappa z \cos 2\pi n t + \varkappa B \cos \varkappa z \sin 2\pi n t$$

$$= \varkappa \sqrt{A^2 \sin^2 \varkappa z + B^2 \cos^2 \varkappa z} \sin (2\pi n t - \delta)$$

$$\zeta = - \frac{1}{a} \sqrt{A^2 \sin^2 \varkappa z + B^2 \cos^2 \varkappa z} \cos (2\pi n t - \delta)$$

$$\sigma = \frac{\varkappa}{a} A \cos \varkappa z \sin 2\pi n t - \frac{\varkappa}{a} B \sin \varkappa z \cos 2\pi n t$$

$$= \frac{\varkappa}{a} \sqrt{A^2 \cos^2 \varkappa z + B^2 \sin^2 \varkappa z} \sin (2\pi n t - \varepsilon),$$

wo

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{A}{B} \operatorname{tg} \varkappa z, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{B}{A} \operatorname{tg} \varkappa z.$$

Hiernach ändert sich mit z sowohl die Amplitude, als die Phase für einen Augenblick. Die Amplitude verschwindet an keinem Orte; ist

$$A^2 > B^2,$$

so finden ihre Minima statt, wo z ein Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$, ihre Maxima, wo z ein ungerades Vielfaches von $\frac{\lambda}{4}$ ist. Auch hier nennt man jene Orte Knoten, diese Bäuche, und auch hier ist die Aenderung der Dichtigkeit in den Knoten ein Maximum, in den Bäuchen ein Minimum.

Ist die Luftmasse durch eine feste, zur z-Achse senkrechte Ebene begrenzt, so muss für diese immer

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

sein. Stellen, an denen die Geschwindigkeit immer gleich Null ist, finden sich nach den durchgeführten Betrachtungen aber nur bei *stehenden* Schwingungen; es müssen also in dem bezeichneten Falle die Schwingungen stehende und es muss die begrenzende Ebene ein Knoten sein.

Ist die Luftmasse durch zwei feste, zur z-Achse senkrechte Ebenen begrenzt, so muss jede von diesen ein Knoten, ihr Abstand also ein Vielfaches der halben Wellenlänge sein. Ausser durch diese

beiden Ebenen wollen wir uns die Luftmasse durch eine feste, cylindrische Röhre, deren Achse der z-Achse parallel ist, von beliebigem Querschnitt begrenzt denken; das ist erlaubt, da der an der Röhrenwand zu erfüllenden Bedingung, der Bedingung $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ nämlich, in Folge davon, dass φ von x und y unabhängig ist, genügt wird. Ist für die Endflächen der Röhre

$$z = 0 \quad \text{und} \quad z = l,$$

so ist also

$$l = h \frac{\lambda}{2} = h \frac{\pi}{\varkappa} = h \frac{a}{2n},$$

wo h eine ganze Zahl bedeutet. Die bei gegebenem Werthe von l hierdurch bestimmten Werthe von n sind die Schwingungszahlen der sogenannten *Eigentöne* der betrachteten Luftsäule. Die Schwingungen dieser können gemäss der Gleichung

$$\varphi = A \cos \varkappa z \cos 2\pi n (t - t_0)$$

geschehen, wo A und t_0 willkürliche Constanten sind.

Wir wollen jetzt annehmen, dass der Querschnitt $z = 0$ der Röhre fest sei, der Querschnitt $z = l$ aber von Aussen in einer solchen Bewegung erhalten werde, dass er zur Zeit t die Geschwindigkeit

$$G \cos 2\pi n t$$

in der Richtung der z-Achse habe, wo G und n beliebig gegebene Constanten bedeuten. Dieser Ausdruck muss dann immer dem Werthe gleich sein, den $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ für $z = l$ annimmt; hieraus folgt

$$\varphi = - \frac{G}{\varkappa \sin \varkappa l} \cos \varkappa z \cos 2\pi n t.$$

Bei derselben Bewegung des Querschnitts $z = l$ hängt daher die Bewegung der Lufttheilchen wesentlich von dem Werthe von $\varkappa l$ ab; sie wird unendlich, wenn $\sin \varkappa l = 0$ ist, d. h. wenn n einem der Eigentöne der Luftsäule entspricht.

Die hier vorausgesetzten Bedingungen lassen sich näherungsweise erfüllen, wenn man eine Glasröhre durch zwei Stempel verschliesst, von denen der eine fest, der andere etwas beweglich und mit dem Stiele einer Stimmgabel oder einem andern Körper verbunden ist, der kräftig schwingen kann. Wenn dieser Körper Schwingungen ausführt, deren Dauer nahe der Schwingungsdauer eines der Eigentöne der abgegrenzten Luftsäule gleich ist, so geräth diese in so intensive Schwingungen, dass ein feines Pulver, welches in die Röhre gebracht ist, lebhaft bewegt wird und die Lage der Knoten mit Genauigkeit zu erkennen erlaubt. Dass bei keinem Werthe von n die Bewegung der Luft ins Unbegrenzte wächst, liegt daran, dass die Röhrenwände

nicht absolut fest sind, dass der bewegliche Stempel nicht vollkommen dicht schliesst, und hauptsächlich an der Reibung der Luft. Auf der angedeuteten Erscheinung beruht eine, von Kundt angegebene, Methode zur Messung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in verschiedenen Gasen.

§ 2.

Wir stellen uns jetzt wieder eine Luftsäule von der Länge l, wie bei unserer letzten Untersuchung vor, nehmen aber an, dass in dem Querschnitt $z = 0$ nicht die Geschwindigkeit, sondern die Verdichtung immer gleich Null ist. Bildet der Querschnitt $z = l$ eine feste Wand, so sind Schwingungen nach der Gleichung

$$\varphi = A \sin \varkappa z \cos 2\pi n (t - t_0)$$

möglich, wenn $\cos \varkappa l = 0$ d. h. l gleich einem ungeraden Vielfachen der Viertelwellenlänge ist. Wird der Querschnitt $z = l$ so bewegt, dass seine Geschwindigkeit zur Zeit t

$$= G \cos 2\pi n t$$

ist, so ist

$$\varphi = \frac{G}{\varkappa \cos \varkappa l} \sin \varkappa z \cos 2\pi n t. \tag{5}$$

D. Bernoulli, Euler und Lagrange haben angenommen, dass, wenn die cylindrische Röhre bei $z = 0$ in den unendlichen Luftraum mündet, hier die Verdichtung immer gleich Null ist, dass also die Luft in einer Röhre, die einerseits geschlossen, andererseits offen ist, den aufgestellten Gleichungen gemäss schwingen kann. Helmholtz*) hat gezeigt, in wie weit diese Annahme richtig ist. Sie setzt voraus, dass die Dimensionen des Querschnittes unendlich klein gegen die Länge der Röhre und gegen die Wellenlänge sind; dabei darf die Röhre auf einer unendlich kleinen Strecke an der Mündung erweitert oder in endlichem Verhältniss zusammengezogen sein. Für Punkte im Innern der Röhre, die in endlicher Entfernung von der Mündung liegen, geben die aufgestellten Gleichungen dann das Geschwindigkeitspotential bis auf einen unendlich kleinen Bruchtheil seines Werthes richtig an, wenn l nicht bis auf unendlich Kleines einem ungeraden Vielfachen der Viertelwellenlänge gleich ist. Ueber den Zusammenhang der Bewegung innerhalb der Röhre und ausserhalb derselben lernt man bei der genannten Annahme Nichts. Wir wollen jetzt, ohne diese Annahme zu machen, die Luftschwingungen in einer einseitig offenen Röhre untersuchen, deren Querschnitt Dimensionen hat, die gegen ihre Länge und gegen die Wellenlänge unendlich klein sind.

*) Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden, Crelle's Journal, Bd. 57.

Wir denken uns einen Luftraum, der sich in die Unendlichkeit erstreckt, also nur theilweise durch Wände begrenzt ist; einen Theil dieser Wände soll eine cylindrische Röhre bilden, die der z-Achse parallel ist und die in der Nähe ihrer Mündung von der Cylinderform abweichen kann; die Dimensionen ihres Querschnitts wollen wir als endlich bezeichnen, ihre Länge und die Wellenlänge als unendlich gross, wobei dann $\varkappa$ unendlich klein ist. Wir nehmen an, dass im Innern der Röhre in unendlich grosser Entfernung von der Mündung ebene Wellen vorhanden sind, legen den Anfangspunkt der z in die Region der ebenen Wellen, aber so, dass sein Abstand von der Mündung noch unendlich klein gegen die Wellenlänge ist, und lassen die positive z-Achse nach dem Grunde der Röhre gekehrt sein. Der Querschnitt $z = 0$ theilt den ganzen Luftraum, den wir zu betrachten haben, in zwei Theile; wir fassen diese einzeln ins Auge. Für den einen, der ganz in der Röhre sich befindet, und für den z überall positiv ist, gilt die Gleichung 3), d. h.

$$\varphi = (A' \cos \varkappa z + B' \sin \varkappa z) \cos 2\pi n t + (A'' \cos \varkappa z + B'' \sin \varkappa z) \sin 2\pi n t, \tag{6}$$

für den andern die allgemeinere Gleichung 1), d. h.

$$\varphi = \psi' \cos 2\pi n t + \psi'' \sin 2\pi n t.$$

Für den Querschnitt $z = 0$ müssen diese beiden Ausdrücke von φ und die aus ihnen sich ergebenden Ausdrücke von $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ einander gleich sein, da die Dichtigkeit und die Geschwindigkeit überall sich stetig ändern soll. Die Gleichungen, welche dieses aussprechen, wollen wir bilden, nachdem wir mit dem zweiten Ausdruck von φ eine Veränderung vorgenommen haben. Wir wollen in ihn specielle Werthe von ψ' und ψ'' einführen, die sich auf eine gewisse Bewegung des Querschnittes $z = 0$ beziehen, und die wir f' und f'' nennen wollen; es sei

$$\varphi = f' \cos 2\pi n t + f'' \sin 2\pi n t,$$

wenn für den Querschnitt $z = 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \cos 2\pi n t$$

ist und an den übrigen Theilen der Grenze des Luftraumes, auf den wir ψ' und ψ'' beziehen, der nach der Normale genommene Differentialquotient von φ verschwindet. Es sind dann f' und f'' Functionen von x, y, z, die die Eigenschaft haben, dass für den Querschnitt $z = 0$

$$\frac{\partial f'}{\partial z} = 1, \qquad \frac{\partial f''}{\partial z} = 0 \tag{7}$$

ist. Aus dieser speciellen Lösung der für φ geltenden Differentialgleichung erhalten wir eine allgemeinere, wenn wir sie mit dem con-

stanten Factor c multipliciren und zu t die Constante δ addiren; setzen wir

$$\varphi = c\left(f' \cos 2\pi n (t + \delta) + f'' \sin 2\pi n (t + \delta)\right),$$

so ist für den Querschnitt $z = 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = c \cos 2\pi n (t + \delta)$$

und an den übrigen Theilen der Grenze ist dieselbe Bedingung, wie früher, erfüllt. Denken wir uns c und δ als variabel, so ist an jedem Orte die grösste Verdichtung mit c, die Intensität des Tones also mit c^2 proportional, dabei aber mit dem Orte veränderlich. Führen wir an Stelle von c und δ zwei andere Grössen c' und c'' ein, indem wir

$$c' = c \cos 2\pi n \delta, \qquad c'' = - c \sin 2\pi n \delta$$

setzen, so wird

$$\varphi = (c'f' - c''f'') \cos 2\pi n t + (c'f'' + c''f') \sin 2\pi n t,$$

für den Querschnitt $z = 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = c' \cos 2\pi n t + c'' \sin 2\pi n t$$

und die Intensität des Tones proportional mit

$$c'^2 + c''^2.$$

Diesen Ausdruck von φ vergleichen wir nun mit dem in 6) gegebenen, der für die Region der ebenen Wellen gilt, und stellen die Bedingungen dafür auf, dass für den Querschnitt $z = 0$ aus beiden dieselben Werthe für die Verdichtung und für die Geschwindigkeit sich ergeben. Bezeichnen wir die Werthe, die f' und f'' in dem Querschnitt $z = 0$ besitzen, durch f_0' und f_0'', so werden dieselben bei Rücksicht auf 7)

$$\begin{aligned} A' &= c'f_0' - c''f_0'' \qquad & \varkappa B' &= c' \\ A'' &= c'f_0'' + c''f_0' \qquad & \varkappa B'' &= c''. \end{aligned} \tag{8}$$

Nun wollen wir annehmen, dass der Querschnitt der Röhre $z = l$, wo l von der Ordnung der Wellenlänge ist, von Aussen her in einer solchen Bewegung erhalten werde, dass er zur Zeit t die Geschwindigkeit

$$G \cos 2\pi n t$$

in der Richtung der z-Achse habe. Dieser Ausdruck muss dann dem Werthe gleich sein, den $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ der Gleichung 6) zufolge für $z = l$ hat; d. h. es muss

$$G = \varkappa(- A' \sin \varkappa l + B' \cos \varkappa l)$$
$$0 = \varkappa(- A'' \sin \varkappa l + B'' \cos \varkappa l)$$

sein. Eliminirt man aus diesen Gleichungen und den Gleichungen 8) die Grössen A', B', A'', B'', so erhält man

$$\begin{aligned} G &= c'(\cos \varkappa l - \varkappa f_0' \sin \varkappa l) + c'' \varkappa f_0'' \sin \varkappa l \\ 0 &= c' \varkappa f_0'' \sin \varkappa l - c''(\cos \varkappa l - \varkappa f_0' \sin \varkappa l). \end{aligned} \tag{9}$$

Sind die Constanten f_0' und f_0'' bekannt, so lehren diese Gleichungen c' und c'' kennen und die Gleichungen 8) A', B', A'', B''; sind auch die Functionen f' und f'' bekannt, so ist die Bewegung in dem ganzen zu betrachtenden Luftraume bestimmt.

Von besonderem Interesse ist die Kenntniss der Grösse $c'^2 + c''^2$, mit der, wie wir gesehen haben, die Intensität des Tones in irgend einem Punkte des äusseren Luftraumes proportional ist; wenn man die Gleichungen 9) quadrirt und addirt, so findet man

$$c'^2 + c''^2 = \frac{G^2}{(\cos \varkappa l - \varkappa f_0' \sin \varkappa l)^2 + (\varkappa f_0'' \sin \varkappa l)^2}. \tag{10}$$

Wenn l sich ändert, während G und $\varkappa$ dieselben Werthe behalten, so ändert sich hiernach die Intensität des Tones periodisch und durchläuft abwechselnd Maxima und Minima. Da $c'^2 + c''^2$ das Reciproke einer homogenen Function zweiten Grades von $\cos \varkappa l$ und $\sin \varkappa l$ ist, so sind die Maxima und Minima durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} 2\varkappa l = \gamma$$

bestimmt, wo γ eine von den Coefficienten dieser Function abhängende Constante bedeutet, oder, wenn λ wieder die Wellenlänge bezeichnet, durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} 4\pi \frac{l}{\lambda} = \gamma.$$

Ist l_m ein Werth von l, der einem Maximum der Tonstärke entspricht, so sind hiernach die übrigen Maximumswerthe von l

$$l_m + h\frac{\lambda}{2}$$

und die Minimumswerthe

$$l_m + (2h + 1)\frac{\lambda}{4},$$

wo h eine ganze Zahl ist.

Bei einem Beispiele, bei dem wir die Rechnungen zu Ende führen werden, werden wir sehen, dass $\varkappa f_0''$ eine unendlich kleine Zahl ist; berücksichtigen wir hier diesen Umstand, so zeigt die Gleichung 10), dass für die Maxima der Tonstärke

$$\cos \varkappa l - \varkappa f_0' \sin \varkappa l = 0,$$

d. h.

$$\operatorname{tg} \varkappa l = \frac{1}{\varkappa f_0'} \tag{11}$$

$$c'^2 + c''^2 = G^2 \frac{1}{(\varkappa f_0'' \sin \varkappa l)^2} = G^2 \frac{1 + \varkappa^2 f_0'^2}{\varkappa^2 f_0''^2},$$

und dass der Werth dieser Maxima unendlich gross gegen die Werthe ist, die die Tonstärke hat, wenn die Gleichung 11) nicht erfüllt ist. Zugleich sieht man ein, dass diese Sätze auch gelten, wenn l einen gegebenen Werth hat und die Tonhöhe, d. h. $\varkappa$, veränderlich ist.

Definirt man einen Winkel $\varkappa\alpha$ durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \varkappa\alpha = \varkappa f_0',$$

so wird die Gleichung 10)

$$c'^2 + c''^2 = \frac{G^2}{\frac{\cos^2 \varkappa (l + \alpha)}{\cos^2 \varkappa\alpha} + (\varkappa f_0'' \sin \varkappa l)^2}.$$

Bei dem schon oben erwähnten Beispiele werden wir sehen, dass unter gewissen Umständen auch $\varkappa f_0'$ unendlich klein ist; dann kann man setzen

$$\alpha = f_0'.$$

§ 3.

Wir haben im vorigen § angenommen, dass die ganze Begrenzung des Theiles des Luftraumes, auf den die Functionen ψ' und ψ'' sich beziehen, mit Ausnahme des Querschnitts $z = 0$, ruht und der Querschnitt $z = l$ in einer gewissen Bewegung erhalten wird; wir wollen nun annehmen, dass ein anderer Theil jener Begrenzung in gewisser Bewegung erhalten wird und der Querschnitt $z = l$ ruht. Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, wollen wir uns vorstellen, dass vor der Mündung der Röhre eine tönende Stimmgabel aufgestellt ist, deren Oberfläche dann mit zu der genannten Begrenzung gehört. Für den Fall, dass die Stimmgabel in bestimmter Weise schwingt und der Querschnitt $z = 0$ ruht, setzen wir das Geschwindigkeitspotential für einen Punkt des äusseren Luftraumes

$$= F' \cos 2\pi n t + F'' \sin 2\pi n t,$$

und für den Fall, dass die Stimmgabel ruht und der Querschnitt $z = 0$ so sich bewegt, dass für ihn

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \cos 2\pi n t$$

ist,

$$= f' \cos 2\pi n t + f'' \sin 2\pi n t;$$

F' und F'' sind dann gewisse Functionen von x, y, z, die die Eigenschaft haben, dass für $z = 0$

$$\frac{\partial F'}{\partial z} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F''}{\partial z} = 0 \qquad 12)$$

ist, und f' und f'' haben dieselbe Bedeutung, wie im vorigen §. Tönt die Stimmgabel und bewegt der Querschnitt $z = 0$ sich so, dass für ihn

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = c' \cos 2\pi n t + c'' \sin 2\pi n t$$

ist, so hat man dann

$$\varphi = (F' + c'f' - c''f'') \cos 2\pi n t + (F'' + c'f'' + c''f') \sin 2\pi n t. \quad 13)$$

Für die Region der ebenen Wellen im Innern der Röhre gilt wieder die Gleichung 6). Sucht man die Bedingungen dafür, dass die beiden Ausdrücke von φ und die beiden Ausdrücke von $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, die man hiernach für $z = 0$ hat, für alle Werthe von t einander gleich sind, so erhält man bei Rücksicht auf 7) und 12)

$$A' = F_0' + c'f_0' - c''f_0'', \qquad \varkappa B' = c'$$
$$A'' = F_0'' + c'f_0'' + c''f_0', \qquad \varkappa B'' = c'',$$

wo F_0' und F_0'' die Werthe bezeichnen, die F' und F'' für $z = 0$ haben. Ist, wie wir annehmen, der Querschnitt $z = l$ in Ruhe, so folgt aus 6)

$$A' \sin \varkappa l - B' \cos \varkappa l = 0$$
$$A'' \sin \varkappa l - B'' \cos \varkappa l = 0.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich

$$c'(\cos \varkappa l - \varkappa f_0' \sin \varkappa l) + c'' \varkappa f_0'' \sin \varkappa l = \varkappa F_0' \sin \varkappa l$$
$$c' \varkappa f_0'' \sin \varkappa l - c''(\cos \varkappa l - \varkappa f_0' \sin \varkappa l) = -\varkappa F_0'' \sin \varkappa l,$$

und hieraus weiter

$$c'^2 + c''^2 = \frac{(F_0'^2 + F_0''^2)\varkappa^2 \sin^2 \varkappa l}{(\cos \varkappa l - \varkappa f_0' \sin \varkappa l)^2 + (\varkappa f_0'' \sin \varkappa l)^2}. \quad 14)$$

Die Bewegung in dem sich ins Unendliche erstreckenden Luftraume kann der Gleichung 13) zufolge angesehen werden als zusammengesetzt aus derjenigen, die stattfinden würde, wenn der Querschnitt $z = 0$ ruht, während die Stimmgabel in der gegebenen Weise sich bewegt, und einer gewissen andern. Von dieser andern sagt man, dass sie durch die *Resonanz* der Röhre hervorgebracht ist. Die Intensität des durch Resonanz erzeugten Tones ist proportional mit $c'^2 + c''^2$. Wenn l sich ändert, so ist diese Grösse ein Maximum und zwar

$$= \frac{F_0'^2 + F_0''^2}{f_0''^2},$$

sobald

$$\operatorname{tg} \varkappa l = \frac{1}{\varkappa f_0'}, \quad 15)$$

ein Minimum und zwar $= 0$, sobald

$$\sin \varkappa l = 0$$

ist. Benutzt man, dass $\varkappa f_0''$ eine unendlich kleine Zahl ist, und bezeichnet die Maxima der Resonanz als endlich, so folgt aus 14),

dass die Resonanz immer unendlich klein ist, sobald $\varkappa l$ um etwas Endliches von jeder Wurzel der Gleichung 15) abweicht. Dieses gilt auch, wenn l constant und $\varkappa$ variabel ist. Wird vor der Mündung der Röhre eine Bewegung unterhalten, die als zusammengesetzt aus verschiedenen Tönen betrachtet werden kann, so werden diejenigen von diesen Tönen durch Resonanz sehr verstärkt, welche der Gleichung 15) entsprechen. Daraus erklärt man, dass diese Töne auftreten, wenn die Mündung der Röhre in passender Weise angeblasen wird.

§ 4.

Ganz ähnliche Betrachtungen, wie wir sie in den drei ersten §§ dieser Vorlesung in Bezug auf ebene Wellen durchgeführt haben, lassen sich in Bezug auf kugelförmige anstellen. Eine Lösung der Differentialgleichung, der das Geschwindigkeitspotential φ zu genügen hat, ist der Gleichung 12) der vorigen Vorlesung zufolge

$$\begin{aligned}\varphi = \frac{1}{r}\,(A' \cos \varkappa r + B' \sin \varkappa r) \cos 2\pi n t \\ + \frac{1}{r}\,(A'' \cos \varkappa r + B'' \sin \varkappa r) \sin 2\pi n t\,;\end{aligned} \tag{16}$$

es ist das eine Gleichung, die von ähnlicher Form, wie die Gleichung 3) ist und an die ähnliche Schlüsse, wie an diese sich knüpfen lassen. Eine Bewegung gemäss der Gleichung 16) ist möglich in einem Luftraume, der vollständig begrenzt ist durch zwei concentrische Kugelflächen, deren Punkte in passender Weise radial bewegt werden, oder durch zwei solche Kugelflächen und eine feste Kegelfläche, die ihre Spitze in dem Mittelpunkte jener hat.

Einen speciellen Fall der Gleichung 16) bildet die Gleichung

$$\varphi = \frac{1}{r}\,(A \cos \varkappa r + B \sin \varkappa r) \cos 2\pi n (t - t_0)\,; \tag{17}$$

sie stellt stehende Schwingungen dar; in gewissen Kugelflächen ist bei diesen die Verdichtung immer Null; die Radien derselben sind durch die Gleichung

$$A \cos \varkappa r + B \sin \varkappa r = 0$$

bestimmt; in andern Kugelflächen, den Knoten, verschwindet immer die Geschwindigkeit; für die Radien der Knoten gilt die complicirtere Gleichung

$$A\,\frac{d\,\frac{\cos \varkappa r}{r}}{dr} + B\,\frac{d\,\frac{\sin \varkappa r}{r}}{dr} = 0,$$

d. h.

$$A(\cos \varkappa r + \varkappa r \sin \varkappa r) + B\,(\sin \varkappa r - \varkappa r \cos \varkappa r) = 0. \tag{18}$$

Sind die die Luftmasse begrenzenden Kugelflächen *fest* und sind R und R' die Radien derselben, so ist die durch 17) dargestellte Be-

wegung möglich, wenn $\varkappa$ einen solchen Werth hat, dass der Gleichung 18) durch Werthe von A und B, die nicht beide verschwinden, für $r = R$ und $r = R'$ genügt werden kann; die Bedingung hierfür ist die Gleichung

$$\operatorname{tg} \varkappa (R - R') = \frac{\varkappa (R - R')}{1 - \varkappa^2 R R'},$$

die, wenn $R' = 0$ ist, in die einfachere

$$\operatorname{tg} \varkappa R = \varkappa R$$

übergeht. Diese Gleichungen bestimmen die *Eigentöne* der betrachteten Luftmasse.

Ein anderer specieller Fall der Gleichung 16) ist die Gleichung

$$\varphi = \frac{A}{r} \cos (\varkappa r - 2 \pi n t) + \frac{B}{r} \sin (\varkappa r - 2 \pi n t); \tag{19}$$

sie stellt Wellen dar, welche von ihrem Mittelpunkte nach Aussen hin fortschreiten. Setzen wir in 19) unter den Zeichen cos und sin statt des Zeichens $-$ das Zeichen $+$, so haben wir Wellen, welche von Aussen nach ihrem Mittelpunkte hin fortschreiten.

Aehnliche Rechnungen, wie wir sie in den §§ 2 und 3 in Bezug auf eine unendlich dünne, cylindrische Röhre durchgeführt haben, könnten wir hier durchführen in Bezug auf eine conische Röhre, die durch eine unendlich kleine Oeffnung an der Spitze mit dem unendlichen Luftraume communicirt und andererseits durch eine Kugelfläche geschlossen ist, die ihren Mittelpunkt in der Spitze hat.

§ 5.

Nach den ebenen Wellen und den Kugelwellen wollen wir nun eine dritte Art von Schwingungen, die einem einfachen Tone entsprechen, ins Auge fassen. Es soll sich um die Schwingungen eines Luftraumes handeln, dessen sämmtliche Dimensionen unendlich klein gegen die Wellenlänge des Tones sind. Die Dimensionen des Luftraumes wollen wir als endlich, die Wellenlänge als unendlich gross bezeichnen; die Grösse $\varkappa$ ist dann unendlich klein. Wir wenden wieder die in den Gleichungen 1) und 2) gebrauchte Bezeichnungsweise an, d. h. wir setzen

$$\varphi = \psi' \cos 2 \pi n t + \psi'' \sin 2 \pi n t$$

und verstehen unter ψ eine beliebige der beiden von x, y, z abhängigen Grössen ψ' und ψ''. Die Gleichung 2), nämlich

$$\Delta \psi + \varkappa^2 \psi = 0, \tag{20}$$

geht, wenn $\varkappa$ unendlich klein und ψ nicht unendlich gross gegen seine zweiten Differentialquotienten ist, über in die Gleichung

$$\Delta \psi = 0,$$

he für das Geschwindigkeitspotential einer incompressibeln Flüssig-
lt. Eine jede einwerthige Lösung derselben können wir hier
nehmen; einwerthig muss ψ sein, auch wenn der Luftraum
ch zusammenhängender ist, da die Verdichtung, also auch
hig sein muss. In jedem Augenblicke bewegt sich die
vie eine incompressible Flüssigkeit. Bedeutet ds ein
fläche des Luftraums und n die nach seinem Innern
von ds, so ist dabei

$$\int ds \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0; \tag{21}$$

emäss gegeben, so giebt es aber auch immer
e Constante enthaltendes ψ, welches der
*).
ng 21) nicht erfüllt, so findet man eine Lösung
20) auf die folgende Weise. Man setze

$$\psi = \frac{C}{\varkappa^2} + U,$$

wo C und U von $\varkappa$ unabhängig sind, C eine Constante, U eine Function von x, y, z ist, die in passender Weise bestimmt werden sollen. Für U erhält man dann die partielle Differentialgleichung

$$\Delta U + C = 0,$$

man genügt dieser, wenn man

$$U = \frac{C}{4\pi} \Omega + V$$

macht, wo Ω das Potential einer Masse, die mit der Dichtigkeit 1 den betrachteten Luftraum erfüllt, und V eine Lösung der Gleichung

$$\Delta V = 0$$

bedeutet. Diese Lösung kann man so wählen, dass $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ beliebig gegebene Werthe erhält, wenn über die Constante C passend verfügt ist. Es ist

*) In seiner Abhandlung „Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte" hat Gauss (seine Werke, Bd. V, p. 197) den Satz aufgestellt, dass für einen vollkommen begrenzten Raum es immer eine mit ihren Differentialquotienten stetige und einwerthige Function giebt, die der Gleichung $\Delta \psi = 0$ genügt und an der Oberfläche beliebig gegebene Werthe annimmt. Auf ähnlichen Wegen, wie dieser Satz, lässt sich der oben angeführte beweisen. Gegen die völlige Strenge der für jenen gegebenen Beweise sind aber Bedenken erhoben, und dieselben Bedenken lassen sich bei den entsprechenden Beweisen dieses geltend machen.

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{C}{4\pi}\frac{\partial\Omega}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n};$$

da

$$\int ds\, \frac{\partial V}{\partial n} = 0$$

sein muss, so hat man

$$\frac{C}{4\pi}\int ds\, \frac{\partial\Omega}{\partial n} = \int ds\, \frac{\partial\psi}{\partial n}$$

zu setzen, oder, da

$$\int ds\, \frac{\partial\Omega}{\partial n} = 4\pi T$$

ist, wenn T das Volumen des betrachteten Luftraumes bedeutet,

$$CT = \int ds\, \frac{\partial\psi}{\partial n}. \qquad 22)$$

Dabei ist dann

$$\psi = \frac{C}{\varkappa^2} + \frac{C}{4\pi}\Omega + V. \qquad 23)$$

Die Lösung der Gleichung 20) führt zur Theorie der sogenannten *cubischen Pfeifen.* Mit diesem Namen bezeichnet man ein Gefäss, dessen Dimensionen von gleicher Grössenordnung sind, und das durch eine kleine Oeffnung mit dem unendlichen Luftraume communicirt; wird die Oeffnung in passender Weise angeblasen, so entsteht ein Ton. Wir werden die Dimensionen des Gefässes als endlich annehmen, die der Oeffnung als unendlich klein, die Wellenlänge des Tones, um den es sich handeln wird, als unendlich gross. In Bezug auf die bezeichnete Anordnung können wir dann ähnliche Betrachtungen anstellen, wie wir sie in § 2 und § 3 in Bezug auf eine cylindrische Röhre durchgeführt haben. Zuerst werden wir den Fall ins Auge fassen, dass ein Theil der Gefässwand, der nicht bis zum Rande der Oeffnung heranreichen soll, in einer gewissen, periodischen Bewegung erhalten wird.

Um die Oeffnung als Mittelpunkt denken wir uns eine Kugelfläche beschrieben mit einem Radius, der unendlich klein, aber unendlich gross gegen die Dimensionen der Oeffnung ist; den Theil dieser Kugelfläche, der innerhalb des Gefässes liegt, wollen wir die Fläche 0 nennen, ihr Element durch ds_0 bezeichnen; sie entspricht dem Querschnitt $z = 0$ der cylindrischen Röhre. Wir nehmen an, dass für alle Elemente der Fläche 0 die Geschwindigkeit die Richtung des Radius und gleiche Grösse hat; die Berechtigung zu dieser Annahme wird, wenigstens für die Fälle, in denen wir die Rechnung zu Ende führen werden, sich darin zeigen, dass bei ihr für den ganzen zu betrachtenden Luftraum ein φ sich finden lässt, welches mit seinen ersten Differentialquotienten überall, auch an

der Fläche 0, stetig ist. Für den Fall, dass die Bewegung in der Fläche 0 eine solche ist, dass

$$\int ds_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \cos 2\pi n t,$$

wo n die nach dem Innern des Gefässes gerichtete Normale von ds_0 bedeutet, sei für irgend einen Punkt des Theiles des ganzen zu betrachtenden Luftraumes, der sich in die Unendlichkeit erstreckt und durch die Fläche 0 begrenzt ist,

$$\varphi = f' \cos 2\pi n t + f'' \sin 2\pi n t;$$

es bedeuten dann f' und f'' gewisse Functionen von x, y, z, die die Eigenschaft haben, dass

$$\int ds_0 \frac{\partial f'}{\partial n} = 1, \quad \int ds_0 \frac{\partial f''}{\partial n} = 0 \tag{24}$$

ist; für den Fall, dass die Bewegung der Fläche 0 nach der Gleichung

$$\int ds_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} = c' \cos 2\pi n t + c'' \sin 2\pi n t$$

geschieht, hat man dann

$$\varphi = (c'f' - c''f'') \cos 2\pi n t + (c'f'' + c''f') \sin 2\pi n t \tag{25}$$

und die Intensität des Tones ist überall mit $c'^2 + c''^2$ proportional.

In dem zweiten Theile des zu betrachtenden Luftraumes, der durch die Fläche 0 und die Gefässwand vollständig begrenzt ist, gilt für jede der beiden Grössen ψ' und ψ'' die Gleichung 23); bezeichnet man die Werthe von C für diese Functionen durch C' und C'', so folgt daher daraus, dass φ an der Fläche 0 stetig ist, bei Vernachlässigung von Gliedern, die unendlich klein gegen die berücksichtigten sind,

$$\begin{aligned} C' &= \varkappa^2 (c'f_0' - c''f_0'') \\ C'' &= \varkappa^2 (c'f_0'' + c''f_0'), \end{aligned} \tag{26}$$

wo f_0' und f_0'' die Werthe von f' und f'' für irgend einen Punkt der Fläche 0 bedeuten. Zwei andere Gleichungen ergeben sich daraus, dass auch $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ an der Fläche 0 stetig ist. Einerseits folgt aus 25) bei Rücksicht auf 24)

$$\int ds_0 \frac{\partial \psi'}{\partial n} = c', \qquad \int ds_0 \frac{\partial \psi''}{\partial n} = c''.$$

Den Theil der Gefässwand, der von Aussen in Bewegung erhalten wird, nennen wir die Fläche l und bezeichnen ihr Element durch ds_l; die Bewegung sei eine solche, dass

$$\int ds_l \frac{\partial \varphi}{\partial n} = G \cos 2\pi n t$$

ist, wo n die nach dem Innern des Gefässes gerichtete Normale von ds_i, G eine Constante bedeutet. Die Gleichung 22) giebt dann andererseits

$$G + \int ds_0 \frac{\partial \psi'}{\partial n} = C'T$$
$$\int ds_0 \frac{\partial \psi''}{\partial n} = C''T,$$

wenn T das Volumen des Gefässes ist; es ist daher

$$G + c' = C'T$$
$$c'' = C''T.$$

Setzt man hier für C' und C'' ihre Werthe aus 26), so findet man

$$c'(1 - \varkappa^2 f_0' T) + c'' \varkappa^2 f_0'' T = -G$$
$$c' \varkappa^2 f_0'' T - c''(1 - \varkappa^2 f_0' T) = 0,$$

und hieraus

$$c'^2 + c''^2 = \frac{G^2}{(1 - \varkappa^2 f_0' T)^2 + (\varkappa^2 f_0'' T)^2}.$$

Bei einem Beispiele werden wir sehen, dass das zweite Glied im Nenner dieses Ausdrucks eine unendlich kleine Zahl ist. Machen wir hiervon Gebrauch, so können wir schliessen, dass die Intensität des Tones unendlich gross ist gegen die Werthe, die sie sonst hat, falls

$$1 - \varkappa^2 f_0' T = 0 \tag{27)}$$

ist.

Wir wollen nun annehmen, dass die Gefässwand ruht und der Ton ausserhalb des Gefässes, etwa durch eine schwingende Stimmgabel, erzeugt wird. In Bezug auf diesen Fall können wir Betrachtungen anstellen, die den im § 3 durchgeführten vollkommen entsprechen. Für den unendlichen Luftraum sei, wenn die Fläche 0 ruht,

$$\varphi = F' \cos 2\pi n t + F'' \sin 2\pi n t,$$

wobei

$$\int ds_0 \frac{\partial F'}{\partial n} = 0 \quad \text{und} \quad \int ds_0 \frac{\partial F''}{\partial n} = 0$$

ist; wenn für die Fläche 0

$$\int ds_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} = c' \cos 2\pi n t + c'' \sin 2\pi n t$$

ist, so hat man dann

$$\varphi = (F' + c'f' - c''f'') \cos 2\pi n t + (F'' + c'f'' + c''f') \sin 2\pi n t.$$

Setzt man wieder für den durch die Gefässwand und die Fläche 0 begrenzten Raum

$$\varkappa^2 \varphi = C' \cos 2\pi n t + C'' \sin 2\pi n t,$$

so giebt die Bedingung, dass φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ an der Fläche 0 stetig sind, die Gleichungen

$$C' = \varkappa^2 (F_0' + c' f_0' - c'' f_0'') \qquad c' = C' T$$
$$C'' = \varkappa^2 (F_0'' + c' f_0'' + c'' f_0') \qquad c'' = C'' T,$$

wo F_0' und F_0'' die Werthe von F' und F'' für irgend einen Punkt der Fläche 0 bedeuten. Hieraus folgt

$$\varkappa^2 T F_0' = c' (1 - \varkappa^2 f_0' T) + c'' \varkappa^2 f_0'' T$$
$$\varkappa^2 T F_0'' = - c' \varkappa^2 f_0'' T + c'' (1 - \varkappa^2 f_0' T)$$

und weiter

$$c'^2 + c''^2 = \frac{(F_0'^2 + F_0''^2) \varkappa^4 T^2}{(1 - \varkappa^2 f_0' T)^2 + (\varkappa^2 f_0'' T)^2}.$$

Mit dieser Grösse ist die Intensität des durch Resonanz erzeugten Tones proportional. Ist $\varkappa^2 f_0'' T$ unendlich klein, so ist dieselbe unendlich gross gegen die Werthe, die sie sonst hat, falls die Gleichung 27) besteht. Diese Gleichung bestimmt den Ton, der, wenn die Oeffnung in passender Weise angeblasen wird, auftritt.

§ 6.

In den Gleichungen, die wir in den §§ 2, 3 und 5 für eine cylindrische und eine cubische Pfeife aufgestellt haben, kommen zwei Constanten vor, die wir f_0' und f_0'' genannt haben, und durch die die Resonanz wesentlich bedingt ist; wir wollen nun suchen, diese Constanten für gewisse Fälle zu berechnen. Hierbei ist es erforderlich, das Geschwindigkeitspotential φ für den ganzen zu betrachtenden Luftraum und für eine Bewegung zu ermitteln, die bei der cylindrischen Pfeife durch ihre Grundfläche, bei der cubischen durch einen beliebigen Theil der Gefässwand unterhalten wird; das ist wieder nur möglich bei bestimmten Voraussetzungen über die ganze Begrenzung des Luftraums. Wir wollen festsetzen, dass für Entfernungen von der Oeffnung, die von der Ordnung der Wellenlänge oder grösser sind, der ins Unendliche sich erstreckende Luftraum entweder gar nicht oder durch einen Theil einer beliebigen Kegelfläche begrenzt ist, die ihre Spitze in der Oeffnung hat. Wir nennen r die Entfernung eines variabeln Punktes von dieser Spitze und nehmen an, dass für Werthe von r, die von der Ordnung der Wellenlänge oder grösser sind, die Gleichung 19)

$$\varphi = \frac{A}{r} \cos (\varkappa r - 2\pi n t) + \frac{B}{r} \sin (\varkappa r - 2\pi n t) \qquad 28)$$

besteht, d. h. dass für Werthe von r von der bezeichneten Grössenordnung kugelförmige Wellen, die nach Aussen hin fortschreiten, vorhanden sind. Die Berechtigung zu dieser Annahme liegt darin,

dass man bei ihr ein φ finden kann, welches allen Bedingungen genügt, die es erfüllen soll.

Um den Anfangspunkt der r denken wir uns eine Kugelfläche beschrieben, die noch in der Region der kugelförmigen Wellen liegt, deren Radius aber unendlich klein gegen die Wellenlänge ist. Wir nennen dieselbe die Fläche 1 und bezeichnen ihr Element durch ds_1; in Bezug auf dieses soll n die nach Aussen gerichtete Normale bedeuten. Um die cylindrische Pfeife und die cubische zusammen besprechen zu können, nennen wir den Querschnitt jener, den wir früher als den Querschnitt $z=0$ bezeichnet haben, auch die Fläche 0; wir haben schon angenommen, dass sein Abstand von der Oeffnung unendlich klein gegen die Wellenlänge ist. Die beiden Flächen 1 und 0 theilen den ganzen zu betrachtenden Luftraum in drei Theile; für jeden von den beiden äusseren dieser Theile haben wir einen Ausdruck für φ bereits aufgestellt, nämlich in den Gleichungen 6), 23) und 28); wir müssen noch für den mittleren Theil, der durch die Flächen 0 und 1 begrenzt ist, einen solchen bilden und zwar so, dass φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ an den Flächen 0 und 1 stetig ist. Die Dimensionen dieses Theiles sind unendlich klein gegen die Wellenlänge; bezeichnet wiederum ψ eine beliebige der beiden Functionen ψ' und ψ'', so kann man daher nach den im § 5 gemachten Auseinandersetzungen für ψ eine Lösung der Gleichung $\Delta\psi = 0$ nehmen, falls die Gleichung 21) erfüllt wird, die bei unserer jetzigen Bezeichnung

$$\int ds_0 \frac{\partial \psi}{\partial n} + \int ds_1 \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$$

ist; dieser Bedingung lässt sich neben den übrigen genügen. Wir können dann ψ als das Geschwindigkeitspotential einer incompressibeln Flüssigkeit ansehen, die so sich bewegt, wie die Luft in einem gewissen Augenblick. Unter den Annahmen, die wir im § 2 und im § 5 gemacht haben, befindet sich auch die, dass ψ in allen Punkten der Fläche 0 denselben Werth hat; in der That haben wir dort angenommen, dass der Querschnitt $z=0$ in der Region der ebenen Wellen liegt, und hier, dass die Geschwindigkeit in allen Punkten der Fläche 0 senkrecht zu dieser ist; aus der Gleichung 28) folgt, dass ψ auch in allen Punkten der Fläche 1 gleiche Werthe hat; für die feste Wand, die die Ränder der Flächen 0 und 1 verbindet, ist $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$. Es ergiebt sich hieraus nach Betrachtungen, die in der siebenzehnten Vorlesung angestellt sind, dass

$$\int ds_0 \frac{\partial \psi}{\partial n} = -\int ds_1 \frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{1}{W}(\psi_0 - \psi_1) \qquad 29)$$

ist, wo W eine von der Gestalt des zwischen den Flächen 0 und 1

liegenden Raumes abhängige Constante bedeutet, die wir dort den Widerstand dieses Raumes nannten, indem wir einen Ausdruck der Elektricitätslehre auf die Hydrodynamik übertrugen.

Die Functionen f' und f'', deren Werthe für Punkte der Fläche 0 zu ermitteln unsere Aufgabe ist, sind, soweit sie sich auf Punkte in oder zwischen den Flächen 0 und 1 beziehen, specielle Fälle der jetzt betrachteten Function ψ; es kann daher in den Gleichungen 29) $\psi = f'$ und $\psi = f''$ gesetzt werden. Das soll geschehen; dabei sollen die Werthe von f' und f'' in einem Punkte der Fläche 1 durch f_1' und f_1'' bezeichnet werden; r_1 sei der Radius dieser Fläche und K die Oeffnung des Kegels, welcher den ins Unendliche sich erstreckenden Luftraum in hinreichender Entfernung von der Oeffnung, wie wir annehmen, begrenzt. Aus 28) folgt dann bei Rücksicht darauf, dass $\varkappa r_1$ unendlich klein ist,

$$f_1' = \frac{A}{r_1} + B\varkappa, \quad f_1'' = A\varkappa - \frac{B}{r_1}$$
$$\int ds_1 \frac{\partial f'}{\partial n} = -KA, \quad \int ds_1 \frac{\partial f''}{\partial n} = KB. \tag{30}$$

Bei der cylindrischen Pfeife ist für die Fläche 0 nach 7)

$$\frac{\partial f'}{\partial n} = 1, \quad \frac{\partial f''}{\partial n} = 0,$$

also, wenn Q den Querschnitt der Röhre bezeichnet,

$$\int ds_0 \frac{\partial f'}{\partial n} = Q, \quad \int ds_0 \frac{\partial f''}{\partial n} = 0. \tag{31}$$

Bei Rücksicht auf 30) und 31) geben die Gleichungen 29)

$$Q = KA = \frac{1}{W}\left(f_0' - \frac{A}{r_1} - B\varkappa\right)$$
$$0 = KB = \frac{1}{W}\left(f_0'' - A\varkappa + \frac{B}{r_1}\right),$$

also

$$A = \frac{Q}{K}, \quad B = 0$$
$$f_0' = Q\left(W + \frac{1}{Kr_1}\right), \quad f_0'' = \frac{\varkappa Q}{K}.$$

Der Ausdruck von f_0' lässt sich noch einfacher schreiben. Diese Grösse muss ihrer ursprünglichen Definition zufolge unabhängig von r_1 sein, welches von einer gewissen Grössenordnung sein soll, im Uebrigen aber willkürlich gewählt werden kann. Es muss daher W in gewisser Weise von r_1 abhängen. In den Bedingungen, aus welchen das durch 29) definirte W zu bestimmen ist, kommt $\varkappa$ nicht vor; es sind diese Bedingungen dadurch erhalten, dass $\varkappa = 0$ gesetzt ist. Die Festsetzung, dass $\varkappa r_1$ unendlich klein sein soll, beschränkt daher die Grösse nicht, die dem r_1 bei der Bestimmung von W

gegeben werden darf. Wir wollen jetzt, die Bezeichnung ändernd, den Werth, den W erhält, wenn r_1 unendlich angenommen wird, W nennen; dann hat man

$$f_0' = QW, \quad f_0'' = \frac{\varkappa Q}{K}. \tag{32}$$

Bei der cubischen Pfeife treten an Stelle der Gleichungen 31) die Gleichungen 24), nämlich

$$\int ds_0 \frac{\partial f'}{\partial n} = 1, \quad \int ds_0 \frac{\partial f''}{\partial n} = 0,$$

während die Gleichungen 30) ihre Gültigkeit behalten; hier ergiebt sich daher aus 29)

$$f_0' = W, \quad f_0'' = \frac{\varkappa}{K}. \tag{33}$$

§ 7.

Wir wollen nun für einige Fälle den Werth von W aufsuchen; es ist das ein Problem, welches der Lehre von der Bewegung einer incompressibeln Flüssigkeit angehört. Von den Betrachtungen, welche wir im § 4 der siebenzehnten Vorlesung über die Strömungen einer incompressibeln Flüssigkeit in den Normalen confocaler Ellipsoide angestellt haben, können wir eine Anwendung auf eine cubische Pfeife unter der Voraussetzung machen, dass die Oberfläche des Gefässes in der Nähe der Oeffnung und bis zu Entfernungen von dieser, die gegen ihre Dimensionen unendlich gross sind, ein einschaliges Hyperboloid ist. Schreiben wir die Gleichung dieses Hyperboloids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

und nennen K die Oeffnung seines Asymptotenkegels, so ist nach dem Ausdruck 31) der siebenzehnten Vorlesung

$$W = \frac{2}{K}\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(a^2+c^2+x^2)(b^2+c^2+x^2)}}. \tag{34}$$

Nimmt man

$$c = 0$$

an, so kommt man auf den Fall einer Oeffnung, die in einer dünnen, ebenen Wand sich befindet und von einer Ellipse, deren Halbachsen a und b sind, begrenzt ist; dabei wird

$$K = 2\pi.$$

Setzt man noch

$$a = b = R,$$

so wird die Oeffnung ein Kreis vom Radius R und

$$W = \frac{1}{2R}.$$

Für den Ton stärkster Resonanz oder den Ton, der durch passendes Anblasen der Oeffnung entsteht, erhält man daher in diesem Falle nach 33) und 27)

$$\varkappa^2 = \frac{2R}{T}. \qquad 35)$$

Nun war

$$\varkappa = \frac{2\pi n}{a}$$

gesetzt, wo n die Zahl der Doppelschwingungen in der Zeiteinheit, a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der Luft bedeutet; nimmt man als Einheiten der Zeit und der Länge eine Sekunde und ein Millimeter an, setzt, trockener atmosphärischer Luft von der Temperatur von 0^0 C. entsprechend,

$$a = 332\,260$$

und führt an Stelle des Radius R die Fläche S der Oeffnung ein, so giebt die Gleichung 35)

$$n = 56\,174 \frac{\sqrt[4]{S}}{\sqrt{T}}.$$

Lange bevor dieses theoretische Resultat von Helmholtz abgeleitet war, hatte Sondhauss seine Beobachtungen über die Töne cubischer Pfeifen durch die Formel

$$n = 52\,400 \frac{\sqrt[4]{S}}{\sqrt{T}}$$

dargestellt.

Wir wollen nun den Widerstand W auch für eine gewisse Art von cylindrischen Pfeifen berechnen. Dabei schicken wir Folgendes voraus. Auf einem Theile der xy-Ebene eines Coordinatensystems sei eine Masse mit der veränderlichen Dichtigkeit h verbreitet und es sei V das Potential dieser Masse in Bezug auf den Punkt (x, y, z). In zwei Punkten, denen gleiche Werthe von x und y und entgegengesetzte von z entsprechen, hat dann V denselben Werth. Hieraus folgt erstens, dass, wenn z unendlich klein ist, V immer denselben Werth hat, mag z positiv oder negativ sein; was wir auch aus dem allgemeinen Satze schliessen können, dass das Potential einer einfachen Massenschicht bei dem Durchgange durch diese stetig ist. Zweitens folgt daraus, dass $\frac{\partial V}{\partial z}$ für $z = 0$ auf beiden Seiten der xy-Ebene entgegengesetzte Werthe hat. Verbindet man diese Thatsache mit dem durch die Gleichung 9) der sechszehnten Vorlesung ausgesprochenen Satze, indem man etwa die Richtung von n_i mit der Richtung der z-Achse zusammenfallen lässt, so findet man, dass für ein unendlich kleines z

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi h, \text{ wenn } z \text{ positiv}$$

und

$$= +2\pi h, \text{ wenn } z \text{ negativ}$$

ist; es folgt daraus unter Anderem, dass für die Theile der xy-Ebene, die nicht mit Masse belegt sind, für die also $h = 0$ ist, $\frac{\partial V}{\partial z}$ verschwindet.

Nun wollen wir durch ds ein Element eines Theiles der xy-Ebene bezeichnen, der die Fläche S heissen möge; r sei die Entfernung des Punktes (x, y, z) von ds, e eine solche Function der Coordinaten von ds, dass immer, wenn der Punkt (x, y, z) in der Fläche S liegt,

$$\int \frac{e\,ds}{r} = 1$$

ist, endlich c eine willkürliche Constante. Wir betrachten eine Function ψ von x, y, z, die wir dadurch definiren, dass wir für negative Werthe von z

$$\psi = \int \frac{e\,ds}{r} + c\int \frac{ds}{r},$$

für positive Werthe von z

$$\psi = -\int \frac{e\,ds}{r} + c\int \frac{ds}{r} + 2 + 4\pi c z$$

setzen. Dieses ψ genügt im ganzen Raume der Gleichung $\Delta\psi = 0$; es hat ferner die Eigenschaft, wie aus den vorausgeschickten Bemerkungen sich ergiebt, dass ψ und $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ an der Fläche S stetig sind, während sie an dem übrigen Theile der xy-Ebene Sprünge erleiden; in der That ist an einem Punkte der Fläche S auf der einen, wie auf der andern Seite

$$\psi = 1 + c\int \frac{ds}{r}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = 2\pi(e + c); \tag{36}$$

weiter ist an der xy-Ebene ausserhalb der Fläche S auf der Seite der negativen z

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0,$$

und in der Unendlichkeit ist für negative Werthe von z

$$\psi = 0,$$

für positive

$$\psi = 2 + 4\pi c z. \tag{37}$$

Dem Punkte (x, y, z) weisen wir nun ein Gebiet an, das durch folgende Flächen vollständig begrenzt ist: durch eine Halbkugel, die

auf der Seite der negativen z mit einem unendlich grossen Radius um den Anfangspunkt der Coordinaten beschrieben ist, durch den Theil der xy-Ebene, der zwischen dem Rande dieser Halbkugel und dem Rande der Fläche S liegt, durch einen Theil der Ebene, für welche z den unendlich grossen positiven Werth L hat, und einen Theil der Fläche, welche durch den Rand von S geht und die Flächen $\psi =$ const. senkrecht schneidet, einer Fläche, welche für unendlich grosse positive Werthe von z eine der z-Achse parallele Cylinderfläche ist. In diesem Gebiete hat die Function ψ alle Eigenschaften eines Geschwindigkeitspotentials einer incompressibeln Flüssigkeit; betrachten wir sie als ein solches, so sind die unendlich grosse Halbkugel und die Ebene $z = L$ Flächen gleichen Geschwindigkeitspotentials, die übrigen Grenzflächen können als feste Wände angesehen werden. Bezeichnet man durch Q den Querschnitt der Röhre, welche zu diesen gehört, für unendlich grosse positive Werthe von z, so ergiebt sich dabei aus 37) für den Widerstand W des von der betrachteten Flüssigkeit erfüllten Raumes

$$W = \frac{2 + 4\pi c L}{4\pi c Q} = \frac{1}{Q}\left(L + \frac{1}{2\pi c}\right).$$

Dieser Ausdruck von W lässt sich noch auf eine andere Form bringen; wir setzen

$$\int dS = S, \quad \int e\,ds = \gamma,$$

d. h. wir bezeichnen durch S die Grösse der Fläche, die wir schon mit demselben Buchstaben benannt haben, durch γ die elektrische Capacität der Fläche S; berechnen wir aus 36) und aus 37) das Volumen der in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt tretenden Flüssigkeitsmasse und setzen die beiden so erhaltenen Ausdrücke einander gleich, so erhalten wir

$$2\pi(\gamma + cS) = 4\pi c Q,$$

d. h.

$$c = \frac{\gamma}{2Q - S},$$

also

$$W = \frac{1}{Q}\left(S + \frac{2Q - S}{2\pi\gamma}\right).$$

Ist die Fläche S oder, wie wir nun sagen wollen, die Oeffnung der Pfeife eine Ellipse, so gilt für $\frac{1}{\gamma}$ der Ausdruck 30) der siebenzehnten Vorlesung; aber es ist in diesem Falle schwierig, die Gestalt der Röhre, d. h. der Fläche, die die Flächen $\psi =$ const. senkrecht schneidet und durch den Rand der Oeffnung geht, zu finden. Verhältnissmässig leicht ist dieses, wenn die Oeffnung ein Kreis ist, da dann die Röhrenwand eine Rotationsfläche ist und die im § 2 der

achtzehnten Vorlesung besprochene Methode zu ihrer Berechnung benutzt werden kann. Ist die Fläche S ein Kreis von dem Radius R_1, so ist

$$\gamma = \frac{2 R_1}{\pi};$$

nennt man R den Radius des Querschnitts Q, so ist daher

$$W = \frac{1}{Q}\left(L + \frac{\pi}{4}\,\frac{2 R^2 - R_1^2}{R_1}\right).$$

Ist dabei noch

$$R_1 = R,$$

so erhält man hieraus

$$W = \frac{1}{Q}\left(L + \frac{\pi}{4} R\right).$$

Für den letzten Fall hat Helmholtz die Berechnung der Röhrenwand durchgeführt und gefunden, dass diese fast genau cylindrisch ist; ihr Radius ist an keiner Stelle kleiner als R und das Maximum desselben ungefähr 1,02 R.

Fünfundzwanzigste Vorlesung.

(Bewegung einer incompressibeln Flüssigkeit, auf deren Theile Kräfte wirken. Ausfluss einer schweren Flüssigkeit aus der Oeffnung eines Gefässes. Torricelli'sches Theorem. Stationäre Bewegung eines flüssigen Ellipsoids, dessen Theile gegen einander gravitiren. Bewegung eines solchen, die stationär ist in Bezug auf ein rotirendes Achsensystem. Unendlich kleine Schwingungen einer schweren Flüssigkeit. Wellen einer schweren Flüssigkeit von endlicher Höhe. Nichtstationäre Bewegung eines gravitirenden, flüssigen Ellipsoids.)

§ 1.

Unsere bisherigen Entwickelungen setzten voraus, dass auf die Theile der Flüssigkeit nicht Kräfte wirken; wir wollen jetzt annehmen, dass solche vorhanden sind, dabei aber uns auf die Betrachtung einer incompressibeln Flüssigkeit beschränken.

Wenn ein Geschwindigkeitspotential, φ, existirt und die wirkenden Kräfte das Potential V haben, so ist nach den Gleichungen 20) und 21) der fünfzehnten Vorlesung

$$V - p = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right) \qquad 1)$$

und

$$\Delta \varphi = 0, \qquad 2)$$

wo p den Druck bedeutet und die Dichtigkeit $= 1$ gesetzt ist. Ist der Raum, den die betrachtete Flüssigkeit erfüllt, ein einfach zusammenhängender, und ist für alle Elemente seiner Oberfläche $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ gegeben, so bestimmt, wie wir gesehen haben, die Gleichung 2), in der die Kräfte nicht vorkommen, die Bewegung vollständig. Um die Bewegung unter den genannten Voraussetzungen zu ermitteln, ist die Kenntniss der Kräfte gar nicht nöthig; diese wird nur erfordert, wenn man die Aenderungen finden will, die der Druck der Zeit und dem Orte nach erfährt, und hierzu dient die Gleichung 1). Wenn aber für einen Theil der Oberfläche der Flüssigkeit $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$, für den andern der Druck gegeben ist, so haben die wirkenden Kräfte wesentlichen Einfluss auf die Bewegung, und diese lässt sich nur berechnen, wenn man die Gleichung 1) zu Hülfe zieht.

Es sei die Schwere die einzige wirkende Kraft und die z-Achse vertikal abwärts gekehrt; wir können dann

$$V = g z$$

setzen, und bezeichnen wir für den Augenblick die ganze Geschwindigkeit durch v, so wird die Gleichung 1)

$$g z - p = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \tfrac{1}{2} v^2. \tag{3)}$$

Nun denken wir uns, dass die Flüssigkeit in einem ruhenden Gefässe enthalten ist und aus einer Oeffnung desselben in einem Strahle ausfliesst; auf ihre Oberfläche in dem Gefässe und auf die Oberfläche des Strahles übe die Atmosphäre einen constanten Druck aus. Wenn die Dimensionen der Ausflussöffnung klein genug sind gegen die Dimensionen des Gefässes, so ist eine Bewegung möglich, bei der die Oberfläche im Gefässe in jedem Augenblicke unendlich wenig von einer horizontalen Ebene abweicht, die Geschwindigkeit in dieser unendlich klein ist und die Differentialquotienten der Componenten der Geschwindigkeit nach der Zeit überall unendlich klein sind. Diese Bewegung fassen wir ins Auge. Wenden wir die Gleichung 3) einmal auf einen Punkt der Oberfläche des Strahles an, dann auf einen Punkt der Oberfläche im Gefässe, ziehen beide Resultate von einander ab und erwägen, dass

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, d y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dz\right)$$

unendlich klein ist, wenn die Integration über eine beliebige Linie ausgedehnt wird, die die beiden gedachten Punkte verbindet und ganz in der Flüssigkeit liegt, so erhalten wir

$$v = \sqrt{2 g z}\ ,$$

wo v die Geschwindigkeit in dem in der Oberfläche des Strahles gewählten Punkte, z die Tiefe dieses Punktes unter der Oberfläche im Gefässe bedeutet. Diese Gleichung spricht das sogenannte *Torricelli'sche Theorem* aus.

Ueber die Gestalt des Strahles lässt sich bei den jetzigen Hülfsmitteln der Analysis nur sehr Weniges feststellen; es ist das nicht auffallend, da schon in dem Falle, dass keine Kräfte wirken, nur einzelne Strahlenformen unter der Voraussetzung sich finden lassen, dass die Bewegung überall *einer* Ebene parallel ist. Nimmt man die Dimensionen des Querschnitts des Strahles als unendlich klein an, so kann man den Druck, der in der Oberfläche allgemein dem der Atmosphäre gleich ist, als in dem ganzen Strahle constant betrachten ausser in dem Theile, der unendlich nahe an der Ausflussöffnung liegt, in dem die Componenten der Geschwindigkeit unendlich schnell sich ändern. Fasst man einen Theil des Strahles ins Auge, der durch zwei unendlich nahe Querschnitte begrenzt ist, so kann man hiernach schliessen, dass dieser so sich bewegt, wie ein freier materieller

Punkt, auf den die Schwere wirkt, d. h. in einer Parabel, deren Achse vertical ist. Ist die Bewegung als eine stationäre anzusehen, so ist der Strahl die Bahn, welche alle Theilchen beschreiben, also eine solche Parabel.

Dieselbe Schlussweise lässt sich auch auf einen etwas allgemeineren Fall anwenden. Es ströme die Flüssigkeit durch einen unendlich engen Schlitz aus, der gerade oder gekrümmt, und in dem letzten Falle in sich zurückkehrend oder nicht sein kann; sie bildet dann eine unendlich dünne Lamelle, in der man den Druck überall als gleich ansehen darf. Irgend ein Theilchen derselben bewegt sich daher, wie ein freier materieller Punkt, also in einer Parabel mit verticaler Achse, und, ist die Bewegung eine stationäre, so ist die flüssige Schicht aus solchen Parabeln zusammengesetzt, die durch die einzelnen Punkte des Schlitzes gehen.

§ 2.

Wir wollen uns jetzt mit einer stationären Bewegung einer incompressibeln Flüssigkeit beschäftigen, bei der andere Kräfte als die Schwere wirken und kein Geschwindigkeitspotential vorhanden ist. Es soll sich um eine Flüssigkeit handeln, deren Theile einander nach dem Newton'schen Gesetze anziehen und auf deren Oberfläche ein constanter Druck wirkt; wir werden aus den Euler'schen hydrodynamischen Gleichungen beweisen, dass diese in einer gewissen stationären Bewegung sein kann, während ihre Oberfläche ein dreiachsiges Ellipsoid ist, zwischen dessen Achsen eine bestimmte Relation besteht. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, dass zwischen den Geschwindigkeitscomponenten u, v, w und den Coordinaten x, y, z des Punktes, auf den diese sich beziehen, die Gleichungen

$$\begin{aligned} u &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ v &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ w &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{aligned} \qquad 4)$$

bestehen, in denen die 9 Grössen a_{11}, a_{12}, .. Constanten sind. Die Gleichung 12) der fünfzehnten Vorlesung giebt für diese die Bedingung

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0. \qquad 5)$$

Setzt man die Werthe von u, v, w aus 4) in die Gleichungen 10) der fünfzehnten Vorlesung, so werden die linken Seiten derselben lineare, homogene Functionen von x, y, z; die rechten Seiten werden es auch, wenn man über P (das ist dasselbe, wie p, da wir die Dichtigkeit $= 1$ gesetzt haben) passend verfügt. Schreibt man die Gleichung der Oberfläche der Flüssigkeit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad 6)$$

so ist nämlich

$$V = \text{Const.} - \pi (Ax^2 + By^2 + Cz^2), \qquad 7)$$

wo A, B, C die durch die Gleichungen 4) der zwölften Vorlesung bestimmten Constanten sind, wenn man die Einheiten der Masse, Länge und Zeit so gewählt hat, dass die Kraft, mit der zwei Massen einander anziehen, gleich ihrem Producte, dividirt durch das Quadrat ihrer Entfernung ist. Man erreicht daher den genannten Zweck, wenn man p einer homogenen Function zweiten Grades von x, y, z, zu der eine Constante addirt ist, gleichsetzt. Man erreicht zugleich, dass der Druck an der Oberfläche constant wird, wenn man

$$p = \text{Const.} + \sigma \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) \qquad 8)$$

macht, wo σ eine Constante bedeutet.

Die in Rede stehenden Differentialgleichungen werden für alle Werthe von x, y, z erfüllt, wenn man die Coefficienten dieser Variabeln in ihnen einander gleichsetzt; mit Hülfe von 7) und 8) erhält man dadurch

$$\begin{aligned}
a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} &= \frac{2\sigma}{a^2} - 2\pi A \\
a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{32} &= 0 \\
a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23} + a_{13}a_{33} &= 0 \\
a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} + a_{23}a_{31} &= 0 \\
a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22} + a_{23}a_{32} &= \frac{2\sigma}{b^2} - 2\pi B \qquad 9) \\
a_{21}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{23}a_{33} &= 0 \\
a_{31}a_{11} + a_{32}a_{21} + a_{33}a_{31} &= 0 \\
a_{31}a_{12} + a_{32}a_{22} + a_{33}a_{32} &= 0 \\
a_{31}a_{13} + a_{32}a_{23} + a_{33}a_{33} &= \frac{2\sigma}{c^2} - 2\pi C.
\end{aligned}$$

Noch zu erfüllen ist die Bedingung, dass die Theilchen der Oberfläche in dieser bleiben; nach der Gleichung 31) der zehnten Vorlesung ist hierzu erforderlich, dass, wenn die Gleichung 6) besteht,

$$\frac{ux}{a^2} + \frac{vy}{b^2} + \frac{wz}{c^2} = 0$$

ist, dass also allgemein diese Gleichung erfüllt wird.

Hieraus ergeben sich die sechs Gleichungen

$$a_{11} = 0 \quad , \qquad a_{22} = 0 \quad , \qquad a_{33} = 0$$

$$\frac{a_{12}}{a^2} + \frac{a_{21}}{b^2} = 0, \quad \frac{a_{23}}{b^2} + \frac{a_{32}}{c^2} = 0, \quad \frac{a_{31}}{c^2} + \frac{a_{13}}{a^2} = 0. \qquad 10)$$

In Folge der drei ersten von diesen wird die Gleichung 5) erfüllt und die Gleichungen 9) nehmen diese einfachere Form an:

$$a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} = \frac{2\sigma}{a^2} - 2\pi A, \quad a_{13}a_{32} = 0, \quad a_{12}a_{23} = 0$$
$$a_{23}a_{32} + a_{21}a_{12} = \frac{2\sigma}{b^2} - 2\pi B, \quad a_{21}a_{13} = 0, \quad a_{23}a_{31} = 0 \qquad 11)$$
$$a_{31}a_{13} + a_{32}a_{23} = \frac{2\sigma}{c^2} - 2\pi C, \quad a_{32}a_{21} = 0, \quad a_{31}a_{12} = 0.$$

Diesen und den drei letzten der Gleichungen 10) kann durch mehrere Werthsysteme der Unbekannten genügt werden. Ihnen kann genügt werden, wenn man

$$a_{13} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad a_{31} = 0, \quad a_{32} = 0$$

annimmt, so dass von den 9 Grössen a_{11}, a_{12}, . . nur die beiden a_{12} und a_{21} von Null verschieden bleiben. Die Gleichungen 10) und 11) werden dann

$$\frac{a_{12}}{a^2} + \frac{a_{21}}{b^2} = 0$$
$$a_{12}a_{21} = \frac{2\sigma}{a^2} - 2\pi A = \frac{2\sigma}{b^2} - 2\pi B, \quad 0 = \frac{2\sigma}{c^2} - 2\pi C,$$

oder, wenn man

$$a_{12}a_{21} = -\varkappa^2$$

setzt und σ eliminirt,

$$a_{12} = \frac{a}{b}\varkappa, \qquad a_{21} = -\frac{b}{a}\varkappa$$
$$a^2\left(A - \frac{\varkappa^2}{2\pi}\right) = b^2\left(B - \frac{\varkappa^2}{2\pi}\right) = c^2 C^2.$$

Diese Doppelgleichung ist dieselbe, wie die Gleichung 6) der zwölften Vorlesung, wenn man die dort mit v bezeichnete Grösse $= \frac{\varkappa^2}{2\pi}$, d. h., da wir hier $\mu = 1$ angenommen haben, wenn man die dort mit w bezeichnete Grösse $= \varkappa$ macht. Hieraus folgt, dass die durch die Gleichungen

$$u = \frac{a}{b}\varkappa y, \qquad v = -\frac{b}{a}\varkappa x, \qquad w = 0$$

bestimmte Bewegung bestehen kann, wenn die Flüssigkeit ein Ellipsoid bildet, welches mit der Drehungsgeschwindigkeit $\varkappa$ um die z-Achse wie ein fester Körper rotiren kann. Nach den an dem angeführten Orte gemachten Angaben giebt es drei solche Ellipsoide, zwei abgeplattete Rotationsellipsoide, deren Rotationsachse die z-Achse ist, und ein dreiachsiges, vorausgesetzt, dass $\varkappa$ innerhalb gewisser Grenzen liegt. Bildet die Flüssigkeit eines der beiden Rotationsellipsoide, so sind die hier und dort betrachteten Bewegungen ganz dieselben; sie sind aber verschieden im Falle des dreiachsigen Ellipsoids.

Die Bewegung der Theile eines dreiachsigen flüssigen Ellipsoids,

die wir so gefunden haben, ist von Dirichlet*) entdeckt; die Betrachtungen, die uns zur Kenntniss derselben geführt haben, lassen sich, wie wir zeigen wollen, leicht so verallgemeinern, dass sie eine Bewegung geben, von der die eben besprochene *einen* speciellen Fall bildet, und die Bewegung, bei der das dreiachsige Ellipsoid wie ein fester Körper rotirt, einen *anderen*.

Wir nehmen an, dass die Flüssigkeit durch ein Ellipsoid begrenzt ist, welches um eine seiner Achsen mit der constanten Winkelgeschwindigkeit λ rotirt; wir beziehen die Bewegung aller Flüssigkeitstheile auf ein Coordinatensystem, dessen Achsen die Achsen dieses Ellipsoids sind; die z-Achse sei die Rotationsachse, die Gleichung 6) wieder die Gleichung des Ellipsoids. Nach den Betrachtungen, welche zu den Ausdrücken 5) der neunten Vorlesung geführt haben, darf man bei der Bildung der Differentialgleichungen der Bewegung davon absehen, dass das eingeführte Coordinatensystem rotirt, falls man zur x- und y-Componente der auf die Masseneinheit bezogenen, auf ein Flüssigkeitstheilchen wirkenden Kraft resp. hinzufügt

$$\lambda^2 x - 2\lambda v \quad \text{und} \quad \lambda^2 y + 2\lambda u.$$

Nimmt man an, dass die Bewegung, bezogen auf das genannte Coordinatensytem, eine stationäre ist, so ergeben daher die Gleichungen 10) der fünfzehnten Vorlesung bei Rücksicht auf die Gleichungen 7) und 8)

$$\begin{aligned}
u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= \left(\frac{2\sigma}{a^2} - 2\pi A + \lambda^2\right)x - 2\lambda v\\
u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= \left(\frac{2\sigma}{b^2} - 2\pi B + \lambda^2\right)y + 2\lambda u\\
u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= \left(\frac{2\sigma}{c^2} - 2\pi C\right)z.
\end{aligned}$$

Setzt man in diese Gleichungen für u, v, w ihre Werthe aus 4), so werden sie für alle Werthe von x, y, z erfüllt, falls die neun Gleichungen bestehen, deren linke Theile die linken Theile der Gleichungen 9) und deren rechte Theile

$$\begin{array}{ccc}
\frac{2\sigma}{a^2} - 2\pi A + \lambda^2 - 2\lambda a_{21}, & -2\lambda a_{22}, & -2\lambda a_{23}\\
2\lambda a_{11}, & \frac{2\sigma}{b^2} - 2\pi B + \lambda^2 + 2\lambda a_{12}, & 2\lambda a_{13}\\
0, & 0, & \frac{2\sigma}{c^2} - 2\pi C
\end{array}$$

sind. Zu diesen neun Gleichungen kommen, wenn die gedachte Bewegung eine mögliche sein soll, ungeändert die Gleichungen 5) und 10). Allen diesen Bedingungen genügt man, wenn man

*) Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen achter Band, 1860.

$$a_{11} = 0, \quad a_{22} = 0, \quad a_{33} = 0$$

$$a_{13} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad a_{31} = 0, \quad a_{32} = 0$$

und

$$\frac{a_{12}}{a^2} + \frac{a_{21}}{b^2} = 0$$

$$a_{12} a_{21} = \frac{2\sigma}{a^2} - 2\pi A + \lambda^2 - 2\lambda a_{21} = \frac{2\sigma}{b^2} - 2\pi B + \lambda^2 + 2\lambda a_{12}$$

$$0 = \frac{2\sigma}{c^2} - 2\pi C$$

macht. Setzt man wieder

$$a_{12} = \frac{a}{b}\varkappa, \quad a_{21} = -\frac{b}{a}\varkappa, \quad \text{also } a_{12}a_{21} = -\varkappa^2$$

und eliminirt σ, so erhält man die beiden Gleichungen zwischen $\varkappa, \lambda, a, b, c$

$$\begin{aligned} a^2(\varkappa^2 + \lambda^2) + 2\varkappa\lambda ab &= 2\pi(a^2 A - c^2 C) \\ b^2(\varkappa^2 + \lambda^2) + 2\varkappa\lambda ab &= 2\pi(b^2 B - c^2 C). \end{aligned} \tag{12)}$$

Sind a, b, c beliebig gegeben, so können $\varkappa$ und λ aus diesen Gleichungen berechnet werden; die Werthe, die man dafür findet, und die gegen einander vertauscht werden können, sind aber nicht immer reell, d. h. die durch die entwickelten Gleichungen dargestellte Bewegung ist nicht immer eine mögliche. Wir wollen hier die Grenzen des Gebietes nicht aufsuchen, in dem die Verhältnisse $a : b : c$ liegen müssen, damit die Gleichungen 12) reelle Werthe von $\varkappa$ und λ ergeben; ein einfacher Fall, in dem dieses stattfindet, ist der, dass

$$b^2 = c^2 \quad \text{und} \quad a^2 > c^2$$

ist, in welchem Falle die zweite der Gleichungen 12)

$$c(\varkappa^2 + \lambda^2) + 2\varkappa\lambda a = 0$$

wird.

§ 3.

Die Euler'schen hydrodynamischen Differentialgleichungen sind denen von Lagrange vorzuziehen, wenn die Bewegung, um die es sich handelt, eine stationäre oder eine solche ist, die, wie die im vorigen § zuletzt betrachtete, sich dadurch auf eine stationäre zurückführen lässt, dass man sie auf ein bewegtes Coordinatensystem bezieht. Ihre Anwendung ist auch dann bequem, wenn die Verrückungen und Geschwindigkeiten der Flüssigkeitstheile unendlich klein sind; solche Fälle bildeten den Gegenstand der beiden vorigen Vorlesungen; mit einem Falle, der auch hierher gehört, wollen wir uns nun beschäftigen, nämlich mit den unendlich kleinen Schwingungen einer schweren incompressibeln Flüssigkeit.

Wir setzen voraus, dass ein Geschwindigkeitspotential φ existirt; die partielle Differentialgleichung, mit der wir es zu thun haben, ist dann wieder die Gleichung $\varDelta\varphi = 0$. Die Flüssigkeit soll theilweise von festen Wänden begrenzt sein; für alle Elemente dieser ist dann

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0; \tag{13)}$$

sie soll aber auch eine freie Oberfläche darbieten, welche unendlich wenig von einer horizontalen Ebene abweicht, und auf welche ein constanter Druck ausgeübt wird; es muss zunächst die Grenzbedingung aufgesucht werden, der φ an dieser freien Oberfläche zu genügen hat. Wir nehmen die xy-Ebene des Coordinatensystemes unendlich nahe an der freien Oberfläche, die z-Achse vertikal abwärts gekehrt an; in der Gleichung 1) können wir dann

$$V = C + gz$$

setzen, wo C eine Constante bedeutet, über die wir nach Willkür verfügen dürfen. Bezeichnen wir die Geschwindigkeiten als unendlich kleine Grössen erster Ordnung und vernachlässigen in der Gleichung 1) unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung, so erhalten wir

$$C + gz - p = \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Setzen wir C = dem constanten Druck, der auf die Oberfläche wirken soll und wenden diese Gleichung auf die Oberfläche an, so erhalten wir als Gleichung derselben

$$gz = \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{14)}$$

Wir beziehen diese auf ein gewisses Flüssigkeitstheilchen an der Oberfläche, differentiiren sie nach t und vernachlässigen die auf der rechten Seite dabei auftretenden unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung; wir erhalten dann

$$g\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \tag{15)}$$

In dieser Gleichung sind für z die unendlich kleinen Werthe zu setzen, die der Oberfläche entsprechen; statt dessen kann man in ihr

$$z = 0$$

machen.

Die Gleichungen 13) und 15) sind die Grenzbedingungen, denen gemäss φ zu bestimmen ist. Es ist leicht, ihnen für gewisse specielle Fälle zu genügen. Wir setzen

$$\varphi = ZU \tag{16)}$$

und nehmen an, dass Z eine Function von z und t, U eine Function von x und y ist; der Gleichung 13) kann dann genügt werden, falls die Flüssigkeit seitlich durch eine vertikale Cylinderfläche, unten durch einen horizontalen Boden begrenzt ist; für jene muss dann

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0, \tag{17}$$

für diesen

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \tag{18}$$

gemacht werden. Die Gleichung $\Delta \varphi = 0$ wird durch 16)

$$Z\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) + U\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0;$$

ihr wird genügt, wenn man

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \varkappa^2 Z \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\varkappa^2 U \tag{20}$$

setzt, wo $\varkappa$ eine Constante sein soll. Ist für den Boden

$$z = h,$$

so folgt aus 19) und 18)

$$Z = M\left(e^{\varkappa(h-z)} + e^{-\varkappa(h-z)}\right), \tag{21}$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet und M eine Function von t ist. Diese bestimmt sich aus der Gleichung 15), welche durch 16) und 21) wird

$$\frac{d^2 M}{dt^2} = -g\varkappa\,\frac{e^{\varkappa h} - e^{-\varkappa h}}{e^{\varkappa h} + e^{-\varkappa h}}\,M;$$

hieraus folgt

$$M = A\cos\frac{t - t_0}{T}\,2\pi, \tag{22}$$

wo A und t_0 zwei willkürliche Constanten bedeuten und

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g\varkappa}\,\frac{e^{\varkappa h} + e^{-\varkappa h}}{e^{\varkappa h} - e^{-\varkappa h}}} \tag{23}$$

ist. Die Gleichung, die man aus 16) durch 21) und 22) erhält, stellt, vorausgesetzt, dass U den Gleichungen 20) und 17) gemäss bestimmt werden kann, eine Bewegung dar, bei der jedes Flüssigkeitstheilchen Schwingungen ausführt, deren Dauer T ist. Der für T angegebene Ausdruck vereinfacht sich wesentlich in den Fällen, dass $\varkappa h$ als unendlich gross oder als unendlich klein angesehen werden kann; im ersten Falle ist

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g\varkappa}},$$

im zweiten, wie die Entwickelung der Exponentialgrössen zeigt,

$$T = \frac{2\pi}{\varkappa\sqrt{gh}}.$$

Wir wollen die Bestimmung der Function U nur für den einfachsten Fall ausführen; wir wollen nämlich annehmen, dass der horizontale Querschnitt der Flüssigkeit ein Rechteck ist, dessen Seiten den Achsen der x und y parallel sind, und dass U von y unabhängig ist. Die Gleichung 20) wird dann

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -\varkappa^2 U$$

und ihr allgemeines Integral ist

$$\cos\varkappa(x - x_0),$$

wo x_0 eine willkürliche Constante bedeutet, multiplicirt mit einer zweiten willkürlichen Constanten. Wenn für die Wände, die die Flüssigkeit in der Richtung der x-Achse begrenzen,

$$x = 0 \quad \text{und} \quad x = l$$

ist, so erfordert die Gleichung 17), dass für diese Werthe von x

$$\frac{dU}{dx} = 0$$

ist; man genügt dem, wenn man

$$x_0 = 0, \quad \varkappa = \frac{n\pi}{l} \tag{24}$$

macht, wo n eine ganze Zahl bedeutet. Man hat hiernach

$$\varphi = A\cos\frac{t-t_0}{T}2\pi\cdot\cos\frac{nx}{l}\pi\cdot\left(e^{\frac{n(h-z)}{l}\pi} + e^{-\frac{n(h-z)}{l}\pi}\right).$$

Man erfüllt auch alle Bedingungen, die zu erfüllen sind, wenn man φ gleich einer Summe solcher Ausdrücke setzt, wie der aufgestellte einer ist, und die sich von einander unterscheiden durch die Werthe der ganzen Zahl n und der Constanten A und t_0; man kann also auch

$$\varphi = \sum\left(A_n\cos\frac{t}{T_n}2\pi + B_n\sin\frac{t}{T_n}2\pi\right)\left(e^{\frac{n(h-z)}{l}\pi} + e^{-\frac{n(h-z)}{l}\pi}\right)\cos\frac{nx}{l}\pi$$

setzen, wo die Summe nach n zu nehmen ist, A_n, B_n willkürliche Constanten sind und T_n den aus 23) und 24) zu berechnenden Werth von T bedeutet. Wir bemerken, ohne näher darauf einzugehen, dass die Constanten A_n, B_n mit Hülfe der sogenannten Fourier'schen Reihen, sich so bestimmen lassen, dass die Bewegung einem beliebigen Anfangszustande entspricht, d. h. dass für $t = 0$ und für die Oberfläche z — d. i. nach 14) $\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ — und $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ beliebig gegebenen Functionen von x gleich werden.

Wir wollen noch dèn Fall ins Auge fassen, dass die Flüssigkeit in der Richtung der x-Achse als unbegrenzt angesehen werden kann, d. h. dass für keinen Werth von x einer Grenzbedingung zu genügen ist. Die Gleichungen 24) brauchen dann nicht erfüllt zu werden; es bleibt $\varkappa$ und, wenn wir

$$\varkappa = \frac{2\pi}{\lambda}$$

machen, λ willkürlich, und wir können

$$\varphi = A\cos\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)2\pi \cdot \left(e^{\frac{h-z}{\lambda}2\pi} + e^{-\frac{h-z}{\lambda}2\pi}\right) \tag{25}$$

$$T = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}\frac{e^{\frac{h2\pi}{\lambda}} + e^{-\frac{h2\pi}{\lambda}}}{e^{\frac{h2\pi}{\lambda}} - e^{-\frac{h2\pi}{\lambda}}}}$$

setzen. Die hierdurch dargestellte Bewegung besteht in Wellen, die in der Richtung der x-Achse fortschreiten, deren Wellenlänge λ und deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$= \frac{\lambda}{T}, \text{ d. h.} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\frac{e^{\frac{h2\pi}{\lambda}} - e^{-\frac{h2\pi}{\lambda}}}{e^{\frac{h2\pi}{\lambda}} + e^{-\frac{h2\pi}{\lambda}}}}$$

ist. Diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist im Allgemeinen von der Wellenlänge abhängig; sie ist es nur dann nicht, wenn λ als unendlich gross gegen die Tiefe h angesehen werden kann, in welchem Falle sie

$$= \sqrt{gh}$$

ist. Ist im Gegentheil h unendlich gross gegen λ, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$= \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}.$$

Die Bahn, welche ein Flüssigkeitstheilchen beschreibt, findet man auf dem folgenden Wege. Es seien $x + \xi$, y, $z + \zeta$ die Coordinaten zur Zeit t des Theilchens, dessen Coordinaten x, y, z zur Zeit $t = 0$ sind; es ist dann

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

d. h. nach 25)

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{A\,2\pi}{\lambda}\left(e^{\frac{h-z}{\lambda}2\pi} + e^{-\frac{h-z}{\lambda}2\pi}\right)\sin\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)2\pi$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\frac{A\,2\pi}{\lambda}\left(e^{\frac{h-z}{\lambda}2\pi} - e^{-\frac{h-z}{\lambda}2\pi}\right)\cos\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)2\pi,$$

woraus folgt

$$\xi = -\frac{AT}{\lambda}\left(e^{\frac{h-z}{\lambda}2\pi} + e^{-\frac{h-z}{\lambda}2\pi}\right)\left(\cos\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)2\pi - \cos\frac{x\,2\pi}{\lambda}\right)$$

$$\zeta = -\frac{AT}{\lambda}\left(e^{\frac{h-z}{\lambda}2\pi} + e^{-\frac{h-z}{\lambda}2\pi}\right)\left(\sin\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)2\pi + \sin\frac{x\,2\pi}{\lambda}\right).$$

Durch Elimination von t ergiebt sich hieraus

$$\left(\frac{\xi}{a} - \cos\frac{x\,2\pi}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{c} + \sin\frac{x\,2\pi}{\lambda}\right)^2 = 1,$$

wenn

$$a = \frac{AT}{\lambda}\left(e^{\frac{h-z}{\lambda}2\pi} + e^{-\frac{h-z}{\lambda}2\pi}\right)$$

$$c = \frac{AT}{\lambda}\left(e^{\frac{h-z}{\lambda}2\pi} - e^{-\frac{h-z}{\lambda}2\pi}\right)$$

gesetzt wird. Das ist die Gleichung einer Ellipse, deren Halbachsen horizontal und vertical sind und die Längen a und c haben. Ist h unendlich gross, während λ und z endlich sind, so ist $a = c$, alle Flüssigkeitstheilchen beschreiben dann Kreise*).

§ 4.

Wir wollen jetzt die hydrodynamischen Differentialgleichungen von Lagrange auf einige Bewegungen einer incompressibeln Flüssigkeit, auf deren Theile Kräfte wirken, und auf deren freie Oberfläche ein constanter Druck ausgeübt wird, anwenden. Der erste Fall, den wir betrachten, ist der, dass Wellen gewisser Art von endlicher Höhe in einer schweren Flüssigkeit fortschreiten. Wir setzen wieder die Dichtigkeit der Flüssigkeit $= 1$, wählen die z Achse vertical abwärts gekehrt und nehmen an, dass die Bewegung überall parallel der xz-Ebene vor sich geht. Die Gleichungen 7) der fünfzehnten Vorlesung geben dann, wenn man

$$b = y$$

setzt,

$$\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - g\right)\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial a} = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial c} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - g\right)\frac{\partial z}{\partial c} + \frac{\partial p}{\partial c} = 0; \qquad 26)$$

die Gleichungen 8) und 3) derselben Vorlesung werden

$$\frac{dD}{dt} = 0, \quad D = \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a}.$$

Es können hier a und c irgend zwei Variable sein, deren Werthe zusammen mit y ein Flüssigkeitstheilchen eindeutig bestimmen;

*) Vergl. Holtzmann, Programm der Polytechnischen Schule in Stuttgart, 1858.

hierzu ist erforderlich, dass in dem von der betrachteten Flüssigkeit erfüllten Raume D weder unendlich wird, noch verschwindet; im Uebrigen lassen wir die Bedeutung von a und c vorläufig unbestimmt. Wir werden zeigen, dass den aufgestellten Gleichungen genügt wird durch

$$x - a = r \sin \vartheta, \quad z - c = r \cos \vartheta$$
$$\vartheta = \left(\frac{a}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi, \tag{27}$$

wo λ und T zwei Constanten, r eine Function von c bedeuten, über die zu verfügen wir uns vorbehalten: Hierdurch ist ausgesprochen, dass ein jedes Flüssigkeitstheilchen in einem Kreise mit gleichbleibender Geschwindigkeit so sich bewegt, dass T die Dauer eines Umlaufes ist. Aus den für x und z angenommenen Ausdrücken folgt

$$\frac{\partial x}{\partial a} = 1 + \frac{2\pi}{\lambda} r \cos \vartheta, \quad \frac{\partial x}{\partial c} = \frac{dr}{dc} \sin \vartheta$$
$$\frac{\partial z}{\partial a} = -\frac{2\pi}{\lambda} r \sin \vartheta, \quad \frac{\partial z}{\partial c} = 1 + \frac{dr}{dc} \cos \vartheta, \tag{28}$$

also

$$D = 1 + \frac{2\pi}{\lambda} r \frac{dr}{dc} + \left(\frac{dr}{dc} + \frac{2\pi}{\lambda} r\right) \cos \vartheta.$$

Da D von t unabhängig sein soll und ϑ von t abhängt, so muss

$$\frac{dr}{dc} = -\frac{2\pi}{\lambda} r \tag{29}$$

und

$$D = 1 + \frac{2\pi}{\lambda} r \frac{dr}{dc} \tag{30}$$

sein. Die erste von diesen Gleichungen giebt

$$r = Re^{-\frac{2\pi}{\lambda} c}, \tag{31}$$

wo R eine willkürliche Constante ist.

Aus den für x und z angenommenen Ausdrücken folgt weiter

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \sin \vartheta, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \cos \vartheta.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen 26) und benutzt 28) und 29), so werden dieselben

$$\frac{\partial p}{\partial a} = \left(\frac{2\pi}{T^2} - \frac{g}{\lambda}\right) 2\pi r \sin \vartheta$$
$$\frac{\partial p}{\partial c} = \left(\frac{2\pi}{T^2} - \frac{g}{\lambda}\right) 2\pi r \cos \vartheta + g - \frac{8\pi^3}{T^2\lambda} r^2.$$

Man genügt beiden, wenn man zwischen den bisher willkürlich gelassenen Constanten T und λ die Relation

$$\frac{g}{\lambda} = \frac{2\pi}{T^2}$$

festsetzt und p so als Function der *einen* Variabeln c bestimmt, dass

$$\frac{dp}{dc} = g\left(1 - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} R^2 e^{-\frac{4\pi}{\lambda}c}\right)$$

ist. Ist $p = p_0$ für $c = 0$, so folgt aus dieser Gleichung

$$p = p_0 + g\left(c - \frac{\pi}{\lambda} R^2 (1 - e^{-\frac{4\pi}{\lambda}c})\right).$$

An der freien Oberfläche müssen stets dieselben Flüssigkeitstheilchen sich befinden und der Druck soll in ihr ein constanter sein; wir genügen diesen beiden Bedingungen, wenn wir annehmen, dass für die freie Oberfläche

$$p = p_0 \quad \text{und} \quad c = 0$$

ist. Im Uebrigen nehmen wir die Flüssigkeit als unbegrenzt an; es variirt dann a zwischen $-\infty$ und $+\infty$, c zwischen 0 und $+\infty$.

Die Constante R darf einen gewissen Werth nicht überschreiten, damit in keinem Punkte der Flüssigkeit D verschwinde. Aus 30) und 31) folgt

$$D = 1 - \left(\frac{2\pi}{\lambda} R\right)^2 e^{-\frac{4\pi}{\lambda}c};$$

es darf also R nicht grösser als

$$\frac{\lambda}{2\pi} \tag{32}$$

sein.

In x und z ausgedrückt, erhält man die Gleichung der freien Oberfläche zur Zeit t, wenn man in 27) $c = 0$ setzt und a und ϑ eliminirt; sie ist daher das Resultat der Elimination von ϑ aus den Gleichungen

$$x - \frac{\lambda}{T} t = R \sin\vartheta + \frac{\lambda}{2\pi}\vartheta$$

$$z = R\cos\vartheta.$$

Da x und t hier nur in der Verbindung $x - \frac{\lambda}{T} t$ vorkommen, so schreitet die Oberfläche mit der Geschwindigkeit $\frac{\lambda}{T}$ in der Richtung der x-Achse ohne Gestaltsänderung fort. Für irgend einen Werth von t ist ihr Schnitt mit der xz-Ebene eine Cycloide; der Kreis, bei dessen Rollen sie durch einen Punkt beschrieben wird, hat den Radius R, sein Mittelpunkt bewegt sich auf der x-Achse; der Punkt, der sie beschreibt, befindet sich im Abstande $\frac{\lambda}{2\pi}$ vom Mittelpunkte. Erhält R seinen in 32) angegebenen Grenzwerth, so erhält die Cycloide Spitzen.

Bei der hier betrachteten Bewegung existirt nicht ein Geschwindigkeitspotential, es rotiren die Flüssigkeitstheilchen um die y-Achse. Nennt man χ die Rotationsgeschwindigkeit, so erhält man aus den Gleichungen 15) und 14) der fünfzehnten Vorlesung

$$-2D\chi = \frac{\partial \frac{dx}{dt}}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial \frac{dx}{dt}}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a}$$

$$+ \frac{\partial \frac{dz}{dt}}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial \frac{dz}{dt}}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a},$$

also nach 28) und 29)

$$-2D\chi = \frac{8\pi^2}{\lambda T}\, r\, \frac{dr}{dc}.$$

Die in diesem § erörterte Bewegung ist von Gerstner*) entdeckt; später hat sie selbständig Rankine**) behandelt.

§ 5.

Wir kehren nun noch einmal zur Betrachtung einer Flüssigkeit zurück, wie wir sie im § 2 uns gedacht haben, also einer Flüssigkeit, deren Theile nach dem Newton'schen Gesetze einander anziehen und auf deren Oberfläche ein constanter Druck wirkt, lassen aber die dort gemachte Voraussetzung fallen, dass ihre Bewegung eine stationäre ist oder auf eine solche dadurch zurückgeführt werden kann, dass man sie auf ein passend bewegtes Coordinatensystem bezieht. Wie Dirichlet in der schon im § 2 angeführten Abhandlung gezeigt hat, erhält man mögliche Bewegungen einer solchen Flüssigkeit, wenn man annimmt, dass die Coordinaten eines jeden Theilchens lineare Functionen ihrer Anfangswerthe sind und im Anfange die Flüssigkeit ein Ellipsoid bildet.

Unter a, b, c verstehen wir jetzt die Anfangswerthe von x, y, z, schreiben die Gleichung der Oberfläche zur Zeit $t = 0$

$$\frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{B^2} + \frac{c^2}{C^2} = 1, \tag{33}$$

und setzen

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c \\ y &= \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c \\ z &= \alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c, \end{aligned} \tag{34}$$

wo die 9 Grössen α, β, γ zu bestimmende Functionen der Zeit bedeuten. Es müssen diese zunächst der Gleichung

*) Theorie der Wellen sammt einer daraus abgeleiteten Theorie der Deichprofile von Franz Gerstner, Prag 1804.

**) London Philos. Transactions, 1863, Part. I, p. 227.

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 1 \tag{35}$$

genügen; ihre Anfangswerthe sind

$$\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1$$

$$\alpha_2 = \beta_1 = \alpha_3 = \gamma_1 = \beta_3 = \gamma_2 = 0,$$

die Anfangswerthe ihrer nach t genommenen Differentialquotienten sind beliebig bis auf die Bedingung, der sie genügen müssen, die durch Differentiation aus 35) folgt, d. h. der Bedingung

$$\frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{d\beta_2}{dt} + \frac{d\gamma_3}{dt} = 0.$$

Die Gleichung 33) ist auch die Gleichung der Oberfläche der Flüssigkeit zur Zeit t; führt man in sie x, y, z an Stelle von a, b, c mit Hülfe von 34) ein, so sieht man, dass die Flüssigkeit immer ein Ellipsoid bildet, dessen Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten ist, dessen Achsen der Grösse und Richtung nach aber von der Zeit abhängen.

Das Potential V der Flüssigkeit zur Zeit t in Bezug auf den inneren Punkt (x, y, z) ist gleich der Summe einer homogenen Function zweiten Grades von x, y, z und einer von x, y, z unabhängigen Grösse; denn diese Eigenschaft hat V, wenn die Achsen der x, y, z mit den Hauptachsen des flüssigen Ellipsoids zusammenfallen, und sie geht nicht verloren, wenn man statt eines solchen Coordinatensystemes ein anderes mit demselben Anfangspunkte einführt. Bei Rücksicht auf 34) folgt hieraus, dass

$$V = H - Ka^2 - Lb^2 - Mc^2 - 2K'bc - 2L'ca - 2M'ab \tag{36}$$

ist, wo die 7 neu eingeführten Zeichen Functionen der Zeit bedeuten, die durch die 9 Functionen α, β, γ und die 3 Constanten A, B, C in gewisser Weise ausdrückbar sind.

Endlich setzen wir

$$p = \text{const.} + \sigma\left(1 - \frac{a^2}{A^2} - \frac{b^2}{B^2} - \frac{c^2}{C^2}\right),$$

wo σ eine unbekannte Function von t bedeutet.

Bei diesen Annahmen genügen wir der Bedingung, dass der Druck an der Oberfläche der Flüssigkeit ein constanter ist, und die Gleichungen 7) der fünfzehnten Vorlesung werden in Bezug auf a, b, c linear und homogen. Allen Bedingungen des Problems wird genügt, wenn die 10 Functionen der Zeit α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3 und σ den folgenden Differentialgleichungen gemäss bestimmt werden:

$$\alpha_1 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \alpha_2 \frac{d^2\alpha_2}{dt^2} + \alpha_3 \frac{d^2\alpha_3}{dt^2} = -2K + \frac{2\sigma}{A^2}$$
$$\alpha_1 \frac{d^2\beta_1}{dt^2} + \alpha_2 \frac{d^2\beta_2}{dt^2} + \alpha_3 \frac{d^2\beta_3}{dt^2} = -2M'$$
$$\alpha_1 \frac{d^2\gamma_1}{dt^2} + \alpha_2 \frac{d^2\gamma_2}{dt^2} + \alpha_3 \frac{d^2\gamma_3}{dt^2} = -2L'$$
$$\beta_1 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2\alpha_2}{dt^2} + \beta_3 \frac{d^2\alpha_3}{dt^2} = -2M'$$
$$\beta_1 \frac{d^2\beta_1}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2\beta_2}{dt^2} + \beta_3 \frac{d^2\beta_3}{dt^2} = -2L + \frac{2\sigma}{B^2} \tag{37}$$
$$\beta_1 \frac{d^2\gamma_1}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2\gamma_2}{dt^2} + \beta_3 \frac{d^2\gamma_3}{dt^2} = -2K'$$
$$\gamma_1 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2\alpha_2}{dt^2} + \gamma_3 \frac{d^2\alpha_3}{dt^2} = -2L'$$
$$\gamma_1 \frac{d^2\beta_1}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2\beta_2}{dt^2} + \gamma_3 \frac{d^2\beta_3}{dt^2} = -2K'$$
$$\gamma_1 \frac{d^2\gamma_1}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2\gamma_2}{dt^2} + \gamma_3 \frac{d^2\gamma_3}{dt^2} = -2M + \frac{2\sigma}{C^2}$$
$$D = 1.$$

7 Integrale dieser Gleichungen können wir nach allgemeinen Betrachtungen, die wir durchgeführt haben, angeben. Drei von diesen folgen aus den Gleichungen 14) der fünfzehnten Vorlesung, wenn man in diese die Werthe von x, y, z aus 34) einführt; sie sagen aus, dass die drei Ausdrücke

$$\beta_1 \frac{d\gamma_1}{dt} - \gamma_1 \frac{d\beta_1}{dt} + \beta_2 \frac{d\gamma_2}{dt} - \gamma_2 \frac{d\beta_2}{dt} + \beta_3 \frac{d\gamma_3}{dt} - \gamma_3 \frac{d\beta_3}{dt}$$
$$\gamma_1 \frac{d\alpha_1}{dt} - \alpha_1 \frac{d\gamma_1}{dt} + \gamma_2 \frac{d\alpha_2}{dt} - \alpha_2 \frac{d\gamma_2}{dt} + \gamma_3 \frac{d\alpha_3}{dt} - \alpha_3 \frac{d\gamma_3}{dt} \tag{38}$$
$$\alpha_1 \frac{d\beta_1}{dt} - \beta_1 \frac{d\alpha_1}{dt} + \alpha_2 \frac{d\beta_2}{dt} - \beta_2 \frac{d\alpha_2}{dt} + \alpha_3 \frac{d\beta_3}{dt} - \beta_3 \frac{d\alpha_3}{dt}$$

Constanten gleich sind. Die vier andern findet man durch die folgende Ueberlegung. Wir haben im § 6 der eilften Vorlesung nachgewiesen, dass für eine Flüssigkeit, wie wir sie hier betrachten, das d'Alembert'sche Princip in derselben Form gilt, wie für ein System discreter Punkte. Aus den in der vierten Vorlesung gemachten Auseinandersetzungen folgt daher, dass für die Bewegung, die wir hier betrachten, der Satz von der lebendigen Kraft, der Satz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes und die Sätze von der Erhaltung der Flächen gelten. Bilden wir zuerst die Gleichung, welche den Satz von der lebendigen Kraft ausspricht.

Wir bezeichnen durch $d\tau$ ein Element der Masse der Flüssigkeit, welches zur Zeit $t = 0$ die Coordinaten a, b, c hat; die lebendige Kraft T zur Zeit t ist dann bestimmt durch

$$T = \tfrac{1}{2}\int\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right) d\tau.$$

Hier setze man für $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ die aus 34) sich ergebenden Werthe ein und benutze, dass

$$\begin{aligned}
\int a^2\, d\tau &= \frac{4\pi}{3} ABC\, \frac{A^2}{5} & \int bc\, d\tau &= 0 \\
\int b^2\, d\tau &= \frac{4\pi}{3} ABC\, \frac{B^2}{5} & \int ca\, d\tau &= 0 \\
\int c^2\, d\tau &= \frac{4\pi}{3} ABC\, \frac{C^2}{5} & \int ab\, d\tau &= 0
\end{aligned} \tag{39}$$

ist, welche Gleichungen mit Leichtigkeit sich ergeben, wenn man $d\tau = da\, db\, dc$ setzt und an Stelle von a, b, c als Integrationsvariable $\frac{a}{A}$, $\frac{b}{B}$, $\frac{c}{C}$ einführt; man erhält dann

$$T = \frac{2\pi}{15} ABC \left\{\begin{aligned}
& A^2\left(\left(\frac{d\alpha_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_3}{dt}\right)^2\right) \\
+ & B^2\left(\left(\frac{d\beta_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta_3}{dt}\right)^2\right) \\
+ & C^2\left(\left(\frac{d\gamma_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2\right)
\end{aligned}\right\}.$$

Ferner sei U das Potential aller wirkenden Kräfte; es ist dann

$$U = \int V\, d\tau$$

oder, wie wir sagen wollen, = dem Potential des flüssigen Ellipsoids in Bezug auf sich selbst. Nach einem Satze, der in der unten stehenden Anmerkung*) bewiesen ist, ist dieses = $\frac{4}{5}$ mal dem

---

*) Das Potential einer Masse, die mit der Dichtigkeit 1 das Ellipsoid erfüllt, dessen Oberfläche die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

hat, in Bezug auf den innern Punkt (x, y, z) ist nach der Gleichung 4) der achtzehnten Vorlesung

$$= \pi abc \int_0^\infty d\lambda\, \frac{1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}};$$

die Coefficienten von x^2, y^2, z^2 in diesem Ausdrucke sind, wie schon auf Seite 128 bemerkt ist, nur von den Verhältnissen von a, b, c, nicht aber von den absoluten Werthen dieser Grössen abhängig; daraus folgt, dass das Potential einer Masse, die mit der Dichtigkeit 1 den Raum erfüllt, der durch die beiden Flächen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = n^2$$

und

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = n'^2$$

Volumen, mal dem Potential desselben in Bezug auf seinen Mittelpunkt, d. h. es ist

$$U = \frac{16\pi}{15} ABC \cdot H,$$

wo H die in 36) definirte Bedeutung hat. Der Satz von der lebendigen Kraft sagt aus, dass zwischen diesen Grössen T und U die Gleichung besteht

$$T = U + \text{const.}$$

Der Satz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes giebt, auf unser Problem angewendet, nur identische Gleichungen; auf ihm beruht die Zulässigkeit der Annahme, die wir gemacht haben, dass der Mittelpunkt des flüssigen Ellipsoids an demselben Orte bleibt.

Die Sätze von der Erhaltung der Flächen geben 3 Integrale; sie sagen aus, dass die Ausdrücke

---

begrenzt ist, in Bezug auf einen Punkt in der Höhlung derselben constant und so gross ist, wie in Bezug auf den Mittelpunkt, also

$$= \pi abc(n'^2 - n^2)\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}},$$

wenn $n' > n$.

Um nun das Potential des Ellipsoids, dessen Halbachsen a, b, c sind, in Bezug auf sich selbst zu finden, suche man zunächst das Potential desselben in Bezug auf die Schicht, die durch die beiden Flächen begrenzt ist, welche mit seiner Oberfläche ähnlich sind, ähnlich liegen und die Halbachsen an, bn, cn und $a(n+dn)$, $b(n+dn)$, $c(n+dn)$ haben. Dieses Potential setzt sich aus zwei Theilen zusammen, von denen der erste herrührt von der Masse ausserhalb der Schicht, der zweite von der Masse, die von der Schicht umschlossen wird. Der erste Theil ist

$$\frac{4\pi}{3} abc\, 3n^2 dn \,.\, \pi abc(1-n^2)\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}};$$

den zweiten findet man, wenn man erwägt, dass das Potential einer Masse M in Bezug auf eine Masse M' gleich dem Potential der Masse M' in Bezug auf die Masse M ist,

$$= \frac{4\pi}{3} abcn^3 \,.\, \pi abc\, 2n\, dn \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

Addirt man diese beiden Ausdrücke und integrirt ihre Summe nach n von $n=0$ bis $n=1$, so ergiebt sich das gesuchte Potential des Ellipsoids (a, b, c) in Bezug auf sich selbst

$$= \frac{4}{5}\cdot\frac{4\pi}{3} abc \,.\, \pi abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}},$$

wodurch der im Texte ausgesprochene Satz bewiesen ist.

$$\int\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)d\tau,\quad \int\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)d\tau,\quad \int\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)d\tau,$$

d. h. nach 34) und 39) die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
&A^2\left(\alpha_2\frac{d\alpha_3}{dt}-\alpha_3\frac{d\alpha_2}{dt}\right)+B^2\left(\beta_2\frac{d\beta_3}{dt}-\beta_3\frac{d\beta_2}{dt}\right)+C^2\left(\gamma_2\frac{d\gamma_3}{dt}-\gamma_3\frac{d\gamma_2}{dt}\right)\\
&A^2\left(\alpha_3\frac{d\alpha_1}{dt}-\alpha_1\frac{d\alpha_3}{dt}\right)+B^2\left(\beta_3\frac{d\beta_1}{dt}-\beta_1\frac{d\beta_3}{dt}\right)+C^2\left(\gamma_3\frac{d\gamma_1}{dt}-\gamma_1\frac{d\gamma_3}{dt}\right) \quad 40)\\
&A^2\left(\alpha_1\frac{d\alpha_2}{dt}-\alpha_2\frac{d\alpha_1}{dt}\right)+B^2\left(\beta_1\frac{d\beta_2}{dt}-\beta_2\frac{d\beta_1}{dt}\right)+C^2\left(\gamma_1\frac{d\gamma_2}{dt}-\gamma_2\frac{d\gamma_1}{dt}\right)
\end{aligned}$$

Constanten gleich sind.

§ 6.

Wir wollen nun die vereinfachende Annahme machen, dass die Hauptachsen des flüssigen Ellipsoids immer dieselben Richtungen behalten. Das ist der Fall, wenn wir

$$x=\alpha_1 a,\quad y=\beta_2 b,\quad z=\gamma_3 c$$

an Stelle der Gleichungen 34), also

$$\alpha_2=\alpha_3=\beta_1=\beta_3=\gamma_1=\gamma_2=0$$

setzen. Die Werthe der Grössen H, K, L, . . . sind dann aus der Vergleichung der Gleichung 36) mit der Gleichung

$$V=\pi ABC\int_0^\infty d\lambda\,\frac{1-\dfrac{\alpha_1^2a^2}{\alpha_1^2A^2+\lambda}-\dfrac{\beta_2^2b^2}{\beta_2^2B^2+\lambda}-\dfrac{\gamma_3^2c^2}{\gamma_3^2C^2+\lambda}}{\sqrt{(\alpha_1^2A+\lambda)(\beta_2^2B^2+\lambda)(\gamma_3^2C^2+\lambda)}}$$

zu entnehmen, und die Gleichungen 37) geben zur Bestimmung der vier unbekannten Functionen α_1, β_2, γ_3, σ, wenn man

$$\sqrt{(\alpha_1^2A^2+\lambda)(\beta_2^2B^2+\lambda)(\gamma_3^2C^2+\lambda)}=N$$

setzt,

$$\begin{aligned}
\alpha_1\frac{d^2\alpha_1}{dt^2}&=\frac{2\sigma}{A^2}-2\pi ABC\int_0^\infty\frac{d\lambda}{N}\,\frac{\alpha_1^2}{\alpha_1^2A^2+\lambda}\\
\beta_2\frac{d^2\beta_2}{dt^2}&=\frac{2\sigma}{B^2}-2\pi ABC\int_0^\infty\frac{d\lambda}{N}\,\frac{\beta_2^2}{\beta_2^2B^2+\lambda}\\
\gamma_3\frac{d^2\gamma_3}{dt^2}&=\frac{2\sigma}{C^2}-2\pi ABC\int_0^\infty\frac{d\lambda}{N}\,\frac{\gamma_3^2}{\gamma_3^2C^2+\lambda}\\
\alpha_1\beta_2\gamma_3&=1.
\end{aligned}$$

Die Ausdrücke 38) werden $=0$; es findet keine Rotation der

Flüssigkeitstheilchen statt, für die Bewegung existirt ein Geschwindigkeitspotential. Auch die Ausdrücke 40) sind $= 0$. Ein erstes Integral hat man in dem Satze von der lebendigen Kraft. Auf Quadraturen ist das Problem nicht zurückgeführt.

Die Richtungen der Achsen des flüssigen Ellipsoids kann man als gleichbleibend auch dann betrachten, wenn dasselbe immer ein Rotationsellipsoid ist, dessen Rotationsachse mit der z-Achse zusammenfällt. Auch bei dieser Annahme kann den Gleichungen 37) genügt werden. Bei derselben ist die Gleichung der Oberfläche, in a, b, c ausgedrückt,

$$\frac{a^2+b^2}{A^2}+\frac{c^2}{C^2}=1,$$

in x, y, z ausgedrückt, kann sie geschrieben werden

$$\frac{x^2+y^2}{X^2}+\frac{z^2}{Z^2}=1,$$

wobei dann X und Z die Halbachsen bedeuten; stellt man die Bedingungen dafür auf, dass diese beiden Gleichungen bei Rücksicht auf 34) identische werden, so findet man

$$\gamma_1=0,\quad \gamma_2=0,\quad \alpha_3=0,\quad \beta_3=0$$
$$\alpha_1=\pm\beta_2,\quad \alpha_2=\mp\beta_1,$$

wo die beiden oberen oder die beiden unteren Vorzeichen zu wählen sind. Diese Zweideutigkeit hebt sich, wenn man γ_3 als positiv annimmt und die Gleichung $D=1$ berücksichtigt; es ergiebt sich dann

$$\alpha_1=\beta_2,\quad \alpha_2=-\beta_1.$$

Dabei wird die Gleichung $D=1$

$$(\alpha_1^2+\beta_1^2)\gamma_3=1$$

und man findet

$$X^2=\frac{A^2}{\gamma_3},\quad Z^2=C^2\gamma_3^2$$

$$x=\alpha_1 a+\beta_1 b,\quad y=-\beta_1 a+\alpha_1 b,\quad z=\gamma_3 c.$$

Man erhält hieraus

$$V=\pi A^2 C\int_0^\infty d\lambda\,\gamma_3\,\frac{1-\frac{a^2+b^2}{A^2+\gamma_3\lambda}-\frac{\gamma_3^2c^2}{\gamma_3^2C^2+\lambda}}{(A^2+\gamma_3\lambda)\sqrt{\gamma_3^2C^2+\lambda}};$$

indem man diese Gleichung mit 36) vergleicht, bekommt man die Werthe von H, K, L . . Benutzt man dieselben, so reduciren sich die Gleichungen 37) auf die folgenden:

$$\alpha_1 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \beta_1 \frac{d^2\beta_1}{dt^2} = \frac{2\sigma}{A^2} - 2\pi A^2 C \int_0^\infty \frac{\gamma_3\, d\lambda}{(A^2+\gamma_3\lambda)^2 \sqrt{\gamma_3^2 C^2 + \lambda}}$$

$$\gamma_3 \frac{d^2\gamma_3}{dt^2} = \frac{2\sigma}{C^2} - 2\pi A^2 C \int_0^\infty \frac{\gamma_3^3\, d\lambda}{(A^2+\gamma_3\lambda)\,(\gamma_3^2 C^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\alpha_1 \frac{d^2\beta_1}{dt^2} - \beta_1 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} = 0$$

$$(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\,\gamma_3 = 1.$$

Die bei 38) und 40) angegebenen Integrale des allgemeineren Problems liefern *ein* Integral dieser Gleichungen, der Satz von der lebendigen Kraft liefert ein zweites. Diese beiden reichen aus, um das jetzt betrachtete Problem auf Quadraturen zurückzuführen. Die Discussion derselben lehrt die Schwingungen kennen, die die Oberfläche des Rotationsellipsoids im Allgemeinen ausführt. In Bezug auf diese Discussion verweisen wir auf die bereits im § 2 genannte Abhandlung von Dirichlet; in Bezug auf allgemeinere Untersuchungen, die die Bewegung eines flüssigen Ellipsoids betreffen, dessen Theile nach dem Newton'schen Gesetze sich anziehen, auf eine Abhandlung von Riemann, die sich im neunten Bande der Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen befindet.

Sechsundzwanzigste Vorlesung.

(Reibung einer incompressibeln Flüssigkeit. Aufstellung der Differentialgleichungen und der Grenzbedingungen. Strömung der Flüssigkeit durch eine lange, cylindrische Röhre. Einführung der Annahme, dass die Flüssigkeit an festen Körpern, mit denen sie in Berührung ist, haftet, und dass die Geschwindigkeiten unendlich klein sind. Gleichmässige Drehung einer Kugel in der Flüssigkeit um einen Durchmesser oder eines Rotationsellipsoids um seine Symmetrieachse in dem Falle, dass die Flüssigkeit äusserlich unbegrenzt oder durch eine concentrische Kugelfläche, resp. durch ein confocales Ellipsoid begrenzt ist. Berechnung des Drehungsmomentes der Kräfte, welche auf die Kugel oder das Ellipsoid wirken müssen. Widerstand einer Kugel, die gleichmässig in der Flüssigkeit fortschreitet. Drehende Schwingungen einer Kugel. Schwingungen einer Kugel, bei denen der Mittelpunkt auf einer Geraden hin- und hergeht.)

§ 1.

Wir wollen unsere hydrodynamischen Untersuchungen beschliessen mit der Betrachtung gewisser Bewegungen einer incompressibeln Flüssigkeit, bei denen die *Reibung* von Einfluss ist. Die Differentialgleichungen für solche Bewegungen haben wir bereits in der eilften Vorlesung aufgestellt. Wir bezeichnen wieder durch u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit im Punkte (x, y, z) zur Zeit t, setzen

$$\begin{aligned}
X_x &= p - 2k\frac{\partial u}{\partial x} \qquad & Y_z = Z_y &= -k\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\
Y_y &= p - 2k\frac{\partial v}{\partial y} \qquad & Z_x = X_z &= -k\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\
Z_z &= p - 2k\frac{\partial w}{\partial z} \qquad & X_y = Y_x &= -k\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),
\end{aligned} \tag{1}$$

wo k eine, die Reibung bedingende Constante der Flüssigkeit, p eine unbekannte Function von x, y, z, t bedeutet, und drücken die Componenten der Beschleunigung so aus, wie es im § 2 der fünfzehnten Vorlesung geschehen ist; die Differentialgleichungen, um die es sich handelt, sind dann, wenn man annimmt, dass auf die Theile der Flüssigkeit keine Kräfte wirken, und die Dichtigkeit derselben durch μ bezeichnet,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) = 0\\
&\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right) = 0\\
&\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right) = 0\\
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Substituirt man hier für X_x, Y_y . . ihre Werthe aus 1) und benutzt die vierte der Gleichungen 2) zur Vereinfachung der übrigen, so erhält man

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{k}{\mu}\Delta u = 0\\
&\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{k}{\mu}\Delta v = 0\\
&\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{k}{\mu}\Delta w = 0\\
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.
\end{aligned} \tag{3}
$$

An der Oberfläche der Flüssigkeit, also an den Flächen, in denen dieselbe einen andern Körper, der fest oder flüssig sein kann, berührt, sind gewisse Bedingungen zu erfüllen. Einige von diesen sind aus dem § 6 der zehnten Vorlesung und dem § 4 der eilften zu entnehmen. Nennen wir ds ein Element der Berührungsfläche und n die nach dem Innern der betrachteten Flüssigkeit gerichtete Normale von ds, so muss die Componente der Geschwindigkeit nach der Richtung von n für die Theilchen auf den beiden Seiten von ds gleichen Werth haben und es müssen X_n, Y_n, Z_n für diese Theilchen gleiche Werthe haben. Diese Bedingungen sind aber nicht ausreichend, um die Lösungen der Differentialgleichungen 2) oder 3) zu bestimmen; es ist eine Hypothese nöthig, um dieselben zu ergänzen. Eine geeignete Hypothese, die in gewissen Fällen sich bewährt hat, ist die, dass u, v, w selbst für die Theilchen auf beiden Seiten von ds dieselben Werthe besitzen, dass also die Theilchen der beiden Körper, die einmal mit einander in Berührung sind, immer mit einander in Berührung bleiben. Wir führen noch eine allgemeinere Hypothese, die aufgestellt ist, an. Wir beziehen u, v, w auf die Theilchen der betrachteten Flüssigkeit, die an ds liegen, u_1, v_1, w_1 auf die Theilchen auf der andern Seite von ds; es ist dann, wie erwähnt,

$$(u - u_1)\cos(nx) + (v - v_1)\cos(ny) + (w - w_1)\cos(nz) = 0.$$

$u - u_1$, $v - v_1$, $w - w_1$ können wir als die Componenten der *relativen Geschwindigkeit* der betreffenden Theilchen bezeichnen und diese Gleichung dahin aussprechen, dass diese relative Geschwindigkeit senkrecht auf n, also parallel mit ds ist. Den Druck, der auf

ds ausgeübt wird, den Druck nämlich, dessen Componenten nach den Coordinatenachsen X_n, Y_n, Z_n sind, denken wir uns in zwei Componenten zerlegt, von denen die eine parallel mit n, die andere parallel mit ds ist; die letztere hat nach der in Rede stehenden Hypothese die entgegengesetzte Richtung, wie jene relative Geschwindigkeit und ist dieser proportional. Den analytischen Ausdruck dieser Hypothese findet man durch die folgende Ueberlegung. Es ist

$$X_n \cos(nx) + Y_n \cos(ny) + Z_n \cos(nz)$$

die Componente des auf ds ausgeübten Druckes nach der Richtung von n; multiplicirt man diesen Ausdruck mit $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$, so erhält man die Componenten nach den Coordinatenachsen dieser Componente; zieht man diese Producte von X_n, Y_n, Z_n ab, so hat man in den Differenzen die Componenten nach den Coordinatenachsen der mit ds parallelen Componente des auf ds wirkenden Druckes. Nach der ausgesprochenen Hypothese ist daher

$$\begin{aligned}
X_n &- \big(X_n \cos(nx) + Y_n \cos(ny) + Z_n \cos(nz)\big)\cos(nx) = \lambda(u_1 - u)\\
Y_n &- \big(X_n \cos(nx) + Y_n \cos(ny) + Z_n \cos(nz)\big)\cos(ny) = \lambda(v_1 - v) \qquad 4)\\
Z_n &- \big(X_n \cos(nx) + Y_n \cos(ny) + Z_n \cos(nz)\big)\cos(nz) = \lambda(w_1 - w),
\end{aligned}$$

wo λ eine von der Natur der Flüssigkeit und des berührenden Körpers abhängige Constante bedeutet.

Nimmt man λ unendlich gross an, so führen die Gleichungen 4) zu der specielleren, vorher erwähnten Hypothese, nach der $u = u_1$, $v = v_1$, $w - w_1$ ist. Der andere Grenzfall ist der, dass $\lambda = 0$. Für ihn geben die Gleichungen 4)

$$X_n : Y_n : Z_n = \cos(nx) : \cos(ny) : \cos(nz),$$

wie man sieht, wenn man sie durch $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$ dividirt, und je zwei von einander abzieht; der Druck, dessen Componenten X_n, Y_n, Z_n sind, ist hiernach ein senkrechter; dieses muss stattfinden, wenn der berührende Körper eine Flüssigkeit ist, in der man die Reibung vernachlässigen darf.

§ 2.

Wir wollen jetzt particuläre Lösungen der im vorigen § aufgestellten Gleichungen suchen. Wir nehmen zuerst an, dass

$$u = 0 \quad \text{und} \quad v = 0,$$

d. h., dass die Bewegung überall parallel der z-Achse ist. Die erste, zweite und vierte der Gleichungen 3) werden dann

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

d. h. es ist p von x und y, w von z unabhängig. Die dritte der Gleichungen 3) wird

$$\mu \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} - k\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0,$$

woraus der eben gemachten Bemerkung wegen folgt

$$\frac{\partial p}{\partial z} = c, \quad k\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - \mu \frac{\partial w}{\partial t} = c,$$

wo c von x, y, z unabhängig, also eine Function der einen Variabeln t ist. Wir specialisiren den betrachteten Fall noch weiter, indem wir annehmen, dass die Bewegung eine stationäre ist; es ist dann c eine Constante und

$$\frac{dp}{dz} = c, \quad k\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = c. \tag{5}$$

Diesen Gleichungen gemäss kann eine Flüssigkeit sich bewegen in einer festen und unbewegten, der z-Achse parallelen, cylindrischen Röhre. Bilden wir die Grenzbedingungen, die an der inneren Oberfläche einer solchen Röhre zu erfüllen sind. Aus 1) ergiebt sich für unsern Fall

$$\begin{array}{ll} X_x = p & Y_z = Z_y = -k\dfrac{\partial w}{\partial y} \\ Y_y = p & Z_x = X_z = -k\dfrac{\partial w}{\partial x} \\ Z_z = p & X_y = Y_x = \quad 0, \end{array}$$

und, da

$$\cos(nz) = 0$$

ist, so folgt daher aus den Gleichungen 7) der eilften Vorlesung

$$X_n = p\cos(nx), \quad Y_n = p\cos(ny), \quad Z_n = -k\left(\frac{\partial w}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial w}{\partial y}\cos(ny)\right)$$

und

$$X_n \cos(nx) + Y_n \cos(ny) + Z_n \cos(nz) = p.$$

In den Gleichungen 4), die wir als Grenzbedingungen anwenden wollen, hat man $u_1 = v_1 = w_1 = 0$ zu setzen; die beiden ersten derselben werden daher identisch erfüllt und die dritte giebt

$$k\left(\frac{\partial w}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial w}{\partial y}\cos(ny)\right) = \lambda w$$

oder, was dasselbe ist,

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\lambda}{k} w. \tag{6}$$

Nun nehmen wir an, dass der Querschnitt der Röhre ein Kreis von dem Radius R ist, dessen Mittelpunkt in der z-Achse liegt, und dass die Bewegung in gleichem Abstand von dieser Achse die gleiche ist. Setzt man

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

so wird dann die zweite der Gleichungen 5)

$$\frac{d^2 w}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dw}{d\varrho} = \frac{c}{k},$$

woraus

$$w = \frac{1}{4}\frac{c}{k}\varrho^2 + A \lg \varrho + B$$

folgt, wo A und B willkürliche Constanten bedeuten. Die erste von diesen muss verschwinden, da w für $\varrho = 0$ nicht unendlich werden darf; die zweite ergiebt sich aus 6), d. h. aus der Bedingung, dass für $\varrho = R$

$$\frac{dw}{d\varrho} = -\frac{\lambda}{k} w$$

ist; es folgt hieraus

$$B = -\frac{c}{2\lambda} R - \frac{c}{4k} R^2,$$

also

$$w = -\frac{c}{4k}\left(R^2 + \frac{2k}{\lambda} R - \varrho^2\right).$$

Die Constante c findet man aus der ersten der Gleichungen 5), wenn die Werthe von p für zwei Werthe von z bekannt sind; ist $p = p_0$ für $z = 0$ und $p = p_l$ für $z = l$, so ist

$$c = \frac{p_l - p_0}{l}.$$

Nennt man Q das Volumen der in der Richtung der z-Achse durch einen Querschnitt in der Zeiteinheit strömenden Flüssigkeit, so ist

$$Q = 2\pi \int_0^R w \varrho \, d\varrho,$$

also

$$Q = \pi \frac{p_0 - p_l}{8kl}\left(R^4 + 4\frac{k}{\lambda} R^3\right). \tag{7}$$

Diese Resultate sind sehr nahe für den Fall gültig, dass eine schwere Flüssigkeit durch eine horizontale, sehr lange und dünne Röhre aus einem geräumigen Gefässe in die Atmosphäre ausströmt; die Querschnitte $z = 0$ und $z = l$ kann man dann in Entfernungen von den beiden Enden der Röhre wählen, die gross gegen den Durchmesser derselben, aber klein gegen l sind, und p_0 dem Drucke gleichsetzen, welcher in der Röhre stattfindet, wenn die Flüssigkeit ruht, p_l dem Drucke der Atmosphäre.

Messungen über die Ausflussmenge bei einer Anordnung der bezeichneten Art sind von Poiseuille ausgeführt; es fand dieser

$$Q = K \frac{p_0 - p_l}{l} R^4,$$

wo K eine Grösse bedeutet, die ungeändert blieb, wenn p_0, l oder R geändert wurde. Die Vergleichung dieser Gleichung mit 7) führt zunächst zu dem Schlusse, dass λ als unendlich gross anzusehen, also anzunehmen war, dass die Flüssigkeitstheilchen, die die Röhrenwand berührten, an dieser hafteten; die für K gefundenen Werthe erlauben dann weiter die Werthe von k für die den Versuchen unterworfenen Flüssigkeiten zu berechnen.

§ 3.

Die ferneren Betrachtungen, die wir über die Reibung einer Flüssigkeit anstellen wollen, wollen wir durch die Annahme vereinfachen, dass die Flüssigkeitstheile, die einen festen Körper berühren, an diesem haften, und durch die Annahme, dass die Geschwindigkeiten unendlich klein sind. Die letztere macht, dass die Gleichungen 3)

$$\begin{aligned}
\mu \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} &= k \Delta u \\
\mu \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} &= k \Delta v \\
\mu \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} &= k \Delta w \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0
\end{aligned} \tag{8}$$

werden. Ist die Bewegung eine stationäre, so gehen sie über in

$$\begin{gathered}
\frac{\partial p}{\partial x} = k \Delta u, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = k \Delta v, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = k \Delta w \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.
\end{gathered} \tag{9}$$

Eine Lösung dieser Gleichungen ist

$$p = \text{const.}, \quad u = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial W}{\partial x}, \quad w = 0, \tag{10}$$

wenn W der Gleichung

$$\Delta W = \text{const.}$$

genügt.

Wir können hiernach in 10)

$$W = \frac{c}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

setzen, wenn c eine Constante bedeutet, und haben in

$$p = \text{const.}, \quad u = -\frac{c}{r^3} y, \quad v = \frac{c}{r^3} x, \quad w = 0 \tag{11}$$

eine particuläre Lösung unserer Differentialgleichungen. Die durch dieselbe dargestellte Bewegung ist leicht zu übersehen. Betrachtungen, wie wir sie zuerst im § 5 der vierten Vorlesung durchgeführt haben, zeigen, dass Punkte, für welche

$$u = -\psi y, \quad v = \psi x, \quad w = 0 \tag{12)}$$

ist, wo ψ eine Constante bedeutet, ihre relative Lage nicht ändern und so sich bewegen, als gehörten sie einem festen Körper an, der mit der Winkelgeschwindigkeit ψ um die z-Achse sich dreht. Den Gleichungen 11) zufolge werden die Bedingungen 12) erfüllt für die Punkte einer mit dem beliebigen Radius r um den Anfangspunkt der Coordinaten beschriebenen Kugelfläche, wenn man

$$\psi = \frac{c}{r^3}$$

macht.

Befindet sich in der Flüssigkeit eine feste Kugel, deren Oberfläche die Gleichung $r = r_1$ hat, und die mit der constanten Winkelgeschwindigkeit ψ_1 um die z-Achse sich dreht, so stellen die Gleichungen 11) eine mögliche Bewegung der Flüssigkeit dar, wenn man in ihnen

$$c = \psi_1 r_1^3$$

setzt.

Ist die Flüssigkeit durch zwei concentrische Kugelflächen begrenzt, deren Gleichungen $r = r_1$ und $r = r_2$ sind, von denen die erste, kleinere, mit der constanten Winkelgeschwindigkeit ψ_1 um die z-Achse sich dreht, die zweite, grössere, ruht, so geben die Gleichungen 10) eine mögliche Bewegung, wenn man in ihnen

$$W = \frac{c}{r} - \frac{b}{2}(x^2 + y^2)$$

setzt und die Constanten b und c passend bestimmt. Es wird bei dieser Annahme über W

$$u = -\left(\frac{c}{r^3} + b\right) y, \quad v = \left(\frac{c}{r^3} + b\right) x, \quad w = 0 \tag{13)}$$

und die Grenzbedingungen werden erfüllt, wenn man

$$\psi_1 = \frac{c}{r_1^3} + b, \quad 0 = \frac{c}{r_2^3} + b$$

macht; woraus

$$c\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) = \psi_1$$

folgt.

Soll die Kugel vom Radius r_1 mit gleichbleibender Geschwindigkeit sich drehen, so muss auf sie im Sinne der Bewegung ein Drehungsmoment M wirken, welches dem Drehungsmoment der

Drucke gleich ist, welche sie auf die Flüssigkeit ausübt. Ist ds ein Element der Oberfläche der Kugel und n die mit der Verlängerung des Radius zusammenfallende Normale von ds, so ist daher

$$M = \int ds\,(x Y_n - y X_n). \tag{14}$$

Man hat aber

$$Y_n = \frac{1}{r}\,(x Y_x + y Y_y + z Y_z)$$

$$X_n = \frac{1}{r}\,(x X_x + y X_y + z X_z)$$

und nach 1) und 13)

$$\begin{aligned} X_x &= p - 6kc\frac{xy}{r^5} \qquad & Y_z = Z_y &= \quad 3kc\frac{xz}{r^5} \\ Y_y &= p + 6kc\frac{xy}{r^5} \qquad & Z_x = X_z &= -3kc\frac{yz}{r^5} \\ Z_z &= p \qquad & X_y = Y_x &= \quad 3kc\frac{x^2-y^2}{r^5}, \end{aligned} \tag{15}$$

in welchen Gleichungen überall $r = r_1$ zu setzen ist. Hieraus ergiebt sich

$$Y_n = \frac{y}{r}\,p + \frac{3kc}{r^4}\,x, \quad X_n = \frac{x}{r}\,p - \frac{3kc}{r^4}\,y;$$

also

$$M = \frac{3kc}{r^4}\int ds\,(x^2 + y^2)$$

oder, da

$$\int x^2\,ds = \int y^2\,ds = \int z^2\,ds = \frac{4\pi}{3}\,r^4,$$

$$M = 8\pi kc.$$

Da r in diesem Ausdrucke nicht vorkommt, so erleidet derselbe dadurch keine Veränderung, dass $r = r_1$ gesetzt wird.

Die Gleichungen 10) lassen sich auch dem Falle anpassen, dass die Flüssigkeit durch zwei confocale Rotationsellipsoide begrenzt ist, deren Rotationsachse die z-Achse bildet, und von denen das äussere ruht, das innere mit der constanten Winkelgeschwindigkeit ψ_1 um die z-Achse sich dreht. Wir schreiben die Gleichung des inneren Ellipsoids

$$\frac{x^2 + y^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = 1 \tag{16}$$

und bezeichnen durch Ω das Potential der Masse 1, die mit gleicher Dichtigkeit den durch dasselbe begrenzten Raum erfüllt, in Bezug auf den äusseren Punkt (x, y, z). In dem Falle, dass die Flüssigkeit äusserlich als unbegrenzt anzusehen ist, welchen Fall wir zuerst betrachten, lässt sich den Grenzbedingungen genügen, wenn man

$$W = c\,\Omega$$

setzt und die Constante c passend bestimmt. Der Gleichung 3) der achtzehnten Vorlesung zufolge ist nämlich

$$\Omega = \tfrac{3}{4}\int_{\sigma}^{\infty} d\lambda \frac{1 - \frac{x^2+y^2}{a_1^2+\lambda} - \frac{z^2}{c_1^2+\lambda}}{(a_1^2+\lambda)\sqrt{c_1^2+\lambda}},$$

wo σ die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2+y^2}{a_1^2+\sigma} + \frac{z^2}{c_1^2+\sigma} = 1$$

bedeutet; die Gleichungen 10) geben daher

$$u = -\psi y, \quad v = \psi x, \quad w = 0,$$

wenn

$$\psi = \tfrac{3}{2} c \int_{\sigma}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a_1^2+\lambda)^2\sqrt{c_1^2+\lambda}}$$

gemacht wird. Hiernach bewegen sich die Punkte der Flüssigkeit, die auf dem durch einen Werth von σ bestimmten, mit dem Ellipsoide 16) confocalen Ellipsoide liegen, so, als ob sie einem festen Körper angehörten, der mit der Winkelgeschwindigkeit ψ um die z-Achse sich dreht; der Werth von c ist daher aus der Gleichung

$$\psi_1 = \tfrac{3}{2} c \int_{0}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a_1^2+\lambda)^2\sqrt{c_1^2+\lambda}} \tag{17}$$

zu bestimmen.

Für das Drehungsmoment M, welches auf das Ellipsoid wirken muss, um dieses in gleichmässiger Drehung zu erhalten, gilt auch hier die Gleichung 14). Die Berechnung desselben wird durch die folgende Bemerkung erleichtert, die sich an die Definition anknüpft, die von den Druckkräften in den Gleichungen 1) und 2) der eilften Vorlesung gegeben worden ist. Wenden wir die letzte dieser Gleichungen auf einen beliebigen Theil der Flüssigkeit an, beachten, dass die Bewegung eine stationäre ist, die Geschwindigkeiten unendlich klein sind und Kräfte auf die Theile der Flüssigkeit nicht wirken, so erhalten wir

$$\int ds\,(x Y_n - y X_n) = 0,$$

wo ds ein Element der Oberfläche des gewählten Theiles, n die nach dem Innern dieses gerichtete Normale von ds bedeutet. Nun sei dieser Theil begrenzt durch das Ellipsoid und eine unendlich grosse, concentrische Kugelfläche; die eben gemachte Bemerkung lehrt dann, dass M gleich dem Integrale

$$\int ds\,(x Y_n - y X_n)$$

ist, wenn dieses über die unendliche Kugelfläche ausgedehnt und unter n die Normale verstanden wird, die mit der Verlängerung des Radius zusammenfällt. In der Unendlichkeit gelten aber auch hier die Gleichungen 15); auch hier ist also

$$M = 8\pi k c, \tag{18}$$

wo c aber durch 17) zu bestimmen ist.

Ist die Flüssigkeit äusserlich durch das ruhende Ellipsoid

$$\frac{x^2 + y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{c_2^2} = 1$$

begrenzt, welches mit dem Ellipsoid 16) confocal ist, so dass

$$a_2^2 - a_1^2 = c_2^2 - c_1^2,$$

so hat man

$$W = c\Omega - \frac{b}{2}(x^2 + y^2)$$

zu setzen und die Constanten b und c so zu bestimmen, dass

$$\psi_1 = \tfrac{3}{2} c \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a_1^2 + \lambda)^2 \sqrt{c_1^2 + \lambda}} + b$$

$$0 = \tfrac{3}{2} c \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a_2^2 + \lambda)^2 \sqrt{c_2^2 + \lambda}} + b$$

ist, woraus folgt

$$\psi_1 = \tfrac{3}{2} c \int_0^{a_2^2 - a_1^2} \frac{d\lambda}{(a_1^2 + \lambda)^2 \sqrt{c_1^2 + \lambda}}. \tag{19}$$

Berechnet man das Drehungsmoment M, welches auf das innere Ellipsoid wirken muss, um die Bewegung gleichmässig zu erhalten, mit Hülfe der Gleichung 14), so tritt die Constante b nicht auf und man findet dasselbe durch die Constante c gerade so ausgedrückt, wie wenn die Flüssigkeit äusserlich unbegrenzt ist; auch hier gilt also die Gleichung 18), wenn der Werth von c aus 19) genommen wird.

§ 4.

Aus den Gleichungen 9) folgt

$$\Delta p = 0;$$

hat man dieser Bedingung gemäss p angenommen und eine Function V bestimmt, die der Gleichung

$$\Delta V = \frac{1}{k} p$$

genügt, so erfüllt man die Gleichungen 9), wenn man

$$u = \frac{\partial V}{\partial x} + u', \quad v = \frac{\partial V}{\partial y} + v', \quad w = \frac{\partial V}{\partial z} + w'$$

setzt und u', v', w' so wählt, dass

$$\Delta u' = 0, \quad \Delta v' = 0, \quad \Delta w' = 0$$

und

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{1}{k} p$$

ist.

Wir können hiernach

$$\frac{1}{k} p = 2c \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}, \quad u' = 0, \quad v' = 0, \quad w' = -\frac{2c}{r}$$

und, da

$$\Delta \frac{r}{2} = \frac{1}{r}$$

ist,

$$V = az + b \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} + c \frac{\partial r}{\partial z}$$

und

$$\left.\begin{aligned} u &= 3b \frac{xz}{r^5} - c \frac{xz}{r^3} \\ v &= 3b \frac{yz}{r^5} - c \frac{yz}{r^3} \\ w &= a + b\left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right) - c\left(\frac{z^2}{r^3} + \frac{1}{r}\right) \end{aligned}\right\} \quad 20)$$

machen, wo a, b, c willkürliche Constanten bedeuten. Es lassen diese sich so bestimmen, dass für einen Werth von r, der R genannt werden möge,

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0$$

ist; hierzu dienen die Gleichungen

$$\frac{3b}{R^2} = c, \quad a = \frac{b}{R^3} + \frac{c}{R},$$

aus denen folgt

$$b = \frac{R^3 a}{4}, \quad c = \frac{3Ra}{4}.$$

Es stellen dann die Gleichungen 20) die Bewegung einer Flüssigkeit dar, die in der Unendlichkeit überall mit der Geschwindigkeit a in der Richtung der z-Achse strömt, und in der eine um den Anfangspunkt der Coordinaten mit dem Radius R beschriebene Kugel ruht.

Es sei Z die Kraft, die in der Richtung der z-Achse auf die Kugel ausgeübt werden muss, um sie an ihrer Stelle zu halten; es ist dann

$$Z = \int ds\, Z_n = \int \frac{ds}{r} (x Z_x + y Z_y + z Z_z)\,, \tag{21}$$

wo ds ein Element der mit dem Radius r um den Anfangspunkt der Coordinaten beschriebenen Kugel bedeutet, und $r = R$ zu setzen ist. Statt dieses Werthes von r kann aber auch ein beliebiger grösserer gewählt werden; denn aus der dritten der Gleichungen 1) der eilften Vorlesung geht hervor, dass

$$\int ds\, Z_n = 0$$

ist, wenn ds ein Element der Oberfläche eines beliebigen Theiles der Flüssigkeit bedeutet. Es gewährt einen Vortheil in der Gleichung 21) r unendlich gross anzunehmen; man kann dann nämlich bei der Berechnung von Z_x, Z_y, Z_z aus den Gleichungen 1) mit Hülfe von 20) hier die mit dem Factor b behafteten Glieder vernachlässigen. Für ein unendlich grosses r findet man

$$Z_x = -6kc\frac{xz^2}{r^5}\,,\quad Z_y = -6kc\frac{yz^2}{r^5}\,,\quad Z_z = -6kc\frac{z^3}{r^5}\,,$$

und daher ist

$$Z = -6kc\frac{1}{r^4}\int z^2 ds$$

$$= -8\pi kc \quad \text{oder} \quad = -6\pi kRa. \tag{22}$$

Nach einer von uns schon mehrfach benutzten Bemerkung gelten die hier entwickelten Gleichungen auch in dem Falle, dass das Coordinatensystem, auf welches sie sich beziehen, statt zu ruhen, in irgend einer Richtung mit gleichbleibender Geschwindigkeit fortschreitet. Lassen wir dasselbe in der Richtung der z-Achse mit der Geschwindigkeit $-a$ fortschreiten, so ist die Flüssigkeit in der Unendlichkeit in Ruhe und in ihr bewegt sich die Kugel vom Radius R in der Richtung der z-Achse mit der Geschwindigkeit $-a$. Die Gleichung 22) lehrt den *Widerstand* kennen, den diese Kugel dabei erleidet.

§ 5.

Wir wollen nun noch von den Gleichungen 8), die für nicht stationäre Bewegungen gelten, zwei Anwendungen machen, die sich auf Schwingungen beziehen, die eine Kugel in einer äusserlich unbegrenzten Flüssigkeit unter dem Einflusse gewisser Kräfte ausführen kann.

Den genannten Gleichungen wird genügt, wenn man

$$p = \text{const.}$$

setzt und u, v, w so wählt, dass

$$\frac{\mu}{k}\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad \frac{\mu}{k}\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v, \quad \frac{\mu}{k}\frac{\partial w}{\partial t} = \Delta w$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ist; diese Gleichungen erfüllt man, wenn man

$$u = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial W}{\partial x}, \quad w = 0$$

macht, und W der Gleichung

$$\frac{\mu}{k}\frac{\partial W}{\partial t} = \Delta W \tag{23}$$

gemäss bestimmt. Nun nehmen wir an, dass W eine Function der beiden Variabeln t und r ist, wo r wieder die Grösse $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ bedeutet; wir haben dann

$$u = \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} y, \quad v = -\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} x, \quad w = 0.$$

Diese Gleichungen stellen eine Bewegung dar, bei der die Punkte, die in dem Abstande r vom Anfangspunkt der Coordinaten liegen, so sich bewegen, als gehörten sie einem festen Körper an, der um die z-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ψ sich dreht, wenn

$$\psi = -\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} \tag{24}$$

gesetzt wird. Wir dürfen daher annehmen, dass in der Flüssigkeit eine Kugel sich befindet, für deren Oberfläche $r = R$ ist, und die um die z-Achse mit einer Winkelgeschwindigkeit sich dreht, die dem Werthe gleich ist, den der für ψ gegebene Ausdruck für $r = R$ erhält.

Ist M das Drehungsmoment der Drucke, welche die gedachte Kugel auf die Flüssigkeit ausübt, so gilt auch hier die Gleichung 14), und eine Rechnung, die derjenigen ganz ähnlich ist, welche wir an diese Gleichung geknüpft haben, giebt

$$M = \frac{8\pi}{3} k r^4 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right) \quad \text{für} \quad r = R.$$

Nun sei ϑ der Winkel, um den die Kugel zur Zeit t aus einer gewissen Lage gedreht ist, so dass

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \psi \quad \text{für} \quad r = R; \tag{25}$$

ferner sei M' das Drehungsmoment der Kräfte, welche ausser den von der Flüssigkeit ausgeübten Drucken auf die Kugel wirken, und K das Trägheitsmoment dieser; dann ist

$$K\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = M' - M.$$

Diese Gleichungen bilden, wenn M' gegeben ist, eine Grenzbedingung für die, bis jetzt nur durch die partielle Differentialgleichung 23) definirte Function W. Gesetzt, es sei

$$M' = -\alpha^2 \vartheta,$$

wo α eine beliebig gegebene Constante sein soll; dann wird diese Bedingung, wenn man sie nach t differentiirt,

$$\frac{\alpha^2}{r}\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{8\pi}{3} k r^4 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial t}\right) + \frac{K}{r}\frac{\partial^3 W}{\partial r \partial t^2} = 0 \text{ für } r = R. \qquad 26)$$

Die Gleichung 23), die sich

$$\frac{\mu}{k}\frac{\partial (rW)}{\partial t} = \frac{\partial^2 (rW)}{\partial r^2}$$

schreiben lässt, hat die particuläre Lösung

$$W = C e^{\beta^2 t} \frac{1}{r} e^{\beta \sqrt{\frac{\mu}{k}} r}, \qquad 27)$$

wo C und β willkürliche Constanten bedeuten; die zweite von diesen lässt sich so bestimmen, dass der Gleichung 26) genügt wird; es ist hierzu nöthig, dass β eine Wurzel der Gleichung

$$\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}} - R\beta\right)\left(\alpha^2 + K\beta^4\right) + \frac{8\pi}{3} R^3 \mu \sqrt{\frac{k}{\mu}}\, \beta^2 \left(3\frac{k}{\mu} - 3\sqrt{\frac{k}{\mu}}\, R\beta + R^2\beta^2\right) = 0 \qquad 28)$$

ist. Wenn $k = 0$ ist, so sind die Wurzeln derselben

$$0, \qquad \pm \sqrt[4]{\frac{\alpha^2}{K}}\, \frac{1 \pm \sqrt{-1}}{\sqrt{2}};$$

wir nehmen an, dass k so klein ist, dass, wie in diesem Falle, von den fünf Wurzeln zwei complex mit negativem reellen Theile sind, und setzen in 27) für β eine von diesen beiden Wurzeln; dann wird die Geschwindigkeit in der Unendlichkeit Null. Es ist dabei W complex; aber auch der reelle Theil des in 27) für W aufgestellten Ausdruckes genügt, für W gesetzt, den Gleichungen 23) und 26). Diesen reellen Theil wählen wir für W. Setzen wir dann

$$\beta = -a + b\sqrt{-1},$$

berechnen ϑ mit Hülfe von 24) und 25) aus W, bezeichnen durch C eine neue, reelle willkürliche Constante und verlegen den Anfangspunkt der Zeit, so finden wir

$$\vartheta = C e^{(a^2 - b^2)t} \sin 2abt.$$

Diese Gleichung bestimmt die Schwingungen, die die Kugel ausführt. Nennt man T die Dauer einer einfachen Schwingung und δ das *logarithmische Decrement* der Schwingungen, d. h. den natürlichen Logarithmus des Verhältnisses zweier aufeinander folgenden Schwingungsbögen, so ist hiernach

$$T = \frac{\pi}{2ab}$$

$$\delta = (b^2 - a^2)\,T = \frac{b^2 - a^2}{2ab}\,\pi.$$

Es ist leicht a und b zu finden, wenn man k als unendlich klein annimmt und von den Gliedern, auf die der Werth von k von Einfluss ist, nur diejenigen der niedrigsten Ordnung berücksichtigt. Man bezeichne zu diesem Zwecke den Werth, den β für $k = 0$ erhält, durch β_0, setze

$$\beta = \beta_0 + \varepsilon,$$

schreibe die Gleichung 28)

$$F(\beta) = 0$$

und mache

$$F'(\beta) = \frac{dF(\beta)}{d\beta};$$

man hat dann ε aus der Gleichung

$$F(\beta_0) + \varepsilon F'(\beta_0) = 0$$

zu berechnen. So ergiebt sich

$$F(\beta_0) = \frac{8\pi}{3} R^5 \sqrt{k\mu}\,\beta_0^4, \quad F'(\beta_0) = -4RK\beta_0^4,$$

also

$$\varepsilon = \frac{2\pi}{3} R^4 \sqrt{k\mu}\,\frac{1}{K}.$$

Bezeichnet man noch die Schwingungsdauer der Kugel für den Fall, dass die Flüssigkeit keine Einwirkung auf sie ausübt, durch T_0, d. h. setzt man

$$T_0 = \frac{\pi}{\alpha}\sqrt{K},$$

so hat man hiernach

$$a = \sqrt{\frac{\pi}{2T_0}} - \varepsilon, \quad b = \sqrt{\frac{\pi}{2T_0}}$$

und

$$T = T_0\left(1 + \varepsilon\sqrt{\frac{2T_0}{\pi}}\right), \quad \delta = \varepsilon\sqrt{2\pi T_0}.$$

Die particuläre Lösung der Gleichungen 23) und 26), die wir jetzt discutirt haben, setzt einen gewissen Anfangszustand der Flüssigkeit voraus; wir wollen noch andere particuläre Lösungen derselben Gleichungen, die sich auf andere Anfangszustände beziehen, aufsuchen. Eine Lösung der Gleichung 23) ist

$$W = e^{\beta^2 t}\,\frac{1}{r}\left(C e^{\beta\sqrt{\frac{\mu}{k}}\,r} + C' e^{-\beta\sqrt{\frac{\mu}{k}}\,r}\right),$$

wo C, C' und β willkürliche, complexe Constanten bedeuten. Es

genügt dieselbe der Bedingung 26), wenn zwischen diesen Constanten die Gleichung

$$0 = C\left\{\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}} - R\beta\right)\left(\alpha^2 + K\beta^4\right) + \frac{8\pi}{3}R^3\mu\sqrt{\frac{k}{\mu}}\beta^2\left(3\frac{k}{\mu} - 3\sqrt{\frac{k}{\mu}}R\beta + R^2\beta^2\right)\right\}e^{\beta\sqrt{\frac{\mu}{k}}R}$$

$$+ C'\left\{\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}} + R\beta\right)\left(\alpha^2 + K\beta^4\right) + \frac{8\pi}{3}R^3\mu\sqrt{\frac{k}{\mu}}\beta^2\left(3\frac{k}{\mu} + 3\sqrt{\frac{k}{\mu}}R\beta + R^2\beta^2\right)\right\}e^{-\beta\sqrt{\frac{\mu}{k}}R}$$

besteht. Diese Gleichung bestimmt das Verhältniss $C : C'$, wenn β beliebig angenommen ist. Der Ausdruck, den man auf diese Weise für W erhält, ist complex; sein reeller Theil genügt auch den Gleichungen 23) und 26). Wählt man diesen reellen Theil für W, so wird im Allgemeinen die Geschwindigkeit in der Unendlichkeit unendlich; eine Ausnahme hiervon kann nur stattfinden und die Geschwindigkeit in der Unendlichkeit verschwinden, wenn entweder eine von den beiden Constanten C und C' gleich Null oder die Constante β rein imaginär ist. Der erste Fall ist derjenige, den wir vorher betrachtet haben, und auf den die Gleichung 27) sich bezieht; der zweite führt auf die neuen Lösungen, die wir bezeichnen wollten.

§ 6.

Die folgenden Betrachtungen werden uns auf die Schwingungen einer in einer reibenden Flüssigkeit befindlichen Kugel führen, deren Mittelpunkt in einer geraden Linie sich hin und her bewegt.

Eine particuläre Lösung der Gleichungen 8) ist

$$u = \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z}, \quad v = \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z}, \quad w = \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}$$

$$p = -\mu \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial t},$$

wenn

$$\Delta P = 0;$$

eine zweite ist

$$u = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}, \quad v = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}, \quad w = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$$

$$p = 0,$$

wenn

$$k\Delta W = \mu \frac{\partial W}{\partial t};$$

die genannten Gleichungen werden daher auch erfüllt durch

$$u = \frac{\partial^2 (P + W)}{\partial x \partial z}, \quad v = \frac{\partial^2 (P + W)}{\partial y \partial z}, \quad w = -\frac{\partial^2 (P + W)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 (P + W)}{\partial y^2}$$

$$p = -\mu \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial t},$$

wenn

$$\Delta P = 0, \quad k\Delta W = \mu \frac{\partial W}{\partial t}. \qquad 29)$$

Nun nehmen wir an, dass P und W nur Functionen der beiden Variabeln r und t sind; wir erhalten dann

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{xz}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(P+W)}{\partial r}\right)\\
v &= \frac{yz}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(P+W)}{\partial r}\right)\\
w &= -\frac{x^2+y^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(P+W)}{\partial r}\right)-\frac{2}{r}\frac{\partial(P+W)}{\partial r} \qquad\qquad 30)\\
p &= -\mu\frac{z}{r}\frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial t};
\end{aligned}
$$

wir nehmen ferner an, dass für $r = R$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(P+W)}{\partial r}\right) = 0 \qquad\qquad 31)$$

ist; dann ist für $r = R$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = -\frac{2}{r}\frac{\partial(P+W)}{\partial r}, \qquad\qquad 32)$$

und die entwickelten Gleichungen stellen eine mögliche Bewegung in dem Falle dar, dass in der Flüssigkeit eine Kugel sich befindet, für deren Oberfläche $r = R$ ist, und die in der Richtung der z-Achse mit einer Geschwindigkeit sich bewegt, die gleich dem Werthe von

$$\frac{2}{r}\frac{\partial(P+W)}{\partial r} \quad \text{für} \quad r = R$$

ist.

Es sei Z die Summe der z-Componenten der Drucke, welche die Kugel auf die Flüssigkeit ausübt; es gilt dann die Gleichung 21); d. h.

$$Z = \int\frac{ds}{r}(xZ_x + yZ_y + zZ_z).$$

Erwägt man, dass nach 1)

$$
\begin{aligned}
xZ_x + yZ_y + zZ_z = zp &- k\left(x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
&- k\left(x\frac{\partial u}{\partial z} + y\frac{\partial v}{\partial z} + z\frac{\partial w}{\partial z}\right),
\end{aligned}
$$

dass ferner

$$\int x^2\,ds = \int y^2\,ds = \int z^2\,ds = \frac{4\pi}{3}r^4$$

ist und benutzt die Gleichung 31), so findet man aus 30)

$$Z = \frac{4\pi}{3}r^2\left\{2kr\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(P+W)}{\partial r}\right) - \mu\frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial t}\right\} \text{ für } r = R.$$

Nun sei ζ die Verrückung der Kugel zur Zeit t aus einer gewissen Lage, so dass

$$\frac{d\zeta}{dt} = w \quad \text{für} \quad r = R, \tag{33}$$

m die Masse der Kugel und Z' die Kraft, die in der Richtung der z-Achse auf die Kugel wirkt, abgesehen von den Drucken, die die Flüssigkeit auf sie ausübt; es ist dann

$$m\frac{d^2\zeta}{dt^2} = Z' - Z.$$

Gesetzt, es sei

$$Z' = -\alpha^2\zeta,$$

wo α eine beliebig gegebene Constante bedeutet; dann erhält man, der Gleichung 26) entsprechend,

$$\frac{2\alpha^2}{r}\frac{\partial(P+W)}{\partial r} - \frac{4\pi}{3}r^2\frac{\partial}{\partial t}\left\{2kr\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(P+W)}{\partial r}\right) - \mu\frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial t}\right\}$$
$$+\frac{2m}{r}\frac{\partial^3(P+W)}{\partial r\,\partial t^2} = 0 \quad \text{für } r = R. \tag{34}$$

Den beiden für P und W in 29) aufgestellten Gleichungen genügt man durch

$$P = Be^{\beta^2 t}\frac{1}{r}, \quad W = Ce^{\beta^2 t}\frac{1}{r}e^{\beta\sqrt{\frac{\mu}{k}}r}, \tag{35}$$

wo B, C und β willkürliche Constanten sind. Die Bedingungen 31) und 34) geben für diese Constanten zwei Gleichungen, die in Bezug auf B und C linear und homogen sind, und aus denen das Verhältniss $B:C$ und β zu berechnen sind. Mit Hülfe der Differentialgleichungen 29) findet man leicht für $r = R$ aus 31)

$$\frac{\partial(P+W)}{\partial r} = \frac{1}{3}\frac{\mu}{k}\beta^2 r W$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(P+W)}{\partial r}\right) = \frac{\mu}{k}\beta^2\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}$$

und dann aus 34)

$$0 = (\alpha^2 + m\beta^4)W - \frac{2\pi}{3}r^2\beta^2\left(9k\frac{\partial W}{\partial r} - \mu\beta^2 r W\right)$$

oder, da für jeden Werth von r

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \left(-\frac{1}{r} + \beta\sqrt{\frac{\mu}{k}}\right)W$$

ist,

$$0 = \alpha^2 + m\beta^4 + \frac{2\pi}{3}R\beta^2(\mu R^2\beta^2 - 9\sqrt{k\mu}\,R\beta + 9k). \tag{36}$$

Setzt man

$$\frac{4\pi}{3}R^3\mu = m',$$

bezeichnet also durch m' die Masse der von der Kugel verdrängten Flüssigkeit, so geht diese Gleichung für $k = 0$ über in

$$0 = \alpha^2 + \left(m + \frac{m'}{2}\right)\beta^4.$$

Daraus folgt, dass, wenn k klein genug ist (was wir annehmen), ihre 4 Wurzeln in der Nähe der Werthe

$$\pm \sqrt[4]{\frac{\alpha^2}{m + \frac{m'}{2}}}\,\frac{1 \pm \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$$

liegen. Wir wählen für β eine der beiden Wurzeln, deren reeller Theil negativ ist; dann wird die Geschwindigkeit in der Unendlichkeit gleich Null. Dabei sind die in 35) für P und W aufgestellten Ausdrücke complex; aber auch die reellen Theile dieser Ausdrücke genügen den Gleichungen 29), 31) und 34), und diese reellen Theile denken wir uns nun für P und W gesetzt. Machen wir wieder

$$\beta = -a + b\sqrt{-1},$$

berechnen ζ mit Hülfe von 32) und 33) aus P und W, bezeichnen durch C eine neue, reelle, willkürliche Constante und verlegen den Anfangspunkt der Zeit, so ergiebt sich dann

$$\zeta = Ce^{(a^2-b^2)t}\sin 2\,abt,$$

woraus für die Schwingungsdauer T und das logarithmische Decrement der Schwingungen δ wieder die Gleichungen

$$T = \frac{\pi}{2ab}, \quad \delta = (b^2 - a^2)\,T$$

folgen. Nimmt man k als unendlich klein an, so findet man hieraus und aus der Gleichung 36) durch eine Rechnung, wie sie für einen ähnlichen Fall im vorigen § durchgeführt ist,

$$T = T_0\left(1 + \varepsilon\sqrt{\frac{2T_0}{\pi}}\right), \quad \delta = \varepsilon\sqrt{2\pi T_0},$$

wo

$$T_0 = \frac{\pi}{\alpha}\sqrt{m + \frac{m'}{2}}$$

$$\varepsilon = \frac{9}{8}\,\frac{1}{R}\sqrt{\frac{k}{\mu}}\,\frac{m'}{m + \frac{m'}{2}}.$$

Es hat keine Schwierigkeit, andere particuläre Lösungen der Gleichungen 29), 31) und 34), welche einem andern Anfangszustande der Flüssigkeit entsprechen, als die erörterte, anzugeben; es hat *diese* ein hervorragendes Interesse, weil sie sehr nahe den Einfluss zu beurtheilen erlaubt, den die Luft auf die Schwingungen eines Pendels ausübt, das aus einer Kugel und einem dünnen Faden besteht. Wir verweisen in Bezug hierauf auf eine Abhandlung von Stokes (Transactions of the Cambridge philosophical society, Vol. IX, part 2, p. 8) und eine von Emil Meyer (Borchardt's Journal, Bd. 73).

Siebenundzwanzigste Vorlesung.

(Gleichgewicht und Bewegung elastischer fester Körper. Aufstellung der Differentialgleichungen für Körper, die in verschiedenen Richtungen verschiedene Elasticität besitzen. Die Zahl der Constanten der Elasticität ist im Allgemeinen 21, sie verringert sich, wenn Ebenen der Symmetrie vorhanden sind, und reducirt sich bei einem isotropen Körper auf 2. Das Gleichgewichtsproblem hat nur *eine* Lösung. Wenn keine Kräfte auf die Theile des Körpers wirken, so kann derselbe im Gleichgewicht sein, wenn die Druckcomponenten Constanten gleich sind. Zusammendrückbarkeit, Elasticitätscoefficient. Gleichgewicht eines isotropen, cylindrischen Körpers, auf dessen Grundflächen Drucke von gewisser Art wirken. Durchführung der Rechnung für den Fall, dass der Querschnitt ein Kreis ist. Gleichgewicht einer Hohlkugel, auf deren Oberflächen constante und senkrechte Drucke wirken.)

§ 1.

Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung des Gleichgewichtes und der Bewegung *elastischer fester* Körper. Die allgemeinen Differentialgleichungen hierfür haben wir bereits im § 7 der eilften Vorlesung unter gewissen Voraussetzungen aufgestellt; diese Voraussetzungen werden wir beibehalten und aus jenen Gleichungen Folgerungen ziehen; die dort gebrauchten Bezeichnungen werden wir auch hier anwenden, nur die Verrückungen, die dort ξ, η, ζ genannt sind, sollen hier u, v, w heissen. Wir denken uns also einen Körper, dessen Punkte in eine solche relative Lage gebracht werden können, dass die sämmtlichen Druckcomponenten in ihm gleich Null sind; den Zustand, in dem der Körper dann sich befindet, wollen wir seinen *natürlichen* nennen. x, y, z sind die Coordinaten eines Punktes des Körpers, wenn dieser in seinem natürlichen Zustande in irgend einer Lage ist, $x+u$, $y+v$, $z+w$ die Coordinaten desselben Punktes zur Zeit t; u, v, w sind unendlich klein. Wir setzen

$$\begin{aligned} x_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & y_z &= z_y = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ y_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & z_x &= x_z = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ z_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & x_y &= y_x = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \qquad 1)$$

und bezeichnen durch f eine gewisse homogene Function zweiten Grades der 6 Argumente x_x, y_y, . . mit constanten Coefficienten; es ist dann

$$
\begin{aligned}
X_x &= \frac{\partial f}{\partial x_x}, & Y_z = Z_y &= \frac{\partial f}{\partial y_z} \\
Y_y &= \frac{\partial f}{\partial y_y}, & Z_x = X_z &= \frac{\partial f}{\partial z_x} \\
Z_z &= \frac{\partial f}{\partial z_z}, & X_y = Y_x &= \frac{\partial f}{\partial x_y}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \mu X - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z} \\
\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \mu Y - \frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\
\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \mu Z - \frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z},
\end{aligned}
\tag{3}
$$

wo μ die Dichtigkeit, X, Y, Z die Componenten der beschleunigenden Kraft, die im Punkte (x, y, z) wirkt, bedeuten. Die Function f hat dabei die Eigenschaft, dass $\int f\, d\tau$, wo $d\tau$ ein Element des Volumens des Körpers bedeutet, das Potential der Kräfte ist, die durch die relativen Verschiebungen der Theile des Körpers erzeugt sind, d. h. der Kräfte, welche wir an dem angeführten Orte *innere* genannt haben. Aus dieser Bemerkung folgt, dass der Werth von f für irgend einen Zustand eines unendlich kleinen, den Punkt (x, y, z) enthaltenden Theiles des Körpers unabhängig von dem Coordinatensysteme ist, das man benutzt; die in f vorkommenden Coefficienten, die die *Constanten der Elasticität* des Körpers heissen, sind aber durch die Richtungen der Coordinatenachsen bedingt. Die Zahl dieser Constanten ist im Allgemeinen 21; bietet die Substanz des Körpers aber Symmetrieen dar und wählt man die Richtungen der Coordinatenachsen passend, so wird sie erheblich verringert.

Wir setzen

$$
\begin{aligned}
f = a_{11} x_x^2 &+ 2a_{12} x_x y_y + 2a_{13} x_x z_z + 2a_{14} x_x y_z + 2a_{15} x_x z_x + 2a_{16} x_x x_y \\
&+ a_{22} y_y^2 + 2a_{23} y_y z_z + 2a_{24} y_y y_z + 2a_{25} y_y z_x + 2a_{26} y_y x_y \\
&\qquad + a_{33} z_z^2 + \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot
\end{aligned}
\tag{4}
$$

und sagen: in Bezug auf die Elasticität des Körpers ist die xy-Ebene eine *Symmetrie-Ebene*, falls dieser Ausdruck für f gültig bleibt, wenn man die Richtung der z-Achse in die entgegengesetzte verkehrt. Wenn die Richtung der z-Achse in die entgegengesetzte verwandelt wird, während der Anfangspunkt der Coordinaten derselbe bleibt, so nehmen z und w die entgegengesetzten Werthe an und x, y, u, v werden nicht geändert; den Gleichungen 1) zufolge behalten daher dabei x_x, y_y, z_z, x_y ihre ursprünglichen Werthe, y_z und z_x aber bekommen die entgegengesetzten. Soll hierbei der in 4) für f an-

gegebene Ausdruck ungeändert bleiben, welches auch die Werthe seiner Argumente sind, so müssen

$$\begin{matrix} a_{14}, & a_{24}, & a_{34}, & a_{46} \\ a_{15}, & a_{25}, & a_{35}, & a_{56} \end{matrix}$$

verschwinden. Ist die xy-Ebene eine Symmetrie-Ebene, so ist daher

$$\begin{aligned} f = a_{11} x_x^2 &+ 2a_{12} x_x y_y + 2a_{13} x_x z_z + 2a_{16} x_x x_y \\ &+ \quad a_{22} y_y^2 \quad + 2a_{23} y_y z_z + 2a_{26} y_y x_y \\ &\qquad\qquad + \quad a_{33} z_z \quad + 2a_{36} z_z x_y \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + \quad a_{66} x_y^2 \\ &\qquad\qquad + \quad a_{44} y_z^2 + 2a_{45} y_z z_x + a_{55} z_x^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Sind die xy-Ebene und die yz-Ebene Symmetrie-Ebenen, so ist hiernach

$$\begin{aligned} f = a_{11} x_x^2 + a_{22} y_y^2 + a_{33} z_z^2 + a_{44} y_z^2 + a_{55} z_x^2 + a_{66} x_y^2 \\ + 2a_{23} y_y z_z + 2a_{13} z_z x_x + 2a_{12} x_x y_y, \end{aligned} \tag{6}$$

woraus hervorgeht, dass dann auch die zx-Ebene eine Symmetrie-Ebene ist.

Sind die 3 Coordinatenebenen Symmetrie-Ebenen, gilt also die Gleichung 6), und behält diese Gleichung Gültigkeit, wenn man die x-Achse und die y-Achse mit einander vertauscht, so sollen die yz-Ebene und die xz-Ebene *gleichwerthige* Symmetrie-Ebenen heissen. Bei der Vertauschung der x-Achse und y-Achse gehen x_x und y_y, sowie z_x und y_z in einander über, während z_z und x_y ungeändert bleiben; soll sich dabei der in 6) für f gegebene Ausdruck nicht ändern, so muss

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{44} = a_{55}, \quad a_{13} = a_{23}$$

sein.

Es folgt hieraus, dass, wenn die 3 Coordinatenebenen gleichwerthige Symmetrie-Ebenen sind,

$$\begin{aligned} f = a_{11}(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2) + 2a_{23}(y_y z_z + z_z x_x + x_x y_y) \\ + a_{44}(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2) \end{aligned} \tag{7}$$

ist. Ein Beispiel für diesen Fall bietet das Steinsalz dar*).

Man nennt den Körper isotrop, wenn derselbe Ausdruck von f für jedes Coordinatensystem gilt. Um diesen Ausdruck für einen solchen Körper zu finden, können wir von dem in 7) angegebenen ausgehen, der den gesuchten als speciellen Fall in sich enthalten muss. Wir schreiben die Gleichung 7), indem wir an Stelle der Constanten a_{11}, a_{23}, a_{44} andere, K, θ, L einführen,

*) Untersuchung der Elasticitätsverhältnisse des Steinsalzes, Inaugural-dissertation von Woldemar Voigt (1874).

$$f = -K\left(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \tfrac{1}{2}y_z^2 + \tfrac{1}{2}z_x^2 + \tfrac{1}{2}x_y^2 + \theta(x_x + y_y + z_z)^2\right) \qquad 8)$$
$$+ L(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2),$$

und bemerken, dass

$$x_x + y_y + z_z$$

und

$$x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \tfrac{1}{2}y_z^2 + \tfrac{1}{2}z_x^2 + \tfrac{1}{2}x_y^2$$

ungeändert bleiben, wenn das Coordinatensystem geändert wird. Um diese Behauptung zu beweisen, führen wir die Hauptdilatationen ein und nennen

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3$$

die Grössen dieser,

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \qquad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \qquad \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$$

die Cosinus der Winkel, welche ihre Richtungen mit den Coordinatenachsen bilden; nach den Gleichungen 21) der zehnten Vorlesung und den Gleichungen 27a) der eilften ist dann

$$\begin{aligned}
x_x &= \alpha_1^2\lambda_1 + \alpha_2^2\lambda_2 + \alpha_3^2\lambda_3 \\
y_y &= \beta_1^2\lambda_1 + \beta_2^2\lambda_2 + \beta_3^2\lambda_3 \\
z_z &= \gamma_1^2\lambda_1 + \gamma_2^2\lambda_2 + \gamma_3^2\lambda_3 \\
\tfrac{1}{2}y_z &= \beta_1\gamma_1\lambda_1 + \beta_2\gamma_2\lambda_2 + \beta_3\gamma_3\lambda_3 \\
\tfrac{1}{2}z_x &= \gamma_1\alpha_1\lambda_1 + \gamma_2\alpha_2\lambda_2 + \gamma_3\alpha_3\lambda_3 \\
\tfrac{1}{2}x_y &= \alpha_1\beta_1\lambda_1 + \alpha_2\beta_2\lambda_2 + \alpha_3\beta_3\lambda_3,
\end{aligned}$$

woraus bei Rücksicht auf die Relationen, die zwischen den Grössen α, β, γ bestehen, die Richtigkeit der Behauptung hervorgeht. Zugleich sehen wir, dass der mit L multiplicirte Ausdruck in der Gleichung 8) von der Richtung der Coordinatenachsen abhängig ist. Soll diese Gleichung für jedes Coordinatensystem bestehen, so muss also

$$L = 0$$

sein; so sind wir für einen isotropen Körper zu demselben Ausdrucke von f gelangt, der schon in der Gleichung 30) der eilften Vorlesung aufgestellt ist.

§ 2.

Für den Fall des Gleichgewichts gehen die Gleichungen 3) in die einfacheren

$$\begin{aligned}
\mu X &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \\
\mu Y &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \qquad 9) \\
\mu Z &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}
\end{aligned}$$

über. Hierzu kommt, wenn die Druckkräfte gegeben sind, die auf die Elemente der Oberfläche des Körpers wirken, die Bedingung, dass für diese Elemente X_n, Y_n, Z_n, wo n wieder die nach dem Innern des Körpers gerichtete Normale bedeutet, gegebene Werthe erhalten. Diese Werthe und die Werthe von X, Y, Z müssen dabei 6 gewisse Relationen erfüllen; es müssen nämlich die Summen ihrer Componenten und ihre Drehungsmomente in Bezug auf die Coordinatenachsen verschwinden, wie aus den Gleichungen 1) und 2) der eilften Vorlesung hervorgeht.

Durch die angegebenen Bedingungen sind die Grössen u, v, w noch nicht völlig bestimmt; es kommen diese sowohl in den Gleichungen 9), als in den Grenzbedingungen nur in den Verbindungen x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y vor; gesetzt, es seien die letzteren bestimmt, so sind u, v, w aus den Differentialgleichungen 1) zu ermitteln; hat man Ausdrücke für u, v, w gefunden, die diesen genügen, so kann man zu ihnen u', v', w' resp. hinzufügen, wenn

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial u'}{\partial x}, & 0 &= \frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y} \\ 0 &= \frac{\partial v'}{\partial y}, & 0 &= \frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial z} \\ 0 &= \frac{\partial w'}{\partial z}, & 0 &= \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \end{aligned} \tag{10}$$

ist. Es ist leicht, die allgemeinsten Lösungen dieser Gleichungen zu finden; differentiirt man nämlich jede von ihnen noch einmal nach x, y und z, so ergiebt sich, dass die sämmtlichen zweiten Differentialquotienten von u', v', w' nach x, y, z verschwinden; es sind also u', v', w' lineare Functionen von x, y, z mit constanten Coefficienten; substituirt man diese Functionen in 10), so findet man zwischen den Coefficienten solche Relationen, dass

$$\begin{aligned} u' &= a_0 + bz - cy \\ v' &= b_0 + cx - az \\ w' &= c_0 + ay - bx \end{aligned}$$

wird, wo a_0, b_0, c_0, a, b, c willkürliche Constanten sind. Die Veränderung des Körpers, welche der Hinzufügung dieser Ausdrücke zu u, v, w entspricht, besteht nach den in der fünften Vorlesung gemachten Auseinandersetzungen in einer Verschiebung und einer Drehung um den Anfangspunkt, deren Componenten a_0, b_0, c_0 und a, b, c sind. Statt dessen kann man auch sagen: Eine Veränderung der Grössen a_0, b_0, c_0, a, b, c entspricht einer Veränderung der *Lage* des Körpers in seinem natürlichen Zustande, von der aus die Verrückungen u, v, w gerechnet werden. Sollen u, v, w vollständig bestimmt sein, wenn x_x, y_y, . . es sind, so müssen noch Bedingungen

festgesetzt werden, welche zur Bestimmung der 6 Constanten a_0, b_0, c_0, a, b, c genügen; solche Bedingungen sind z. B. die, dass für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad 11)$$

ist. Die 3 ersten von diesen Gleichungen sprechen aus, dass der Anfangspunkt der Coordinaten keine Verrückung erlitten hat; die Bedeutung der 3 letzten erkennt man leicht mit Hülfe der Gleichungen 7) der zehnten Vorlesung. Bei der dort gebrauchten Bezeichnung sind die 3 letzten der Gleichungen 11), wie die Gleichungen 27a) der eilften Vorlesung zeigen,

$$a_{13} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad a_{21} = 0;$$

die Gleichungen 7) der zehnten Vorlesung werden hierdurch

$$\begin{aligned} r'\alpha' &= r(a_{11}\alpha + a_{12}\beta) \\ r'\beta' &= \phantom{r(a_{11}\alpha + {}} r a_{22}\beta \\ r'\gamma' &= r(a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma). \end{aligned}$$

Daraus folgt erstens: wenn $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ ist, so ist auch $\alpha' = 0$ und $\beta' = 0$, d. h. ein der z-Achse paralleles, durch den Anfangspunkt gehendes Linienelement erleidet keine Drehung; zweitens folgt: wenn $\beta = 0$ ist, so ist auch $\beta' = 0$, d. h. ein der zx-Ebene paralleles, durch den Anfangspunkt gehendes Flächenelement bleibt sich selbst parallel.

Wollte man in den Gleichungen 1) $x_x, y_y, ..$ als willkürliche Functionen von x, y, z annehmen, so würden dieselben, da sie nur 3 zu bestimmende Functionen, u, v, w, enthalten, im Allgemeinen sich widersprechen; wir bemerken, dass sie immer vereinbar mit einander sind, wenn $x_x, y_y, ...$ von x, y, z unabhängig sind, aber beliebige Werthe haben. Setzt man nämlich u, v, w linearen Functionen von x, y, z gleich, so kann man die 12 Coefficienten dieser so bestimmen, dass $x_x, y_y, ..$ beliebig gegebene constante Werthe erhalten und zugleich den Bedingungen 11) genügt wird.

Diese Bemerkung benutzen wir, um eine wichtige Eigenschaft der Function f, die bis jetzt nicht erwähnt ist, abzuleiten. Wir setzen von dem Körper voraus, dass er, wenn auf seine Theile keine Kräfte, auf seine Oberfläche keine Druckkräfte wirken, und er den Bedingungen 11) unterworfen ist, in *stabilem* Gleichgewichte sich befindet, wenn überall $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ ist. Nach der Bedeutung von f, an die wir erinnert haben, und nach § 2 der vierten Vorlesung muss dann unter den Bedingungen 11)

$$\int f d\tau$$

ein *Maximum* sein, wenn überall $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ ist, d. h. wenn überall x_x, y_y, . . verschwinden. Dieses Maximum muss auch stattfinden, wenn den Grössen x_x, y_y, . . die Beschränkung aufgelegt wird, dass sie von x, y, z unabhängig sind, ihre Werthe aber willkürlich bleiben. Es muss also f ein Maximum sein für $x_x = 0$, $y_y = 0$, . ., wenn x_x, y_y, . . . als unabhängige Variable angesehen werden. Da nun f eine homogene Function zweiten Grades der genannten Argumente ist, so ist dieser Ausspruch gleichbedeutend mit dem, dass f *nie positiv ist und nur verschwindet, wenn jedes seiner Argumente verschwindet.* Die letztere Eigenschaft hat f nicht, wenn der Körper eine compressible, nicht reibende Flüssigkeit ist. Wir können eine solche als einen isotropen Körper ansehen, bei dem die Constanten K und θ, die wir in Bezug auf einen isotropen Körper eingeführt haben, solche Werthe besitzen, dass $K = 0$ und $K\theta$ endlich ist; in diesem Falle verschwindet f immer, sobald $x_x + y_y + z_z = 0$ ist.

Aus dem Umstande, dass für einen festen Körper, wie wir ihn hier betrachten, f nie positiv ist und nur verschwindet, wenn jedes seiner Argumente gleich Null ist, lässt sich weiter beweisen, dass u, v, w eindeutig bestimmt sind durch die Gleichungen 9), die Bedingung, dass an der Oberfläche X_n, Y_n, Z_n gegebene Werthe erhalten und die Gleichungen 11). Um das darzuthun, braucht man nur zu zeigen, dass diese Bedingungen $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ ergeben, wenn X, Y, Z, X_n, Y_n, Z_n überall verschwinden. Zu diesem Zwecke addire man die Gleichungen 9), nachdem sie mit $u\,d\tau$, $v\,d\tau$, $w\,d\tau$ multiplicirt sind, und integrire über das Volumen des Körpers; mit der resultirenden Gleichung nehme man eine Umformung vor, ähnlich derjenigen, die uns zu der Gleichung 18) der eilften Vorlesung geführt hat; benutzt man, dass

$$2f = X_x x_x + Y_y y_y + Z_z z_z + Y_z y_z + Z_x z_x + X_y x_y$$

ist, so findet man dann für den genannten Fall

$$\int f\,d\tau = 0.$$

Hieraus folgt aber bei Rücksicht auf die Eigenschaften, die f besitzt, dass x_x, y_y, . . überall verschwinden, und dann weiter aus 11), dass auch u, v, w überall $= 0$ sind.

Lässt man die Bedingungen 11) fallen, so bestimmen die Gleichungen 9) und die Werthe von X_n, Y_n, Z_n den *Zustand* des Körpers, wie wir sagen wollen, nämlich die relativen Verschiebungen seiner Theile, während die Lage des Körpers unbekannt bleibt.

§ 3.

Verschwinden die Kräfte X, Y, Z, so werden die Gleichungen 9)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \\ 0 &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\ 0 &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}. \end{aligned} \tag{12)}$$

Von diesen Gleichungen wollen wir nun particuläre Lösungen bilden, die mit den Bedingungen 1) verträglich sind.

Man erhält eine solche, wenn man die 6 Druckcomponenten X_x, Y_y, .. beliebigen Constanten gleichsetzt; dann werden nämlich auch die Grössen x_x, y_y, .. gleich Constanten und wir haben bereits im vorigen § gesehen, dass in diesem Falle die Gleichungen 1) erfüllt werden können, und zwar dadurch, dass man u, v, w linearen Functionen von x, y, z gleichmacht. Der letzte Umstand bewirkt, dass bei der genannten Annahme die Veränderung, die der Körper aus seinem natürlichen Zustande erfahren hat, der Art ist, dass die neuen Coordinaten eines jeden seiner Punkte lineare Functionen der alten sind, dass also eine jede Ebene eine Ebene, eine jede Kugel ein Ellipsoid geblieben ist.

Ist

$$\begin{gathered} X_x = Y_y = Z_z = p \\ Y_z = Z_x = X_y = 0, \end{gathered}$$

wo p eine Constante bedeutet, so erleidet ein jedes Flächenelement im Innern des Körpers und ein jedes Element seiner Oberfläche einen senkrechten Druck, der $= p$ ist. Bei einer beliebigen Gestalt des Körpers lässt dieser Fall sich verwirklichen, wenn der Körper in eine Flüssigkeit gebracht ist und der Druck in dieser vergrössert wird; die Wirkung der Schwere ist dabei unmerklich. Im Allgemeinen bleibt der Körper dabei nicht sich selbst ähnlich; das findet aber statt, wenn er isotrop ist, oder, wenn es drei gleichwerthige, auf einander senkrechte Symmetrie-Ebenen für seine Substanz giebt. Unter der *Zusammendrückbarkeit* des Körpers versteht man den negativ genommenen Werth, den die räumliche Dilatation für $p = 1$ besitzt; für einen isotropen Körper ergiebt sich aus den Gleichungen 28) der eilften Vorlesung die Zusammendrückbarkeit

$$= \frac{3}{2K(1+3\theta)}.$$

Wenn

$$X_x, \quad Y_y, \quad X_y, \quad Y_z, \quad Z_x$$

verschwinden und Z_z einen constanten Werth hat, so erleidet irgend ein Flächenelement, welches der z-Achse parallel ist, keinen Druck, und ein Flächenelement, welches senkrecht zu dieser Achse ist, den senkrechten Druck Z_z. Dieser Fall lässt sich verwirklichen, wenn der Körper die Gestalt eines geraden, der z-Achse parallelen Cylinders von beliebigem Querschnitt hat, indem man die Mantelfläche frei lässt und an jedem Element der Grundflächen einen senkrechten, constanten Druck anbringt. Den Werth, den

$$-\frac{Z_z}{z_z}$$

dann hat, nennt man den *Elasticitäts-Coefficienten* der Substanz für die Richtung der z-Achse; dieser ist immer von der Richtung der z-Achse abhängig, ausser, wenn der Körper isotrop ist. Für einen isotropen Körper ist er den Gleichungen 28) der eilften Vorlesung zufolge

$$= 2K\frac{1+3\theta}{1+2\theta}.$$

§ 4.

Ist der Körper isotrop, so lässt sich ohne Schwierigkeit eine allgemeinere Lösung der Gleichung 12), die mit den Bedingungen 1) verträglich ist, finden, bei der

$$X_x = 0, \quad X_y = 0, \quad Y_y = 0,$$

ist; ist der Körper überdies durch eine der z-Achse parallele Cylinderfläche und zwei Querschnitte dieser begrenzt, so lässt diese Lösung dem Falle sich anpassen, dass die Cylinderfläche frei ist und auf die Elemente eines der Querschnitte Druckkräfte wirken, deren Componentensummen und Drehungsmomente beliebig gegeben sind. Die so bestimmte Lösung ist deshalb von besonderer Wichtigkeit, weil sie die Formänderungen eines cylindrischen Stabes, auf dessen Enden beliebige Druckkräfte wirken, im Allgemeinen mit grosser Genauigkeit darstellt, falls die Länge des Stabes gross gegen die Dimensionen des Querschnitts ist. Wir werden in den beiden folgenden Vorlesungen uns ausführlich mit den Formänderungen eines dünnen Stabes beschäftigen, indem wir von vornherein die Voraussetzung einführen, dass die Dimensionen des Querschnitts des Stabes unendlich klein sind, während seine Länge endlich ist. Die Betrachtungen, die wir hier durchführen wollen, sind in gewisser Hinsicht specieller, in anderer aber allgemeiner, als jene späteren.

Um die bezeichnete Lösung abzuleiten, untersuchen wir zuerst, welche Beziehungen zwischen den 6 Grössen x_x, y_y, . . stattfinden

müssen, damit die Gleichungen 1) erfüllbar sind. Wir erhalten dieselben, indem wir die Gleichungen aufstellen, durch welche die Functionen u, v, w, wenn sie existiren, aus x_x, y_y, .. zu berechnen sind. Von dem Punkte $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, den wir im Innern des Körpers annehmen, denken wir uns in diesem eine beliebige Linie nach dem Punkte (x, y, z) gezogen und bezeichnen durch dx, dy, dz die Projectionen eines Elementes derselben auf die Coordinatenachsen. Ist $(u)_0$ der Werth von u für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, so haben wir dann

$$u = (u)_0 + \int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz\right).$$

$\frac{\partial u}{\partial x}$ ist hier als unmittelbar gegeben zu betrachten, denn es ist $= x_x$; $\frac{\partial u}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial z}$ aber sind erst zu berechnen. Aus den Gleichungen 1) folgt leicht

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial x_x}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial y_x}{\partial y} + \frac{\partial y_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial y_z}{\partial x} + \frac{\partial z_x}{\partial y} + \frac{\partial x_y}{\partial z}\right)$$

und

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial x_x}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial y_z}{\partial x} + \frac{\partial z_x}{\partial y} + \frac{\partial x_y}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial z_x}{\partial z} - \frac{\partial z_z}{\partial x};$$

diese Werthe sind in die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + \int \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\,dz)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 + \int \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\,dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,dz),$$

in denen der Index 0 dieselbe Bedeutung, wie eben, hat, zu setzen.

Der für $\frac{\partial u}{\partial x}$ angenommene Ausdruck, nämlich x_x, ist eine Function von x, y, z; auch die für $\frac{\partial u}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial z}$ aufgestellten Ausdrücke müssen solche Functionen, d. h. unabhängig von dem Integrationswege sein, die in ihnen unter den Integralzeichen stehenden Grössen also vollständige Differentiale. Die Bedingungen hierfür sind durch die folgenden 5 Gleichungen ausgesprochen:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 x_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 y_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 x_y}{\partial x\,\partial y} \\
&\frac{\partial^2 z_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 x_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 z_x}{\partial z\,\partial x} \\
2\,&\frac{\partial^2 x_x}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2 y_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y_x}{\partial z\,\partial x} + \frac{\partial^2 z_x}{\partial y\,\partial x} \\
2\,&\frac{\partial^2 y_y}{\partial z\,\partial x} + \frac{\partial^2 z_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z_y}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 x_y}{\partial z\,\partial y} \\
2\,&\frac{\partial^2 z_z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 x_y}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 x_z}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2 y_z}{\partial x\,\partial z}.
\end{aligned}
\qquad 13)
$$

Dass die Ausdrücke, die dann für $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ erhalten werden, die partiellen Differentialquotienten *einer* Function sind, bringt keine neue Bedingung hinzu.

Ersetzt man in den durchgeführten Betrachtungen u durch v oder w, so erhält man nur die eine neue Gleichung

$$\frac{\partial^2 y_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 z_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 y_z}{\partial y\,\partial z}, \qquad 14)$$

welche den Gleichungen 13) hinzuzufügen ist.

Substituirt man die für die ersten Differentialquotienten von u aufgestellten Ausdrücke und die entsprechenden der ersten Differentialquotienten von v und w in die Gleichungen 1), so werden diese für alle Werthe von x, y, z erfüllt, wenn nur $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0$, $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0$, $\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0$, $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0$ so gewählt sind, dass sie für den Punkt $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ erfüllt werden.

Das Resultat dieser Betrachtungen ist, dass die Gleichungen 13) und 14) die vollständigen Bedingungen dafür sind, dass u, v, w den Gleichungen 1) gemäss sich als Functionen von x, y, z bestimmen lassen. Um die Beziehungen zu finden, die dabei zwischen den Druckcomponenten X_x, Y_y, . . stattfinden müssen, hat man nur noch zu erwägen, dass x_x, y_y, . . lineare homogene Functionen dieser Druckcomponenten sind, deren Coefficienten von den Constanten der Elasticität in gewisser Weise abhängen.

Wir haben bereits bemerkt, dass die Gleichungen 1) mit der Annahme verträglich sind, dass X_x, Y_y, . . beliebige constante Werthe besitzen; wir sehen jetzt, dass sie auch gestatten, X_x, Y_y, . . beliebigen linearen Functionen von x, y, z gleichzusetzen, da die Gleichungen 13) und 14) nur zweite Differentialquotienten nach x, y, z enthalten.

Ist der Körper, wie wir nun annehmen wollen, isotrop, so hat man nach den Gleichungen 28) der eilften Vorlesung

$$x_x = -\frac{1}{2K}\left(X_x - \frac{\theta}{1+3\theta}(X_x + Y_y + Z_z)\right)$$
$$y_y = -\frac{1}{2K}\left(Y_y - \frac{\theta}{1+3\theta}(X_x + Y_y + Z_z)\right)$$
$$z_z = -\frac{1}{2K}\left(Z_z - \frac{\theta}{1+3\theta}(X_x + Y_y + Z_z)\right)$$
$$y_z = -\frac{1}{K}Y_z$$
$$z_x = -\frac{1}{K}Z_x$$
$$x_y = -\frac{1}{K}X_y.$$

Führt man ferner die Voraussetzung

$$X_x = 0, \quad X_y = 0, \quad Y_y = 0 \tag{15}$$

ein, so erhält man hieraus

$$\begin{aligned} x_x &= \frac{1}{2K}\frac{\theta}{1+3\theta}Z_z, & y_z &= -\frac{1}{K}Y_z \\ y_y &= \frac{1}{2K}\frac{\theta}{1+3\theta}Z_z, & z_x &= -\frac{1}{K}Z_x \\ z_z &= -\frac{1}{2K}\frac{1+2\theta}{1+3\theta}Z_z, & x_y &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Die Gleichungen 12) werden dabei

$$\frac{\partial X_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Z_z}{\partial z} = -\frac{\partial X_z}{\partial x} - \frac{\partial Y_z}{\partial y}. \tag{17}$$

Die Gleichungen 13) und 14) ergeben daher

$$\frac{\partial^2 Z_z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 Z_z}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 Z_z}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 Z_z}{\partial x\,\partial y} = 0$$

nnd

$$\frac{\theta}{1+3\theta}\frac{\partial^2 Z_z}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^2 Y_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 X_z}{\partial x\,\partial y}$$
$$\frac{\theta}{1+3\theta}\frac{\partial^2 Z_z}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2 X_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Y_z}{\partial x\,\partial y}.$$

Die vier ersten dieser 6 Gleichungen sagen aus, dass Z_z linear ist in Bezug auf jede der Grössen x, y, z und auch das Product xy nicht enthält; es ist daher

$$Z_z = a + a_1 x + a_2 y + z(b + b_1 x + b_2 y), \tag{18}$$

wo a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 willkürliche Constanten bedeuten; die beiden letzten werden dadurch

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Y_z}{\partial x} - \frac{\partial X_z}{\partial y}\right) = \frac{\theta}{1+3\theta}b_2$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Y_z}{\partial x} - \frac{\partial X_z}{\partial y}\right) = -\frac{\theta}{1+3\theta}b_1.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial Y_z}{\partial x} - \frac{\partial X_z}{\partial y} = c + \frac{\theta}{1+3\theta}(b_2 x - b_1 y), \tag{19}$$

wo c eine willkürliche Grösse bedeutet, die von x, y und, wegen 17), auch von z unabhängig ist. Diese Gleichung verbinden wir mit der Gleichung

$$\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} = -(b + b_1 x + b_2 y), \tag{20}$$

die aus 17) und 18) folgt. Gesetzt es seien X_z' und Y_z' die Differenzen der Werthe von X_z und Y_z in zwei verschiedenen Lösungen der Gleichungen 19) und 20), so ist

$$\frac{\partial Y_z'}{\partial x} - \frac{\partial X_z'}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial X_z'}{\partial x} + \frac{\partial Y_z'}{\partial y} = 0,$$

also

$$X_z' = \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad Y_z' = \frac{\partial \Omega}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = 0. \tag{21}$$

Hiernach kann man die allgemeine Lösung der Gleichungen 19) und 20) angeben, sobald man eine particuläre gefunden hat; eine solche findet man aber, indem man für X_z und Y_z Ausdrücke zweiten Grades in x und y annimmt und die Coefficienten derselben passend bestimmt, wobei der Willkür nach einiger Spielraum bleibt. So findet man als allgemeine Lösung der Gleichungen 19) und 20)

$$\begin{aligned} X_z &= -\frac{b}{2}x - \frac{c}{2}y - \frac{b_1}{4}\frac{1+2\theta}{1+3\theta}(x^2+y^2) - \frac{b_2}{2}\frac{1+4\theta}{1+3\theta}xy + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ Y_z &= \frac{c}{2}x - \frac{b}{2}y - \frac{b_2}{4}\frac{1+2\theta}{1+3\theta}(x^2+y^2) - \frac{b_1}{2}\frac{1+4\theta}{1+3\theta}xy + \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \end{aligned} \tag{22}$$

wo Ω der Gleichung 21) gemäss zu wählen ist.

Nun wollen wir annehmen, dass der Körper, um den es sich handelt, durch eine der z-Achse parallele Cylinderfläche und zwei senkrechte Querschnitte begrenzt ist, und wollen die aufgestellten Formeln dem Falle anzupassen suchen, dass die Cylinderfläche frei von jedem Drucke ist. Es sei dl ein Element des Umfangs eines zur z-Achse senkrechten Querschnitts, n die nach dem Innern dieses gerichtete Normale von dl; es muss dann

$$0 = X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz)$$

$$0 = Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz)$$

$$0 = Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz)$$

sein. In Folge der Gleichungen 15) und des Umstandes, dass

$$\cos(nz) = 0$$

ist, sind die beiden ersten dieser Gleichungen erfüllt; die dritte wird

$$0 = X_z \cos(nx) + Y_z \cos(ny). \qquad 23)$$

Substituirt man hier für X_z und Y_z ihre Werthe aus 22), so erhält man einen Ausdruck für

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} \cos(nx) + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \cos(ny), \quad \text{d. h. für } \frac{\partial \Omega}{\partial n},$$

der die, bis jetzt nur durch 21) definirte Function Ω bis auf eine additive Constante, deren Werth gleichgültig ist, bestimmt.

Damit es eine Function gebe, die den für Ω aufgestellten Bedingungen genügt, muss, wie wir in der sechszehnten Vorlesung gesehen haben,

$$\int \frac{\partial \Omega}{\partial n} dl = 0 \qquad 24)$$

sein. Bildet man diese Gleichung mit Hülfe von 22) und 23), so spricht sie aus, dass eine Summe von Gliedern verschwindet, die von der Form

$$\int V \cos(nx)\, dl \qquad \text{oder} \qquad \int V \cos(ny)\, dl$$

sind, wo V eine, in dem Querschnitt des cylindrischen Körpers stetige Function von x und y bedeutet. Ist df ein Element dieses Querschnitts, so hat man aber, den Gleichungen 6) der eilften Vorlesung entsprechend,

$$\int V \cos(nx)\, dl = -\int \frac{\partial V}{\partial x} df$$

$$\int V \cos(ny)\, dl = -\int \frac{\partial V}{\partial y} df.$$

Wir wollen die z-Achse so legen, dass

$$\int x\, df = 0 \quad \text{und} \quad \int y\, df = 0$$

ist, d. h. die Linie, auf der die Schwerpunkte der Querschnitte liegen, zur z-Achse wählen; ein Blick auf die Gleichungen 22) zeigt dann, dass die Gleichung 24)

$$b \int df = 0, \quad \text{d. h.} \quad b = 0$$

wird. Die 6 übrigen Constanten, die wir eingeführt haben,

$$a,\ a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ c$$

bleiben unbestimmt und können so gewählt werden, dass die Componentensummen und Drehungsmomente der auf die Elemente einer Endfläche wirkenden Drucke, nämlich die Grössen

$$\int X_z\,df, \quad \int (yZ_z - zY_z)\,df$$
$$\int Y_z\,df, \quad \int (zX_z - xY_z)\,df$$
$$\int Z_z\,df, \quad \int (xY_z - yX_z)\,df,$$

beliebig gegebene Werthe annehmen.

Wir wollen die Rechnung nur weiterführen für den Fall, dass der Querschnitt des Körpers ein Kreis von dem Radius R, die Gleichung seines Umfangs also

$$x^2 + y^2 = R^2$$

ist. Der Gleichung 21) genügt man durch

$$\Omega = A_1 x + A_2 y + B_1 (x^3 - 3xy^2) + B_2 (y^3 - 3x^2 y),$$

wo A_1, A_2, B_1, B_2 willkürliche Constanten bedeuten; es wird sich zeigen, dass diese sich so bestimmen lassen, dass $\frac{\partial \Omega}{\partial n}$ den verlangten Werth erhält. Da

$$\cos(nx) = -\frac{x}{R}, \quad \cos(ny) = -\frac{y}{R},$$

so ist

$$-R\frac{\partial \Omega}{\partial n} = x\frac{\partial \Omega}{\partial x} + y\frac{\partial \Omega}{\partial y},$$

also

$$= A_1 x + A_2 y + 3B_1 (x^3 - 3xy^2) + 3B_2 (y^3 - 3x^2 y),$$

oder auch, da das Zeichen $\frac{\partial \Omega}{\partial n}$ sich nur auf den Umfang des Querschnitts bezieht,

$$-R\frac{\partial \Omega}{\partial n} = A_1 x + A_2 y + 3B_1 (x^3 - 3xy^2) + 3B_2 (y^3 - 3x^2 y)$$
$$+ (C_1 x + C_2 y)(x^2 + y^2 - R^2),$$

wo C_1, C_2 zwei neue Constanten bedeuten. Andererseits folgt aus den Gleichungen 22) und 23)

$$-R\frac{\partial \Omega}{\partial n} = \frac{b_1 x}{4(1+3\theta)}\Big((1+2\theta)x^2 + (3+10\theta)y^2\Big) + \frac{b_2 y}{4(1+3\theta)}\Big((3+10\theta)x^2 + (1+2\theta)y^2\Big).$$

Diese beiden für $-R\frac{\partial \Omega}{\partial n}$ aufgestellten Ausdrücke werden identisch, wenn man

$$A_1 = R^2 \frac{b_1}{8}\frac{3+4\theta}{1+3\theta} \qquad A_2 = R^2 \frac{b_2}{8}\frac{3+4\theta}{1+3\theta}$$
$$B_1 = -\frac{b_1}{24}\frac{1+4\theta}{1+3\theta} \qquad B_2 = -\frac{b_2}{24}\frac{1+4\theta}{1+3\theta}$$
$$C_1 = \frac{b_1}{8}\frac{3+4\theta}{1+3\theta} \qquad C_2 = \frac{b_2}{8}\frac{3+4\theta}{1+3\theta}$$

macht. Bei diesen Werthen von A_1, A_2, B_1, B_2 werden die Gleichungen 22)

$$X_z = -\frac{c}{2}y + \frac{b_1}{8}\frac{(3+8\theta)(R^2-x^2)-y^2}{1+3\theta} - \frac{1+4\theta}{1+8\theta}\frac{b_2}{4}xy$$

$$Y_z = \frac{c}{2}x - \frac{1+4\theta}{1+3\theta}\frac{b_1}{4}xy + \frac{b_2}{8}\frac{(3+8\theta)(R^2-y^2)-x^2}{1+3\theta},$$

wozu wir fügen

$$Z_z = a + a_1x + a_2y + z(b_1x + b_2y).$$

Die Berechnung der Constanten a, a_1, a_2, b_1, b_2, c aus den Componentensummen und Drehungsmomenten der Druckkräfte, die auf ein Ende des Cylinders wirken, ist hier sehr einfach; nehmen wir dieses Ende zur xy-Ebene und benutzen, dass

$$\int x^2\,df = \int y^2\,df = \frac{\pi}{4}R^4$$

$$\int xy\,df = \int x^2y\,df = \int xy^2\,df = 0$$

ist, so finden wir

$$\int X_z\,df = b_1\frac{\pi}{4}R^4, \qquad \int (yZ_z - zY_z)\,df = a_2\frac{\pi}{4}R^4$$

$$\int Y_z\,df = b_2\frac{\pi}{4}R^4, \qquad \int (zX_z - xZ_z)\,df = -a_1\frac{\pi}{4}R^4$$

$$\int Z_z\,df = a\pi R^2, \qquad \int (xY_z - yX_z)\,df = c\frac{\pi}{4}R^4.$$

In Bezug auf die weitere und allgemeinere Discussion der in diesem § entwickelten Formeln verweisen wir auf Clebsch*) und Saint-Venant**).

§ 5.

Für einen isotropen Körper lassen sich in Folge der Gleichungen 28) der eilften Vorlesung, wenn man

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \sigma \qquad 25)$$

und wieder

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi$$

setzt, die Gleichungen 3) schreiben

$$\begin{aligned}\mu\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \mu X + K\left(\Delta u + (1+2\theta)\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)\\ \mu\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \mu Y + K\left(\Delta v + (1+2\theta)\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)\\ \mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \mu Z + K\left(\Delta w + (1+2\theta)\frac{\partial\sigma}{\partial z}\right)\end{aligned} \qquad 26)$$

*) Theorie der Elasticität fester Körper von A. Clebsch, Leipzig 1862.

**) Mém. sur la flexion des prismes, Liouville Journal IIème série, Tome I (1856).

Für den Fall, dass das Gleichgewicht besteht und keine Kräfte auf die Theile des Körpers wirken, gehen dieselben über in

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta u + (1+2\theta)\frac{\partial \sigma}{\partial x} \\ 0 &= \Delta v + (1+2\theta)\frac{\partial \sigma}{\partial y} \\ 0 &= \Delta w + (1+2\theta)\frac{\partial \sigma}{\partial z}, \end{aligned} \qquad 27)$$

woraus folgt

$$0 = \Delta \sigma.$$

Es ist leicht, eine particuläre Lösung der Gleichungen 25) und 27) zu finden, deren Kenntniss von Interesse ist. Man genügt ihnen, wenn man

$$\sigma = a$$

setzt, wo a eine willkürliche Constante bedeutet, und

$$u = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial V}{\partial z},$$

wo V die Gleichung

$$\Delta V = a$$

erfüllt. Demgemäss kann man annehmen

$$V = \frac{a}{6} r^2 + \frac{b}{r},$$

wo

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

und b eine zweite willkürliche Constante ist. Für die Druckcomponenten hat man dann die Ausdrücke

$$\begin{aligned} X_x &= -2K\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \theta a\right) & Y_z &= -2K\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z} \\ Y_y &= -2K\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \theta a\right) & Z_x &= -2K\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x} \\ Z_z &= -2K\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \theta a\right) & X_y &= -2K\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}, \end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned} X_x &= -2K\left((1+3\theta)\frac{a}{3} - \frac{b}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}b\right) & Y_z &= -2K\frac{3yz}{r^5}b \\ Y_y &= -2K\left((1+3\theta)\frac{a}{3} - \frac{b}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}b\right) & Z_x &= -2K\frac{3zx}{r^5}b \\ Z_z &= -2K\left((1+3\theta)\frac{a}{3} - \frac{b}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}b\right) & X_y &= -2K\frac{3xy}{r^5}b. \end{aligned}$$

Dieselben haben die Eigenschaft, die Gleichungen

$$\begin{aligned} (X_x - p)\,x + X_y y + X_z z &= 0 \\ Y_x x + (Y_y - p)\,y + Y_z z &= 0 \\ Z_x x + Z_y y + (Z_z - p)\,z &= 0 \end{aligned}$$

zu befriedigen, wenn

$$p = -2K\left((1+3\theta)\frac{a}{3}+2\frac{b}{r^3}\right)$$

gesetzt wird. Erinnert man sich an den Begriff der *Hauptdrucke*, der im § 3 der eilften Vorlesung definirt ist, so ist hieraus zu schliessen, dass die durch den Punkt (x, y, z) und den Anfangspunkt der Coordinaten gezogene Gerade die Richtung einer Hauptdruckachse für jenen Punkt hat und die Grösse des entsprechenden Hauptdruckes der für p angegebene Ausdruck ist. Da dieser Ausdruck eine Function von r ist und zwei willkürliche Constanten enthält, so folgt weiter, dass die aufgestellten Formeln dem Falle sich anpassen lassen, dass der Körper durch zwei um den Anfangspunkt der Coordinaten als Mittelpunkt beschriebene Kugelflächen begrenzt ist, auf deren jede ein constanter und senkrechter Druck ausgeübt wird. Sind die Radien der beiden Kugelflächen r_1 und r_2, und p_1 und p_2 die entsprechenden Drucke, so sind a und b aus den Gleichungen

$$p_1 = -2K\left((1+3\theta)\frac{a}{3}+2\frac{b}{r_1^3}\right)$$

$$p_2 = -2K\left((1+3\theta)\frac{a}{3}+2\frac{b}{r_2^3}\right)$$

zu bestimmen.

Achtundzwanzigste Vorlesung.

(Endliche Formänderungen eines unendlich dünnen, ursprünglich cylindrischen Stabes. Dilatationen eines kleinen Theiles desselben. Vereinfachungen, die eintreten, wenn der Querschnitt eine Ellipse, oder seine Ebene eine Symmetrie-Ebene ist. Potential der durch die Dilatationen erzeugten Kräfte. Lebendige Kraft des Stabes. Gleichgewicht des Stabes unter dem Einfluss von Druckkräften, die auf seine Enden wirken. Uebereinstimmung des hierauf bezüglichen Problems mit dem Problem der Rotation eines schweren Körpers um einen festen Punkt. Der Stab kann eine Schraubenlinie bilden. Gleichgewicht eines krummen Stabes, der ursprünglich eine Schraubenlinie bildet.)

§ 1.

Wir werden uns jetzt mit dem Gleichgewicht und der Bewegung von Körpern beschäftigen, deren Dimensionen theilweise unendlich klein sind; dünne Stäbe und Platten können näherungsweise als solche angesehen werden. Körper, wie wir sie nun betrachten wollen, können *endliche* Formänderungen erleiden, ohne dass die Dilatationen aufhören unendlich klein zu sein. Auch auf solche Fälle können wir unsere Theorie anwenden, indem wir den Körper in Theile getheilt denken, deren jeder Dimensionen hat, die alle von derselben Ordnung sind, und die aufgestellten Gleichungen zunächst auf *einen* dieser Theile beziehen.

Denken wir uns einen Körper (oder Körpertheil), dessen Dimensionen alle von der Ordnung der unendlich kleinen Grösse i sind, und stellen für diesen die Bedingungen des Gleichgewichtes zusammen. Zu diesen gehören zunächst die Gleichungen 9) der vorigen Vorlesung, also die Gleichungen

$$\begin{aligned}\mu X &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\\ \mu Y &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \qquad\qquad 1)\\ \mu Z &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\,.\end{aligned}$$

Es sei g eine Function von x, y, z,

$$g = 0$$

die Gleichung der Oberfläche des Körpers und g positiv im Innern desselben; n wiederum die nach dem Innern gerichtete Normale eines Elementes der Oberfläche. Es ist dann

$$\cos(nx) : \cos(ny) : \cos(nz) = \frac{\partial g}{\partial x} : \frac{\partial g}{\partial y} : \frac{\partial g}{\partial z}$$

und jene Cosinus haben *dieselben* Vorzeichen wie diese Differentialquotienten, da $\frac{\partial g}{\partial n}$ positiv ist. Hiernach ist an der Oberfläche

$$\begin{aligned} X_x \frac{\partial g}{\partial x} + X_y \frac{\partial g}{\partial y} + X_z \frac{\partial g}{\partial z} &= X_n \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2} \\ Y_x \frac{\partial g}{\partial x} + Y_y \frac{\partial g}{\partial y} + Y_z \frac{\partial g}{\partial z} &= Y_n \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2} \\ Z_x \frac{\partial g}{\partial x} + Z_y \frac{\partial g}{\partial y} + Z_z \frac{\partial g}{\partial z} &= Z_n \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2}, \end{aligned} \qquad 2)$$

wo die Wurzelgrösse positiv zu nehmen ist und X_n, Y_n, Z_n als gegeben betrachtet werden sollen.

Damit u, v, w völlig bestimmt seien, setzen wir noch fest, dass die Lage des Körpers in seinem natürlichen Zustande, von der aus u, v, w gerechnet werden, so gewählt sei, dass für den Anfangspunkt der Coordinaten, der im Innern des Körpers sich befinden soll, also für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

$$\begin{aligned} &u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0 \\ &\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{aligned} \qquad 3)$$

ist.

Nun setzen wir

$$x = ix', \quad y = iy', \quad z = iz'; \qquad 4)$$

den gemachten Voraussetzungen zufolge sind dann x', y', z' in dem Körper endlich und, ist

$$g' = 0$$

die Gleichung zwischen x', y', z', die der Oberfläche entspricht, so enthält g' nur endliche Constanten.

Die Substitutionen 4) denke man sich auch in den Gleichungen 1), 2) und 3) ausgeführt. Macht man

$$\begin{aligned} x_x' &= \frac{\partial u}{\partial x'}, & y_z' &= \frac{\partial v}{\partial z'} + \frac{\partial w}{\partial y'} \\ y_y' &= \frac{\partial v}{\partial y'}, & z_x' &= \frac{\partial w}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial z'} \\ z_z' &= \frac{\partial w}{\partial z'}, & x_y' &= \frac{\partial u}{\partial y'} + \frac{\partial v}{\partial x'} \end{aligned}$$

und bezeichnet durch X_x', X_y', . . die Ausdrücke, die man erhält, wenn man x_x, x_y, . . durch x_x', x_y', . . in den Ausdrücken ersetzt, die X_x, X_y, . . als Function von x_x, x_y, . . darstellen, so erhält man dadurch:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_x'}{\partial x'} + \frac{\partial X_y'}{\partial y'} + \frac{\partial X_z'}{\partial z'} &= i^2 X\mu \\
\frac{\partial Y_x'}{\partial x'} + \frac{\partial Y_y'}{\partial y'} + \frac{\partial Y_z'}{\partial z'} &= i^2 Y\mu \\
\frac{\partial Z_x'}{\partial x'} + \frac{\partial Z_y'}{\partial y'} + \frac{\partial Z_z'}{\partial z'} &= i^2 Z\mu,
\end{aligned} \tag{5}$$

für $g' = 0$

$$\begin{aligned}
X_x' \frac{\partial g'}{\partial x'} + X_y' \frac{\partial g'}{\partial y'} + X_z' \frac{\partial g'}{\partial z'} &= i X_n \sqrt{\left(\frac{\partial g'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial g'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial g'}{\partial z'}\right)^2} \\
Y_x' \frac{\partial g'}{\partial x'} + Y_y' \frac{\partial g'}{\partial y'} + Y_z' \frac{\partial g'}{\partial z'} &= i Y_n \sqrt{\left(\frac{\partial g'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial g'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial g'}{\partial z'}\right)^2} \\
Z_x' \frac{\partial g'}{\partial x'} + Z_y' \frac{\partial g'}{\partial y'} + Z_z' \frac{\partial g'}{\partial z'} &= i Z_n \sqrt{\left(\frac{\partial g'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial g'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial g'}{\partial z'}\right)^2}
\end{aligned} \tag{6}$$

und für $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$

$$\begin{aligned}
u = 0, \quad & v = 0, \quad w = 0 \\
\frac{\partial u}{\partial z'} = 0, \quad & \frac{\partial v}{\partial z'} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x'} = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Die Werthe von u, v, w, welche aus 5), 6) und 7) sich ergeben, lassen sich darstellen als die Summen von Gliedern, von denen die einen die Gleichungen 6) und 7), statt der Gleichungen 5) aber diejenigen erfüllen, die aus 5) entstehen, wenn man die rechten Theile durch Null ersetzt, und von denen die anderen die Gleichungen 5) und 7), statt der Gleichungen 6) aber diejenigen erfüllen, die aus 6) entstehen, wenn man hier die rechten Theile durch Null ersetzt. Die erstgenannten Glieder sind von der Ordnung von iX_n, iY_n, iZ_n, die andern von der Ordnung von $i^2 X\mu$, $i^2 Y\mu$, $i^2 Z\mu$; diese sind also unendlich klein gegen jene, wenn wir annehmen, dass die Kräfte X, Y, Z nicht unendlich gross gegen die Druckkräfte X_n, Y_n, Z_n, sind, d. h. dass die relativen Verrückungen, die jene bei einem Körper, dessen Dimensionen alle endlich sind, hervorbringen, nicht unendlich gross sind gegen diejenigen, die bei demselben Körper diese erzeugen. Unter dieser Voraussetzung sind also für unsern unendlich kleinen Körper die Gleichungen 5) zu ersetzen durch diejenigen, die aus ihnen entstehen, wenn man X, Y, Z gleich Null setzt, die Gleichungen 1) also durch

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} &= 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Die durchgeführte Betrachtung zeigt zugleich, dass u, v, w von der Ordnung von iX_n, iY_n, iZ_n sind; von derselben Ordnung sind die

Differentialquotienten von u, v, w nach x', y', z', die Differentialquotienten von u, v, w nach x, y, z also von der Ordnung von X_n, Y_n, Z_n.

Auch für den Fall der Bewegung gelten diese Resultate, und die Gleichungen 8) treten an die Stelle der Gleichungen 1) der vorigen Vorlesung, vorausgesetzt, dass die Beschleunigungen $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ die Grenzen nicht überschreiten, die wir für die Kräfte X, Y, Z angenommen haben. Es folgt das daraus, dass, um vom Gleichgewicht zur Bewegung überzugehen, wir X, Y, Z zu ersetzen haben durch $X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $Y - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, $Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$.

§ 2.

Nun wollen wir annehmen, dass der Körper, um den es sich handelt, ein unendlich dünner, in seinem natürlichen Zustande cylindrischer Stab ist. Bei diesem Zustande denke man sich in dem Stabe ein rechtwinkliges Achsensystem; eine Achse soll die Linie sein, in der die Schwerpunkte der Querschnitte liegen, die beiden andern sollen parallel den Hauptachsen eines Querschnittes sein, die durch den Schwerpunkt desselben gehen. Auf der erstgenannten Achse wähle man einen Punkt P, nenne s den Abstand desselben von dem Anfange des Stabes und fasse drei Linienelemente ins Auge, welche von P aus in den Richtungen der drei Achsen gezogen sind; sie mögen 3, 1, 2 heissen und 3 soll dasjenige sein, welches die Richtung der Länge des Cylinders hat. Diese drei Linienelemente werden, wenn der Zustand des Stabes geändert ist, im Allgemeinen nicht mehr senkrecht auf einander stehen, sondern Winkel bilden, die von rechten um Grössen abweichen, die von der Ordnung der Dilatationen sind, die stattgefunden haben. Es soll die Lage der Punkte des Stabes in der Nähe von P auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen werden, dessen Anfangspunkt P ist, dessen z-Achse die Richtung des Linienelementes 3 hat, und dessen zx-Ebene durch die Linienelemente 2 und 1 hindurchgeht. In Bezug auf dieses Coordinatensystem seien $x + u$, $y + v$, $z + w$ die Coordinaten eines Punktes des Stabes nach der Veränderung, x, y, z die Coordinaten desselben Punktes, wenn der Stab in seinem natürlichen Zustande und in der Lage sich befindet, bei der die Linienelemente 1, 2, 3 in die Achsen der x, y, z fallen. Bei diesen Festsetzungen gelten die Gleichungen 3) oder die Gleichungen 11) der vorigen Vorlesung, wie aus der Bemerkung hervorgeht, die bei diesen gemacht ist; für die Oberfläche des Stabes besteht eine Gleichung zwischen x und y; es ist

$$\int x\,dx\,dy = 0, \qquad \int y\,dx\,dy = 0, \qquad \int xy\,dx\,dy = 0, \tag{9}$$

wenn die Integrationen über den Querschnitt ausgedehnt werden; endlich ist jeder materielle Punkt des Stabes charakterisirt durch gewisse Werthe von x, y, und $s + z$.

Es seien ferner ξ, η, ζ die Coordinaten des Punktes P nach der Formänderung des Stabes in Bezug auf ein beliebig im Raume gewähltes Coordinatensystem, das die Eigenschaft haben möge, dass durch Drehung die Achsen der x, y, z parallel den Achsen der ξ, η, ζ gemacht werden können;

$$\begin{matrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3 \end{matrix}$$

seien die Cosinus der Winkel, die die Achsen der ξ, η, ζ mit den Achsen der x, y, z bilden, so dass die Indices 1, 2, 3 sich auf die Achsen der x, y, z resp. beziehen. Diese 9 Grössen, so wie ξ, η, ζ, sind im Falle des Gleichgewichtes Functionen der einen Variabeln s, im Falle der Bewegung Functionen von s und t.

Bei diesen Bezeichnungen sind

$$\begin{aligned} &\xi + \alpha_1 (x + u) + \alpha_2 (y + v) + \alpha_3 (z + w) \\ &\eta + \beta_1 (x + u) + \beta_2 (y + v) + \beta_3 (z + w) \\ &\zeta + \gamma_1 (x + u) + \gamma_2 (y + v) + \gamma_3 (z + w) \end{aligned} \tag{10}$$

die Coordinaten in Beziehung auf die Achsen der ξ, η, ζ des Punktes, dessen Coordinaten in Beziehung auf die Achsen der x, y, z sind $x + u$, $y + v$, $z + w$. Die Ausdrücke 10) müssen Functionen von $s + z$ sein, da die Werthe von $s + z$, x und y einen materiellen Punkt des Stabes bestimmen; die partiellen Differentialquotienten dieser Ausdrücke nach z und nach s müssen daher einander gleich sein. Es ist also

$$\begin{aligned} \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial z} + \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial z} + \alpha_3 \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) &= \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial s} + \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial s} + \alpha_3 \frac{\partial w}{\partial s} \\ &\quad + \frac{d\xi}{ds} + \frac{d\alpha_1}{ds}(x + u) + \frac{d\alpha_2}{ds}(y + v) + \frac{d\alpha_3}{ds}(z + w) \\ \beta_1 \frac{\partial u}{\partial z} + \beta_2 \frac{\partial v}{\partial z} + \beta_3 \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) &= \beta_1 \frac{\partial u}{\partial s} + \beta_2 \frac{\partial v}{\partial s} + \beta_3 \frac{\partial w}{\partial s} \\ &\quad + \frac{d\eta}{ds} + \frac{d\beta_1}{ds}(x + u) + \frac{d\beta_2}{ds}(y + v) + \frac{d\beta_3}{ds}(z + w) \\ \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial z} + \gamma_2 \frac{\partial z}{\partial v} + \gamma_3 \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) &= \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial s} + \gamma_2 \frac{\partial v}{\partial s} + \gamma_3 \frac{\partial w}{\partial s} \\ &\quad + \frac{d\zeta}{ds} + \frac{d\gamma_1}{ds}(x + u) + \frac{d\gamma_2}{ds}(y + v) + \frac{d\gamma_3}{ds}(z + w). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen multiplicire man der Reihe nach mit α_1, β_1, γ_1,

mit α_2, β_2, γ_2, mit α_3, β_3, γ_3 und addire sie jedesmal. Dabei setze man

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{ds}\right)^2} - 1; \tag{11}$$

da nach den gemachten Festsetzungen

$$\frac{d\xi}{ds} : \frac{d\eta}{ds} : \frac{d\zeta}{ds} = \alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3$$

ist, so folgt hieraus

$$\frac{d\xi}{ds} = \alpha_3 (1 + \sigma), \qquad \frac{d\eta}{ds} = \beta_3 (1 + \sigma), \qquad \frac{d\zeta}{ds} = \gamma_3 (1 + \sigma) \tag{12}$$

und es ist σ die Dilatation, die das Element ds erfahren hat; man setze ferner

$$\begin{aligned} p &= \alpha_3 \frac{d\alpha_2}{ds} + \beta_3 \frac{d\beta_2}{ds} + \gamma_3 \frac{d\gamma_2}{ds} \\ q &= \alpha_1 \frac{d\alpha_3}{ds} + \beta_1 \frac{d\beta_3}{ds} + \gamma_1 \frac{d\gamma_3}{ds} \\ r &= \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds} + \beta_2 \frac{d\beta_1}{ds} + \gamma_2 \frac{d\gamma_1}{ds}. \end{aligned} \tag{13}$$

Vergleichen wir diese Ausdrücke mit den in den Gleichungen 19) der fünften Vorlesung gleich p', q', r' gesetzten und erinnern uns an die Bedeutung, die dort für p', q', r' sich ergab, so sehen wir, dass pds, qds, rds die Winkel sind, um welche das Achsensystem der x, y, z um die Achsen der x, y, z gedreht wird, wenn sein Anfangspunkt das Element ds durchläuft. Es heisst rds die *Torsion* des dem Elemente ds entsprechenden Theiles des Stabes, und p, q sind die reciproken Krümmungsradien der Projectionen des Elementes ds auf die yz- und die xz-Ebene.

Mit Hülfe der 6 Relationen, die zwischen den Cosinus α, β, γ bestehen, und derjenigen, die durch Differentiation nach s aus diesen sich ergeben, erhält man dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial s} + q(z + w) - r(y + v) \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\partial v}{\partial s} + r(x + u) - p(z + w) \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial s} + p(y + v) - q(x + u) + \sigma. \end{aligned}$$

Gestützt auf die am Ende des vorigen § gemachte Bemerkung nehmen wir an, dass $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$ unendlich gross gegen u, v, w sind, wenn wir dem z nur Werthe geben, die von der Ordnung der Dimensionen des Querschnittes des Stabes sind. Ferner nehmen wir an, dass $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial v}{\partial s}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$ von derselben Grössenordnung wie u, v, w

sind. Benützen wir ausserdem, dass u, v, w unendlich klein gegen x, y, z sind, so werden die abgeleiteten Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial z} = qz - ry$$
$$\frac{\partial v}{\partial z} = rx - pz$$
$$\frac{\partial w}{\partial z} = py - qx + \sigma.$$

Durch Integration folgt hieraus

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \frac{q}{2} z^2 - ryz \\ v &= v_0 + rxz - \frac{p}{2} z^2 \\ w &= w_0 + (py - qx + \sigma) z, \end{aligned} \tag{14}$$

wo u_0, v_0, w_0 Functionen von x und y bedeuten, nämlich die Werthe, die u, v, w für $z = 0$ erhalten. Diese Functionen finden ihre Bestimmung durch die Gleichungen 8), 2) und 3).

Die für u, v, w gefundenen Ausdrücke ergeben

$$\begin{aligned} x_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} & y_z &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + rx \\ y_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} & z_x &= \frac{\partial w_0}{\partial x} - ry \\ z_z &= py - qx + \sigma & x_y &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}. \end{aligned} \tag{15}$$

Alle diese Werthe sind unabhängig von z; in Folge hiervon vereinfachen sich die Gleichungen 8) in

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Wir wollen annehmen, dass auf die ursprünglich cylindrische Oberfläche des Stabes keine Drucke wirken, und unter g die Function von x und y verstehen, die, gleich Null gesetzt, die Gleichung der Grenzlinie des Querschnittes bildet; die Gleichungen 2) geben dann für $g = 0$

$$\begin{aligned} X_x \frac{\partial g}{\partial x} + X_y \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ Y_x \frac{\partial g}{\partial x} + Y_y \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ Z_x \frac{\partial g}{\partial x} + Z_y \frac{\partial g}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Von den Gleichungen 3) endlich werden zwei identisch erfüllt, die andern erfordern, dass für $x = 0$ und $y = 0$

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 0, \quad \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0 \qquad 18)$$

ist.

Die Gleichungen 17) haben wir aus der Voraussetzung abgeleitet, dass die Drucke, die auf die Mantelfläche des Stabes wirken, gleich Null sind. Dieselben Gleichungen dürfen wir aber auch beibehalten, wenn diese Drucke irgend welche Werthe haben, die nur gewisse Grenzen nicht übersteigen. Sie müssen solche Werthe haben, dass Drucke von ihrer Grössenordnung bei einem Körper, dessen Dimensionen alle von gleicher Ordnung sind, nur Dilatationen hervorbringen, die unendlich klein gegen die durch 15) bestimmten Dilatationen sind. Indem man die Grössen, die die rechten Seiten der Gleichungen 17) bilden sollten, vernachlässigt, vernachlässigt man dann nur Grössen, die gegen die einzelnen Terme, welche die linken Seiten zusammensetzen, unendlich klein sind.

Setzt man in den Gleichungen 16) und 17) für X_x, X_y, . . ihre Ausdrücke durch x_x, x_y, . . und für diese Grössen die in 15) angegebenen Werthe, so bestimmen die Gleichungen 16), 17) und 18) die Grössen u_0, v_0, w_0 eindeutig als lineare homogene Functionen von p, q, r, σ. Um diese Behauptung zu beweisen, hat man zu zeigen, dass die genannten Gleichungen, wenn p, q, r, σ verschwinden, nur erfüllt werden können durch $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, $w_0 = 0$; und das gelingt durch Betrachtungen, die denen ganz ähnlich sind, durch welche im § 2 der vorigen Vorlesung ein ähnlicher Satz bewiesen ist. Sind u_0, v_0, w_0 auf die genannte Weise ausgedrückt, so ergeben die Gleichungen 15) x_x, x_y, . . als lineare homogene Functionen von p, q, r, σ; eben solche Functionen werden die Druckcomponenten X_x, X_y, . ., und f wird eine homogene Function zweiten Grades derselben 4 Elemente.

Wir wollen hier eine Bemerkung anknüpfen, welche die Anwendbarkeit unserer Betrachtungen wesentlich erweitert. Wir denken uns den Stab aus seinem natürlichen, cylindrischen Zustande durch Kräfte, die auf sein Inneres, und Druckkräfte, die auf seine Endflächen wirken, einmal in einen, dann in einen andern Zustand übergeführt. Auf den zweiten dieser Zustände mögen sich die Zeichen x_x, x_y, . . p, q, r, σ beziehen, auf den ersten die Zeichen x_x', x_y', . . p', q', r', σ'. Wird der Stab aus dem ersten in den zweiten Zustand übergeführt, so bestimmen die Differenzen $x_x - x_x'$, $x_y - x_y'$, . . die dabei stattfindenden Dilatationen gerade so, wie x_x, x_y, . . selbst die Dilatationen bestimmen, die bei dem Uebergange des Stabes aus seinem cylindrischen Zustande in denjenigen, den wir den zweiten genannt haben, eintreten; das gilt auch, wenn

nicht der cylindrische, sondern der als der erste bezeichnete Zustand der natürliche ist, wenn der Stab also in seinem natürlichen Zustande so gekrümmt und tordirt ist, wie es den Werthen von p', q', r' entspricht. In diesem Falle sind daher die Druckcomponenten X_x, X_y, . . und die Grösse f dieselben Functionen von $x_x - x_x'$, $x_y - x_y'$, . . , wie in dem bisher betrachteten von x_x, x_y, . . . , und (da $x_x - x_x'$, $x_y - x_y'$, . . dieselben linearen Functionen von $p - p'$, $q - q'$, $r - r'$, $\sigma - \sigma'$ sind, wie x_x, x_y, . . von p, q, r, σ) dieselben Functionen von $p - p'$, $q - q'$, $r - r'$, $\sigma - \sigma'$, wie in dem bisher betrachteten Falle von p, q, r, σ. Diese Bemerkung ist namentlich dann von Wichtigkeit, wenn die Substanz des Stabes isotrop ist; mit Hülfe derselben kann man dann immer die Gleichungen des Gleichgewichtes und der Bewegung für einen unendlich dünnen Stab aufstellen, dessen Querschnitt überall dieselbe Gestalt hat, wenn er in seinem natürlichen Zustande beliebig gekrümmt und tordirt ist. Die Grösse, die wir mit σ' bezeichnet haben, kann dabei $= 0$ gesetzt werden.

§ 3.

Die Ausführung der Bestimmung von u_0, v_0, w_0 ist verhältnissmässig leicht, wenn der Querschnitt des Stabes eine Ellipse ist, welches auch die Constanten der Elasticität sein mögen. Setzen wir dieser Annahme entsprechend

$$g = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2};$$

die Gleichungen 16) und 17) (die letzteren nicht allein für $g = 0$, sondern allgemein) werden dann erfüllt durch

$$X_x = 0, \quad Y_y = 0, \quad X_y = 0$$

$$Z_x = c\,\frac{y}{b^2}, \quad Z_y = -c\,\frac{x}{a^2},$$

wo c eine willkürliche Constante bedeutet. Diese 5 Gleichungen in Verbindung mit der in 15) vorkommenden Gleichung

$$z_z = py - qx + \sigma$$

erlauben mit Hülfe der Relationen, die zwischen den 6 Grössen x_x, x_y, . . und den 6 Druckcomponenten X_x, X_y, . . bestehen, x_x, y_y, x_y, und z_x, z_y als lineare Functionen von x und y auszudrücken. Die 3 ersten von ihnen führen bei Rücksicht auf die Gleichungen 15) zur Bestimmung von u_0, v_0, die beiden letzten zur Bestimmung von w_0. Damit diese Bestimmungen möglich sind, muss

$$\frac{\partial^2 x_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 y_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 x_y}{\partial x\,\partial y}$$

und

$$\frac{\partial y_z}{\partial x} - \frac{\partial x_z}{\partial y} = 2r$$

sein; die erste von diesen Gleichungen, die aus Betrachtungen sich ergiebt, die denjenigen ganz ähnlich sind, durch welche wir die Gleichungen 13) und 14) der vorigen Vorlesung abgeleitet haben, ist in Folge davon erfüllt, dass x_x, y_y, x_y linear in Bezug auf x und y sind; die zweite bestimmt die Grösse c. Die Integrationen, die ausgeführt werden müssen, um dann u_0 und v_0 zu berechnen, bringen 3 willkürliche Constanten mit sich, die Integration, die w_0 giebt, führt *eine* solche ein; diese Constanten sind gerade ausreichend, um die Gleichungen 18) zu erfüllen. So ergeben sich u_0, v_0, w_0 als Functionen zweiten Grades von x und y.

Eine Vereinfachung in der Bestimmung von u_0, v_0, w_0 tritt bei beliebiger Gestalt des Querschnittes ein, wenn die Ebene desselben eine Symmetrie-Ebene ist. In diesem Falle hat man nach der Gleichung 5) der vorigen Vorlesung

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2} X_x &= a_{11} x_x + a_{12} y_y + a_{13} z_z + a_{16} x_y \\
\tfrac{1}{2} Y_y &= a_{21} x_x + a_{22} y_y + a_{23} z_z + a_{26} x_y \\
\tfrac{1}{2} Z_z &= a_{31} x_x + a_{32} y_y + a_{33} z_z + a_{36} x_y \\
\tfrac{1}{2} X_y &= a_{61} x_x + a_{62} y_y + a_{63} z_z + a_{66} x_y \\
\tfrac{1}{2} Z_y &= a_{44} z_y + a_{45} z_x \\
\tfrac{1}{2} Z_x &= a_{54} z_y + a_{55} z_x ,
\end{aligned}$$

wo

$$a_{12} = a_{21}, \quad a_{13} = a_{31}, \quad . \; . \; .$$

Bei Rücksicht auf die Gleichungen 15) wird hiernach die letzte der Gleichungen 16)

$$a_{55} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2 a_{45} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \, \partial y} + a_{44} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0 \tag{19}$$

und die letzte der Gleichungen 17)

$$\begin{aligned}
&\left(a_{54}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + r x\right) + a_{55}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} - r y\right)\right) \frac{\partial g}{\partial x} \\
&+ \left(a_{44}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + r x\right) + a_{45}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} - r y\right)\right) \frac{\partial g}{\partial y} = 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

Aus diesen beiden Gleichungen und der dritten der Gleichungen 18) ist w_0 zu bestimmen. Die übrigen der Gleichungen 16), 17) und 18) dienen zur Bestimmung von u_0 und v_0; man genügt ihnen, indem man

$$X_x = 0, \quad Y_y = 0, \quad X_y = 0 \tag{20a}$$

setzt. Löst man nämlich diese Gleichungen nach x_x, y_y, x_y auf, so erhält man für diese Grössen, indem man für z_z seinen Werth aus 15) setzt, lineare Ausdrücke von x und y; in Folge hiervon ist es möglich u_0 und v_0 den Gleichungen

$$x_x = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad y_y = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad x_y = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}$$

gemäss zu bestimmen; die Integration dieser führt 3 willkürliche Constanten ein, durch die man die noch zu berücksichtigenden der Gleichungen 18) erfüllen kann.

§ 4.

Sind u_0, v_0, w_0 gefunden, so handelt es sich darum, p, q, r, σ im Falle des Gleichgewichts als Functionen von s, im Falle der Bewegung als Functionen von s und t zu bestimmen. Zu diesem Zwecke kann im ersten Falle das Princip der virtuellen Verrückungen, im zweiten das Hamilton'sche Princip dienen. In beiden ist es dann zunächst erforderlich, einen Ausdruck für das Potential der durch die Dilatationen erzeugten Kräfte aufzustellen. Bezeichnet f dieselbe homogene Function zweiten Grades von x_x, x_y, . ., wie früher, so ist dieses Potential

$$=\int f\,dx\,dy\,ds\,,$$

wo die Integration nach x und y über den Querschnitt, nach s über die Länge des Stabes auszudehnen ist. Hier setze man für x_x, y_y, . . ihre Werthe aus 15); da diese Werthe lineare homogene Functionen von p, q, r, σ sind, so ist f eine homogene Function zweiten Grades von p, q, r, σ; die Coefficienten hängen nur von x und y ab. Nun mache man

$$F=\int f\,dx\,dy\,, \tag{21}$$

dann ist F eine homogene Function zweiten Grades von p, q, r, σ mit constanten Coefficienten und jenes Potential ist

$$=\int F\,ds\,.$$

Bezeichnet man durch U' die Arbeit der Kräfte, die auf das Innere, und der Druckkräfte, die auf die Mantelfläche und die Endflächen des Stabes wirken, für gewisse Variationen von p, q, r, σ, durch T die lebendige Kraft, so ist also die Bedingung für das Gleichgewicht

$$U'+\delta\int F\,ds=0, \tag{22}$$

und für die Bewegung gilt die Gleichung

$$\int dt\left(U'+\delta T+\delta\int F\,ds\right)=0. \tag{23}$$

Um den Werth von T zu bilden, haben wir die Ausdrücke 10) nach t zu differentiiren, die Summe der Quadrate der Differentialquotienten mit dem halben Elemente der Masse des Stabes zu multipliciren und über diesen zu integriren. Wir vernachlässigen dabei $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ als unendlich klein gegen Glieder, die damit additiv verbunden auftreten, und setzen $z=0$, was erlaubt ist, da

die Ausdrücke 10) Functionen von $s + z$ sind, und wir s als variabel betrachten. Die Differentialquotienten dieser Ausdrücke sind dann

$$\begin{gathered}\frac{\partial \xi}{\partial t} + x \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + y \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + x \frac{\partial \beta_1}{\partial t} + y \frac{\partial \beta_2}{\partial t} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + x \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + y \frac{\partial \gamma_2}{\partial t}.\end{gathered}$$

Die Summe der Quadrate dieser Ausdrücke, mit $dx\,dy$ multiplicirt und über den Querschnitt des Stabes integrirt, ist in Folge der Gleichungen 9)

$$\begin{aligned}&\left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2\right)\int dx\,dy \\ &+ \left(\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial t}\right)^2\right)\int x^2 dx\,dy \\ &+ \left(\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta_2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial t}\right)^2\right)\int y^2 dx\,dy.\end{aligned} \tag{24}$$

Nun setze man

$$\begin{aligned}-P &= \alpha_2 \frac{\partial \alpha_3}{\partial t} + \beta_2 \frac{\partial \beta_3}{\partial t} + \gamma_2 \frac{\partial \gamma_3}{\partial t} \\ Q &= \alpha_1 \frac{\partial \alpha_3}{\partial t} + \beta_1 \frac{\partial \beta_3}{\partial t} + \gamma_1 \frac{\partial \gamma_3}{\partial t} \\ R &= \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \beta_2 \frac{\partial \beta_1}{\partial t} + \gamma_2 \frac{\partial \gamma_1}{\partial t}.\end{aligned} \tag{25}$$

Aus den Gleichungen, die dann nach dem Muster der Gleichungen 20) der fünften Vorlesung gebildet werden können, ergiebt sich

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial t}\right)^2 &= Q^2 + R^2 \\ \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta_2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial t}\right)^2 &= P^2 + R^2.\end{aligned}$$

Man erwäge nun, dass den Gleichungen 12) zufolge $\frac{\partial \alpha_3}{\partial t}, \frac{\partial \beta_3}{\partial t}, \frac{\partial \gamma_3}{\partial t}$ nicht unendlich gross gegen $\frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial \zeta}{\partial t}$ sein können, vorausgesetzt, dass die Differentialquotienten dieser Grössen nach s nicht unendlich gross gegen sie sind. Daraus folgt, dass P und Q nicht unendlich gross gegen $\frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial \zeta}{\partial t}$ sein können, während das Entsprechende in Bezug auf R sich nicht behaupten lässt. Bedenkt man endlich, dass von den 3 Integralen, die in dem Ausdrucke 24) vorkommen, die beiden letzten unendlich klein gegen das erste sind, so sieht man, dass dieser Ausdruck

$$= \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2\right)\int dx\,dy + R^2 \int (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

ist. Macht man

$$\int dx\,dy = \lambda, \qquad \int (x^2 + y^2)\,dx\,dy = \varkappa \tag{26}$$

und bezeichnet wieder durch μ die Dichtigkeit, so ist daher

$$T = \frac{\mu}{2}\int ds \left\{ \lambda \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2 \right) + \varkappa R^2 \right\} \cdot \tag{27}$$

§ 5.

Wir wollen nun das Gleichgewicht des Stabes unter der Voraussetzung näher untersuchen, dass auf seine Theile keine Kräfte und nur auf seine Endflächen Druckkräfte wirken. Statt aber von dem Princip der virtuellen Verrückungen dabei Gebrauch zu machen, wollen wir unmittelbar anknüpfen an die Definition des Druckes, die durch die Gleichungen 1) und 2) der eilften Vorlesung gegeben ist. Wir wenden diese auf den Theil des Stabes zwischen zwei beliebigen Querschnitten an. Bezeichnen wir durch A, B, Γ die Summen der Componenten nach den Achsen der ξ, η, ζ der Drucke, welche in den Elementen des Querschnitts, der durch einen beliebigen Werth von s bestimmt ist, von *dem* Theile des Stabes, in dem s kleinere Werthe hat, auf denjenigen ausgeübt werden, in dem s grössere Werthe besitzt, und durch M_α, M_β, M_γ die Drehungsmomente derselben Drucke in Bezug auf dieselben Achsen, so erhalten wir in Folge der Voraussetzung, dass Gleichgewicht besteht und keine Kräfte auf das Innere des Stabes wirken,

$$A = \text{const.} \qquad B = \text{const.} \qquad \Gamma = \text{const.}$$
$$M_\alpha = \text{const.} \qquad M_\beta = \text{const.} \qquad M_\gamma = \text{const.}$$

Ist für das eine Ende des Stabes $s = 0$, für das andere $s = l$ und l positiv, so sind hiernach A, B, Γ, M_α, M_β, M_γ gleich den Componentensummen und Drehungsmomenten der Drucke, die auf die Elemente des Querschnitts $s = 0$ von Aussen ausgeübt werden; dieselbe Bedeutung haben $-A$, $-B$, $-\Gamma$, $-M_\alpha$, $-M_\beta$, $-M_\gamma$ für das andere Ende.

Wir wollen nun die Drehungsmomente derselben Drucke, von denen M_α, M_β, M_γ herrühren, in Bezug auf die Achsen der x, y, z, die dem gewählten Werthe von s entsprechen, einführen und durch M_x, M_y, M_z bezeichnen. Zugleich wählen wir (was immer möglich ist) die ζ-Achse so, dass $A = 0$, $B = 0$ und Γ negativ oder $= 0$ ist. Den in § 4 der fünften Vorlesung abgeleiteten Relationen zufolge ist dann

$$\begin{aligned} M_\alpha &= \alpha_1 M_x + \alpha_2 M_y + \alpha_3 M_z + \eta\Gamma = \text{const.} \\ M_\beta &= \beta_1 M_x + \beta_2 M_y + \beta_3 M_z - \xi\Gamma = \text{const.} \\ M_\gamma &= \gamma_1 M_x + \gamma_2 M_y + \gamma_3 M_z \qquad\;\; = \text{const.} \end{aligned} \tag{28}$$

Diese Gleichungen differentiire man nach s, multiplicire sie mit α_1, β_1, γ_1 oder α_2, β_2, γ_2 oder α_3, β_3, γ_3 und addire sie jedesmal. Bei Rücksicht auf die Relationen, die zwischen diesen 9 Cosinus bestehen, und auf die Gleichungen 12) und 13) ergiebt sich so

$$\begin{aligned} \frac{dM_x}{ds} &= rM_y - qM_z + \gamma_2 \Gamma \\ \frac{dM_y}{ds} &= pM_z - rM_x - \gamma_1 \Gamma \\ \frac{dM_z}{ds} &= qM_x - pM_y . \end{aligned} \tag{29}$$

Wir leiten nun ab, in welcher Beziehung die Drehungsmomente M_x, M_y, M_z zu der im vorigen § besprochenen Function F stehen. Zu diesem Zwecke betrachten wir den Zuwachs δf, den f erfährt, wenn der Zustand des Stabes in der Nähe des einem constanten Werthe von s entsprechenden Querschnitts so geändert wird, dass p, q, r, σ um δp, δq, δr, $\delta\sigma$ wachsen. Zunächst hat man

$$\delta f = X_x \delta x_x + Y_y \delta y_y + Z_z \delta z_z + Y_z \delta y_z + Z_x \delta z_x + X_y \delta x_y ,$$

da X_x, Y_y, .. die partiellen Differentialquotienten von f nach x_x, y_y, .. sind. Mit Hülfe der Gleichungen 15) erhält man hieraus

$$\begin{aligned} \delta f = X_x \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} + Y_y \delta \frac{\partial v_0}{\partial y} + Z_z \left(y\,\delta p - x\,\delta q + \delta\sigma \right) \\ + Y_z \left(\delta \frac{\partial w_0}{\partial y} + x\,\delta r \right) + Z_x \left(\delta \frac{\partial w_0}{\partial x} - y\,\delta r \right) + X_y \delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) . \end{aligned}$$

Diese Gleichung multiplicire man mit $dx\,dy$ und integrire über den Querschnitt des Stabes. Die linke Seite derselben ist nach 21) dann δF; die rechte transformire man mit Hülfe der Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = \int dx\,dy \Big\{ X_x \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} + Y_y \delta \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ + Y_z \delta \frac{\partial w_0}{\partial y} + Z_x \delta \frac{\partial w_0}{\partial y} + X_y \delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \Big\} , \end{aligned}$$

die man durch partielle Integrationen bei Rücksicht auf die Gleichungen 17), in denen $\cos(nx)$ und $\cos(ny)$ für $\frac{\partial g}{\partial x}$ und $\frac{\partial g}{\partial y}$ geschrieben werden können, erhält, wenn man die Gleichungen 16) mit $dx\,dy\,\delta u_0$, $dx\,dy\,\delta v_0$, $dx\,dy\,\delta w_0$ multiplicirt, addirt und über den Querschnitt integrirt. Setzt man

$$\begin{aligned} Z &= \int dx\,dy\,Z_z \\ M_x &= \int dx\,dy\,y\,Z_z \\ M_y &= -\int dx\,dy\,x\,Z_z \\ M_z &= \int dx\,dy\,(x\,Y_z - y\,X_z) , \end{aligned}$$

wobei Z die Componente der Kraft Γ nach der z-Achse bezeichnet und M_x, M_y, M_z die Bedeutung haben, in der sie in den Gleichungen 28) und 29) gebraucht sind, so erhält man dadurch

$$\delta F = M_x \delta p + M_y \delta q + M_z \delta r + Z \delta \sigma,$$

woraus folgt

$$\frac{\partial F}{\partial p} = M_x, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = M_y, \quad \frac{\partial F}{\partial r} = M_z, \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma} = Z. \qquad 30)$$

Es ist $2F$ eine homogene Function zweiten Grades von p, q, r, σ, deren Coefficienten von den Constanten der Elasticität und den Constanten des Querschnitts des Stabes abhängen; man hat daher

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \sigma} &= \gamma_3 \Gamma = A_{00}\sigma + A_{01}p + A_{02}q + A_{03}r \\
\frac{\partial F}{\partial p} &= M_x = A_{10}\sigma + A_{11}p + A_{12}q + A_{13}r \\
\frac{\partial F}{\partial q} &= M_y = A_{20}\sigma + A_{21}p + A_{22}q + A_{23}r \\
\frac{\partial F}{\partial r} &= M_z = A_{30}\sigma + A_{31}p + A_{32}q + A_{33}r,
\end{aligned} \qquad 31)$$

wo A_{00}, A_{01}, $= A_{10}$, A_{11}, . . die genannten Coefficienten sind. Es sind diese nicht alle von derselben Grössenordnung. Da σ eine reine Zahl ist, p, q, r aber reciproke Längen sind, so müssen die A, welche einmal den Index 0 haben, eine Dimension weniger enthalten, als diejenigen, bei welchen der Index 0 nicht vorkommt, und eine Dimension mehr, als A_{00}; die Längen, welche in den Ausdrücken der Grössen A vorkommen, sind aber von der Ordnung der Dimensionen des Querschnitts des Stabes, also unendlich klein; es müssen daher A_{01}, A_{02}, A_{03} unendlich klein gegen A_{00} und unendlich gross gegen die andern A sein; aus diesem Grunde dürfen die mit σ behafteten Glieder in 31) nicht vernachlässigt werden, obwohl σ unendlich klein ist, p, q, r aber als endlich angesehen werden sollen. Aus der ersten der Gleichungen 31) folgt

$$\sigma = -\frac{A_{01}p + A_{02}q + A_{03}r - \gamma_3\Gamma}{A_{00}}; \qquad 32)$$

setzt man diesen Werth von σ in die für M_x, M_y, M_z in 31) angegebenen Ausdrücke und nimmt an, dass Γ nicht unendlich gross gegen M_x, M_y, M_z ist, so folgt aus den oben angeführten Verhältnissen zwischen den Grössen A, dass die dann auftretenden, von Γ abhängenden Glieder als unendlich klein gegen M_x, M_y, M_z vernachlässigt werden können. So ergeben sich diese Drehungsmomente als lineare homogene Functionen von p, q, r. Es lassen dieselben sich folgendermassen darstellen: Es sei G die Function von p, q, r,

in welche F übergeht, wenn man hier σ mit Hülfe der Gleichung $\frac{\partial F}{\partial \sigma} = 0$ durch p, q, r ausdrückt; dann ist

$$M_x = \frac{\partial G}{\partial p}, \quad M_y = \frac{\partial G}{\partial q}, \quad M_z = \frac{\partial G}{\partial r}. \tag{33}$$

In der That wird, wenn σ aus $\frac{\partial F}{\partial \sigma} = 0$ durch p, q, r ausgedrückt wird,

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{\partial G}{\partial p},$$

da, wenn G dadurch aus F abgeleitet würde, dass man eine beliebige Function von p, q, r für σ setzte,

$$\frac{\partial G}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial p}$$

wäre; und ähnlich verhält es sich mit den entsprechenden Differentialquotienten nach q und r. Die Gleichungen 29) werden daher

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} \frac{\partial G}{\partial p} &= r \frac{\partial G}{\partial q} - q \frac{\partial G}{\partial r} + \Gamma \gamma_2 \\
\frac{d}{ds} \frac{\partial G}{\partial q} &= p \frac{\partial G}{\partial r} - r \frac{\partial G}{\partial p} - \Gamma \gamma_1 \\
\frac{d}{ds} \frac{\partial G}{\partial r} &= q \frac{\partial G}{\partial p} - p \frac{\partial G}{\partial q}.
\end{aligned} \tag{34}$$

Diese Gleichungen, in denen G eine homogene Function zweiten Grades von p, q, r mit constanten Coefficienten bedeutet, haben dieselbe Form wie die Gleichungen 17) der siebenten Vorlesung, welche sich auf die Rotation eines schweren, starren Körpers um einen festen Punkt beziehen; sie stimmen mit diesen völlig überein, wenn man $s = t$, $G = T$ und $-\Gamma =$ dem Producte aus dem Gewichte des Körpers in den Abstand seines Schwerpunktes von dem festen Punkte setzt. Auch die Bedeutung der 9 Cosinus α, β, γ und der Grössen p, q, r wird dabei, hier und dort, dieselbe. Da dort als z-Achse die von dem festen Punkte durch den Schwerpunkt gezogene Linie gewählt war, hier aber die z-Achse die Tangente des Stabes ist, so giebt es daher stets einen schweren starren, um einen festen Punkt rotirenden Körper, der dem Stabe in der Art entspricht, dass die durch den festen Punkt und den Schwerpunkt gehende Linie immer der Tangente des Stabes parallel ist, wenn $s = t$ angenommen wird. Ist das Rotationsproblem gelöst, so hat man, um die Gestalt des Stabes kennen zu lernen, noch die Gleichungen

$$\xi = \int \alpha_3 ds, \quad \eta = \int \beta_3 ds, \quad \zeta = \int \gamma_3 ds \tag{34a}$$

zu bilden.

§ 6.

Das Problem der Rotation eines schweren Körpers um einen festen Punkt ist, wie in der siebenten Vorlesung auseinander gesetzt, nicht allgemein lösbar; ein Fall, in dem es gelöst werden kann, ist der, dass die Schwere nicht wirkt; diesem Falle entspricht hier der, dass $\Gamma = 0$ ist, d. h. dass die Summe der Componenten nach irgend einer Richtung der Druckkräfte verschwindet, die auf die Elemente eines Endes des Stabes ausgeübt werden. Ein anderer Fall, in dem das Rotationsproblem gelöst worden ist, ist der, dass die Schwere wirkt, der Körper aber ein Rotationskörper und der feste Punkt ein Punkt der Rotationsachse ist; diesem Falle entspricht hier der, dass zwischen den Constanten der Elasticität des Stabes und den Constanten seines Querschnitts gewisse Beziehungen bestehen. Diese Beziehungen bestehen, wie wir nun zeigen wollen, wenn die Substanz des Stabes isotrop und sein Querschnitt ein Kreis ist.

Für einen isotropen Körper ist nach § 1 der vorigen Vorlesung

$$f = -K\Big\{x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \tfrac{1}{2}y_z^2 + \tfrac{1}{2}z_x^2 + \tfrac{1}{2}x_y^2 + \theta(x_x + y_y + z_z)^2\Big\}.$$

Aus den Gleichungen 20a) folgt daher

$$x_x = y_y = -\frac{\theta}{1+2\theta}z_z, \quad x_y = 0.$$

Die Gleichungen 19) und 20) werden

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0 \tag{35}$$

und für $g = 0$

$$\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} - ry\right)\frac{\partial g}{\partial x} + \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + rx\right)\frac{\partial g}{\partial y} = 0. \tag{36}$$

Der Querschnitt des Stabes soll ein Kreis sein; wir haben daher

$$g = x^2 + y^2 - \text{const.}$$

zu setzen. Bei diesem Werthe von g folgt aus 35), 36) und 18)

$$w_0 = 0.$$

Die Gleichungen 15) geben daher

$$z_z = py - qx + \sigma, \quad y_z = rx, \quad x_z = -ry.$$

Es ist also

$$f = -K\left(\frac{1+3\theta}{1+2\theta}(py - qx + \sigma)^2 + \tfrac{1}{2}r^2(x^2 + y^2)\right)$$

und nach 21), wenn man die durch 26) definirten Zeichen $\varkappa$, λ benutzt,

$$F = -K\left(\frac{1+3\theta}{1+2\theta}\,\frac{\varkappa}{2}\,(p^2+q^2) + \frac{\varkappa}{2}\,r^2 + \frac{1+3\theta}{1+2\theta}\,\lambda\sigma^2\right).$$

Hiernach erhält man endlich für die bei 33) definirte Function G

$$G = -K\frac{\varkappa}{2}\left(\frac{1+3\theta}{1+2\theta}\,(p^2+q^2) + r^2\right). \tag{37}$$

Hierdurch ist die oben ausgesprochene Behauptung bewiesen, dass für den isotropen Stab von kreisförmigem Querschnitt G dieselbe Function von p, q, r ist, wie die lebendige Kraft für einen Rotationskörper, der um einen Punkt seiner Symmetrie-Achse rotirt, und es ist gezeigt, dass die allgemeine Lösung der Gleichungen 34) für einen Stab der genannten Art auf demselben Wege gefunden werden kann, der für das entsprechende Rotationsproblem im § 4 der siebenten Vorlesung angegeben ist.

Wir wollen uns darauf beschränken, die Lösung für einen speciellen Fall wirklich zu bilden. Wir setzen

$$A_{11} = -K\varkappa\,\frac{1+3\theta}{1+2\theta}, \quad A_{33} = -K\varkappa, \tag{38}$$

und führen die durch die Gleichungen 8) der fünften Vorlesung definirten Winkel ϑ, φ, f ein, wodurch das Zeichen f eine andere Bedeutung erhält, als diejenige, in der wir es bisher in unseren jetzigen Untersuchungen gebraucht haben. Die Gleichungen 34) werden dann

$$\begin{aligned} A_{11}\frac{dp}{ds} &= rq\,(A_{11}-A_{33}) + \Gamma\sin f\sin\vartheta \\ A_{11}\frac{dq}{ds} &= rp\,(A_{33}-A_{11}) - \Gamma\cos f\sin\vartheta \\ \frac{dr}{ds} &= 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Zu diesen fügen wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{ds} &= p\sin f - q\cos f \\ \sin\vartheta\,\frac{d\varphi}{ds} &= p\cos f + q\sin f \\ \frac{df}{ds} &= \cos\vartheta\,\frac{d\varphi}{ds} - r, \end{aligned} \tag{40}$$

welche aus den Gleichungen 21), 13) und 15) der siebenten Vorlesung bei Rücksicht auf die Gleichungen 8) der fünften sich ergeben, wenn man s statt t schreibt. Wir werden sehen, dass den Gleichungen 39) und 40) bei der Annahme

$$\vartheta = \text{const.}$$

genügt werden kann; die Lösung, die unter dieser Annahme gilt, ist eben diejenige, die wir bilden wollen; sie entspricht *der* Bewegung

eines um einen Punkt der Symmetrieachse rotirenden schweren Rotationskörpers, bei der diese Achse einen geraden Kegel um eine verticale Linie beschreibt. Ist ϑ constant, so ist die erste der Gleichungen 40)

$$0 = p \sin f - q \cos f,$$

wofür wir schreiben können

$$p = \sqrt{p^2 + q^2} \cos f, \quad q = \sqrt{p^2 + q^2} \sin f, \tag{41}$$

wo das Vorzeichen von $\sqrt{p^2 + q^2}$ unbestimmt bleibt. Hiernach geben die beiden ersten der Gleichungen 39), wenn man sie mit p und q multiplicirt und addirt,

$$p^2 + q^2 = \text{const.},$$

während aus der dritten immer

$$r = \text{const.}$$

folgt. Weiter ergeben dann die beiden letzten der Gleichungen 40), wenn man unter φ_0 und f_0 zwei willkürliche Constanten versteht,

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\sin \vartheta} s, \quad f - f_0 = \left(\frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\operatorname{tg} \vartheta} - r\right) s. \tag{42}$$

Es ist noch eine der beiden ersten der Gleichungen 39) zu erfüllen; setzt man in sie für p und q ihre Werthe aus 41), so verwandelt sie sich in eine Gleichung zwischen Constanten, nämlich in die Gleichung

$$0 = A_{11} \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\operatorname{tg} \vartheta} - A_{33} r + \Gamma \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{p^2 + q^2}}. \tag{43}$$

Um die Gestalt zu finden, die der Stab hat, wenn die aufgestellten Gleichungen gelten, hat man noch die Gleichungen 34a) zu entwickeln. Setzt man in diesen, den Gleichungen 8) der fünften Vorlesung gemäss

$$\alpha_3 = \cos \varphi \sin \vartheta, \quad \beta_3 = \sin \varphi \sin \vartheta, \quad \gamma_3 = \cos \vartheta,$$

macht bei der Berechnung von ξ und η nach 42)

$$ds = \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{p^2 + q^2}} d\varphi$$

und verfügt auf gewisse Weise über den Anfangspunkt der ξ, η, ζ, so erhält man

$$\xi = \frac{\sin^2 \vartheta}{\sqrt{p^2 + q^2}} \sin \varphi, \quad \eta = -\frac{\sin^2 \vartheta}{\sqrt{p^2 + q^2}} \cos \varphi, \quad \zeta = s \cos \vartheta. \tag{44}$$

Hiernach bildet der Stab eine *Schraubenlinie,* deren Achse die ζ-Achse ist; der Radius des Cylinders, auf dem sie liegt, ist

$$= \frac{\sin^2 \vartheta}{\sqrt{p^2 + q}}, \tag{45}$$

die Höhe eines Schraubenganges,

$$= \frac{2 \pi \sin \vartheta \cos \vartheta}{\sqrt{p^2 + q^2}}. \tag{46}$$

Was die Druckkräfte betrifft, die auf das Ende $s = 0$ des Stabes von Aussen ausgeübt werden müssen, damit dieser in der berechneten Gestalt, bei beliebig gegebenen Werthen der Constanten ϑ, $\sqrt{p^2 + q^2}$ und r im Gleichgewichte sei, so ist die Kraft Γ durch 43) bestimmt. Wir haben, um die Analogie zwischen dem Problem des Gleichgewichts eines elastischen Stabes und dem Problem der Rotation eines schweren Körpers vollständig zu machen, die ζ-Achse so gewählt, dass Γ, wenn es nicht verschwindet, negativ ist. Halten wir diese Annahme fest, so müssen wir es als eine Bedingung, der die Werthe von ϑ, $\sqrt{p^2 + q^2}$, r zu genügen haben, ansehen, dass die Gleichung 43) nicht einen positiven Werth für Γ ergiebt. Diese Bedingung fällt aber fort, wenn wir, was wir thun wollen, auf die Vollständigkeit jener Analogie verzichtend, positive und negative Werthe von Γ zulassen. Es bleibt noch übrig, die Drehungsmomente M_α, M , M_γ zu ermitteln. Aus 33), 37) und 38) findet man zunächst

$$M_x = A_{11} p, \quad M_y = A_{11} q, \quad M_z = A_{33} r,$$

wofür nach 41) sich schreiben lässt

$$M_x = A_{11} \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\sin \vartheta} \gamma_1, \quad M_y = A_{11} \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\sin \vartheta} \gamma_2,$$

$$M_z = A_{11} \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\sin \vartheta} \gamma_3 + A_{33} r - A_{11} \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\operatorname{tg} \vartheta}.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen 28), so findet man bei Rücksicht auf die Relationen, die zwischen den 9 Cosinus $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ bestehen, und auf die Gleichungen 43) und 44)

$$M_\alpha = 0, \quad M_\beta = 0$$

$$M_\gamma = A_{11} \sqrt{p^2 + q^2} \sin \vartheta + A_{33} r \cos \vartheta.$$

Ein specieller, hierher gehöriger Fall möge noch erwähnt werden. Besteht zwischen den Constanten ϑ, $\sqrt{p^2 + q^2}$, r die Relation

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{r}, \tag{47}$$

so ist f, wie aus 42) folgt, einer Constanten, nämlich f_0, gleich; nach 41) sind daher dann auch p und q, wie r, constant. Den 3 Grössen p, q, r kann man beliebige constante Werthe ertheilen, indem man über $\sqrt{p^2 + q^2}$, f_0, r passend verfügt; der Fall, dass p, q, r constant sind, ist also immer in dem vorher behandelten ein-

begriffen. Auch in ihm bildet der Stab eine Schraubenlinie; der Radius des Cylinders, auf dem sie liegt, ist

$$=\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{p^2+q^2+r^2},$$

die Höhe eines Schraubenganges

$$=\frac{2\pi r}{p^2+q^2+r^2},$$

wie aus den Ausdrücken 45) und 46) folgt, wenn man erwägt, dass aus 47)

$$\cos\vartheta=\frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\quad \sin\vartheta=\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} \tag{48}$$

sich ergiebt, wo das Vorzeichen der Wurzelgrösse $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ passend zu bestimmen ist.

§ 7.

Es soll nun ein Beispiel für das Gleichgewicht eines isotropen, im natürlichen Zustande *gekrümmten* Stabes behandelt werden. Nach der am Ende des § 2 gemachten Auseinandersetzung haben wir, um von dem Falle eines ursprünglich *geraden* zu dem eines ursprünglich *gekrümmten*, isotropen Stabes überzugehen, in dem Ausdrucke der Function f an Stelle von p, q, r zu setzen $p-p', q-q', r-r'$, wo p', q', r' die Werthe bezeichnen, die p, q, r erhalten, wenn der Stab aus einem Zustande, in dem er *gerade* ist, in seinen natürlichen Zustand übergeht. Nimmt man dieselbe Substitution bei F und G vor, so gelten auch dann alle Schlüsse, welche in den §§ 4 und 5 an die Function f geknüpft sind, und es behalten die Gleichungen 34) ihre Gültigkeit.

Ist der Querschnitt des Stabes ein Kreis, so treten daher an Stelle der Gleichungen 39) die folgenden

$$\begin{aligned}
A_{11}\frac{d(p-p')}{ds}&=A_{11}r(q-q')-A_{33}q(r-r')+\Gamma\sin f\sin\vartheta\\
A_{11}\frac{d(q-q')}{ds}&=A_{33}p(r-r')-A_{11}r(p-p')-\Gamma\cos f\sin\vartheta\\
A_{33}\frac{d(r-r')}{ds}&=A_{11}\Big(q(p-p')-p(q-q')\Big).
\end{aligned}\tag{49}$$

Dazu kommen ungeändert die Gleichungen 40).

Im Allgemeinen werden p', q', r' Functionen von s sein, die bedingt sind durch die ursprüngliche Gestalt des Stabes; wir wollen annehmen, dass sie constant sind, d. h. nach der am Ende des vorigen § gemachten Bemerkung, dass der Stab ursprünglich eine Schraubenlinie bildet. Wir wollen zeigen, dass den Gleichungen 49) und 40) sich dann durch die Annahme genügen lässt, dass auch

p, q, r constant sind, d. h. durch die Annahme, dass der Stab eine Schraubenlinie bleibt. Die letzte der Gleichungen 49) giebt bei dieser Annahme

$$\frac{p'}{p} = \frac{q'}{q}$$

und die beiden andern reduciren sich bei Rücksicht hierauf auf die eine

$$0 = A_{11} r \left(1 - \frac{p'}{p}\right) - A_{33} (r - r') + \frac{\Gamma}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}},$$

wenn man benutzt, dass nach 41) und 48)

$$\sin f \sin \vartheta = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \quad \cos f \sin \vartheta = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

ist. Die Gleichungen 40) aber werden erfüllt, wenn man

$$\cos \vartheta = \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

$$\varphi = \varphi_0 + s \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$$

$$\operatorname{tg} f = \frac{q}{p}$$

setzt, welche Gleichungen im vorigen § aus den Gleichungen 40) unter der Voraussetzung, dass ϑ und f constant sind, abgeleitet sind.

Weiter ergiebt sich dann

$$\xi = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{p^2 + p^2 + r^2} \sin \varphi, \quad \eta = - \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{p^2 + q^2 + r^2} \cos \varphi, \quad \zeta = \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} s$$

und, wenn man benutzt, dass

$$M_x = A_{11} (p - p'), \quad M_y = A_{11} (q - q'), \quad M_z = A_{33} (r - r')$$

ist,

$$M_\alpha = 0, \qquad M_\beta = 0,$$

$$M_\gamma = A_{11} \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \left(1 - \frac{p'}{p}\right) + A_{33} \frac{r (r - r')}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

Neunundzwanzigste Vorlesung.

(Unendlich kleine Formänderungen eines unendlich dünnen, ursprünglich cylindrischen Stabes. Biegung und Torsion für den Fall, dass der Stab isotrop und nicht gespannt ist. Arbeit der durch die Dilatationen erzeugten Kräfte für einen isotropen gespannten Stab. Biegung eines gespannten Stabes. Methode von s'Gravesande zur Bestimmung des Elasticitätscoefficienten von Drähten. Biegung eines horizontal ausgespannten Drahtes durch seine Schwere. Longitudinal- und Torsionsschwingungen eines Stabes. Transversalschwingungen eines ungespannten Stabes. Transversalschwingungen einer schwach gespannten und einer stark gespannten Saite.)

§ 1.

Es sollen nun Gleichgewicht und Bewegung eines cylindrischen, unendlich dünnen Stabes unter der Voraussetzung weiter untersucht werden, dass die Verschiebungen seiner Theile unendlich klein sind, dass also p, q und r unendlich klein sind. Wir fassen zuerst den Fall ins Auge, dass der Stab im Gleichgewichte ist und auf seine Theile keine Kräfte wirken. Dann gelten die Gleichungen 34) der vorigen Vorlesung. Da die Aenderungen, welche die 9 Cosinus α_1, β_1, . . auf der ganzen Länge des Stabes erfahren, unendlich klein sind, so können in ihnen γ_1 und γ_2 als constant angenommen werden, vorausgesetzt, dass sie selbst endlich sind, dass also die Richtungen der Theile des Stabes nicht bis auf unendlich kleine Unterschiede mit der Richtung der Kraft Γ übereinstimmen. Diesen Fall schliessen wir vorläufig aus. Wir können dann

$$\gamma_1 \Gamma = A, \qquad \gamma_2 \Gamma = B$$

setzen, indem wir unter A und B Constanten verstehen. Bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung werden die genannten Gleichungen dadurch

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial G}{\partial p} = B, \qquad \frac{d}{ds}\frac{\partial G}{\partial q} = -A, \qquad \frac{d}{ds}\frac{\partial G}{\partial r} = 0, \tag{1}$$

und diese Gleichungen gelten, welches auch das Coordinatensystem der ξ, η, ζ sein möge, obwohl die Gleichungen 34) eine gewisse Richtung der ζ-Achse voraussetzen; man sieht das ein, wenn man erwägt, dass die Grössen p, q, r ihrer Bedeutung nach von dem Achsensystem der ξ, η, ζ ganz unabhängig sind, ebenso wie die in der Function G vorkommenden Coefficienten. Durch Integration

dieser Gleichungen erhält man p, q, r als lineare Functionen von s ausgedrückt, die drei willkürliche Constanten enthalten; diese lassen sich durch die Werthe bestimmen, die $\frac{\partial G}{\partial p}, \frac{\partial G}{\partial q}, \frac{\partial G}{\partial r}$, d. h. die Drehungsmomente M_x, M_y, M_z, an einem Ende des Stabes besitzen. Die Achsen der ξ, η, ζ können und wollen wir so legen, dass die Richtungen der Achsen der x, y, z überall unendlich wenig von ihren Richtungen abweichen; es sind dann α_1, β_2, γ_3 unendlich wenig von 1 verschieden und α_2, α_3, β_3, β_1, γ_1, γ_2 unendlich klein. Aus

$$-p = \alpha_2 \frac{d\alpha_3}{ds} + \beta_2 \frac{d\beta_3}{ds} + \gamma_2 \frac{d\gamma_3}{ds}$$

$$q = \alpha_1 \frac{d\alpha_3}{ds} + \beta_1 \frac{d\beta_3}{ds} + \gamma_1 \frac{d\gamma_3}{ds}$$

$$r = \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds} + \beta_2 \frac{d\beta_1}{ds} + \gamma_2 \frac{d\gamma_1}{ds}$$

folgt daher

$$p = -\frac{d\beta_3}{ds}, \quad q = \frac{d\alpha_3}{ds}, \quad r = \frac{d\beta_1}{ds}.$$

Berücksichtigen wir die Gleichungen 12) der vorigen Vorlesung und schreiben ψ für β_1, so erhalten wir hieraus

$$p = -\frac{d^2\eta}{ds^2}, \quad q = \frac{d^2\xi}{ds^2}, \quad r = \frac{d\psi}{ds}. \qquad 2)$$

Durch Integration dieser Gleichungen ergeben sich ξ und η als Functionen dritten Grades und ergiebt sich ψ als Function zweiten Grades von s; ξ und η bestimmen dann die Biegung und ψ bestimmt die Torsion des Stabes.

Wir specialisiren den betrachteten Fall nun weiter durch die Annahme, dass die Substanz des Stabes isotrop ist; den Querschnitt desselben lassen wir aber unbestimmt. Den am Ende des § 3 der siebenundzwanzigsten Vorlesung definirten Elasticitätscoefficienten, d. h. die Grösse

$$2K\frac{1+3\theta}{1+2\theta},$$

bezeichnen wir durch E, setzen

$$\int x^2 dx\, dy = \varkappa_1, \quad \int y^2 dx\, dy = \varkappa_2, \quad \int dx\, dy = \lambda \qquad 3)$$

und benutzen, dass die Achsen der x und y so gewählt sind, dass

$$\int x\, dx\, dy = 0, \quad \int y\, dx\, dy = 0, \quad \int xy\, dx\, dy = 0$$

ist. Eine Betrachtung, die ähnlich der im Anfange des § 6 der vorigen Vorlesung durchgeführten ist, lehrt F und G kennen. Die dort mit w_0 bezeichnete Grösse muss den Factor r enthalten; mit Benutzung hiervon findet man

$$F = -\frac{E}{2}(\varkappa_1 q^2 + \varkappa_2 p^2 + \varrho r^2 + \lambda \sigma^2), \qquad 4)$$

wo ϱ eine Constante bedeutet, die für den Fall, dass der Querschnitt des Stabes ein Kreis ist,

$$= \frac{1+2\theta}{1+3\theta} \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}$$

ist, während für einen anders gestalteten Querschnitt $\varrho =$ diesem Ausdrucke, multiplicirt mit einem Zahlenfactor ist, der für eine elliptische Gestalt nach der im § 3 der vorigen Vorlesung durchgeführten Rechnung sich leicht angeben lässt. Aus 4) folgt weiter

$$G = -\frac{E}{2}(\varkappa_1 q^2 + \varkappa_2 p^2 + \varrho r^2).$$

Die Gleichungen 1) geben hiernach

$$E\varkappa_2 \frac{dp}{ds} = -B, \quad E\varkappa_1 \frac{dq}{ds} = A, \quad \frac{dr}{ds} = 0.$$

Für die beiden Enden des Stabes sei $s = 0$ und $s = l$; dabei sei l positiv. A und B lassen sich dann definiren als die Summen der Componenten nach der x- und der y-Achse der Druckkräfte, welche von Aussen auf das Ende des Stabes $s = 0$ ausgeübt werden. Statt A und B wollen wir lieber die entsprechenden Componentensummen der Drucke einführen, welche auf das andere Ende von Aussen her wirken; nennen wir diese X' und Y', so ist

$$A = -X', \quad B = -Y'$$

und also

$$E\varkappa_2 \frac{dp}{ds} = Y', \quad E\varkappa_1 \frac{dq}{ds} = -X', \quad \frac{dr}{ds} = 0.$$

Diese Gleichungen integrire man und bestimme die Integrationsconstanten durch die Drehungsmomente der auf das Ende $s = l$ von Aussen wirkenden Druckkräfte in Bezug auf die diesem Ende entsprechenden Achsen der x, y, z. Nennt man diese Drehungsmomente M_x', M_y', M_z', so ist für $s = l$ den Gleichungen 33) der vorigen Vorlesung zufolge

$$E\varkappa_2 p = M_x', \quad E\varkappa_1 q = M_y', \quad E\varrho r = M_z'.$$

Daraus folgt für andere Werthe von s

$$E\varkappa_2 p = M_x' - Y'(l-s), \quad E\varkappa_1 q = M_y' + X'(l-s), \quad E\varrho r = M_z'.$$

Mit Hülfe der Gleichungen 2) erhält man hieraus bei passender Wahl des Coordinatensystems der ξ, η, ζ

$$E\varkappa_1 \xi = \frac{s^2}{2}\left(X'\left(l - \frac{s}{3}\right) + M_y'\right), \quad E\varkappa_2 \eta = \frac{s^2}{2}\left(Y'\left(l - \frac{s}{3}\right) - M_x'\right),$$

$$E\varrho\psi = M_z' s.$$

Auf den beiden ersten dieser Gleichungen beruht eine vielfach benutzte Methode zur Bestimmung des Elasticitätscoefficienten E aus Messungen über die Biegung eines Stabes. Ist der Elasticitätscoefficient bekannt, so bietet die dritte Gleichung ein Mittel, um die Constante θ, die in dem Ausdrucke von ϱ vorkommt, aus Messungen über die Torsion zu berechnen. Es ist von Poisson die Behauptung ausgesprochen, dass bei allen Körpern, wie wir sie hier betrachten, $\theta = \frac{1}{4}$ sei; man hat diese Behauptung mit Sicherheit weder beweisen, noch widerlegen können, weil man bei keinem Körper mit Sicherheit voraussetzen kann, dass er homogen und isotrop ist.

§ 2.

Wir haben im vorigen § den Fall ausgeschlossen, dass die Richtungen der Theile des Stabes bis auf unendlich kleine Abweichungen mit der Richtung der Kraft übereinstimmen, die in der vorigen Vorlesung mit Γ bezeichnet ist. Wir wollen jetzt diesen Fall mit ins Auge fassen. Dabei wollen wir das Princip der virtuellen Verrückungen benutzen und von der Gleichung 4) ausgehen. Für p, q, r haben wir ihre Werthe aus 2) zu setzen. Um einen Ausdruck für σ zu bilden, machen wir

$$\zeta = s + \omega,$$

wo dann ω eine unendlich kleine Grösse bedeutet. Nach der in der Gleichung 11) der vorigen Vorlesung von σ gegebenen Definition ist dann

$$(1 + \sigma)^2 = \left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2 + \left(1 + \frac{d\omega}{ds}\right)^2,$$

und hieraus folgt, wenn wir es unbestimmt lassen, in welchen Beziehungen die Grössenordnungen zu einander stehen, von welchen ξ, η, ω unendlich klein sind,

$$\sigma = \frac{d\omega}{ds} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2\right). \tag{5}$$

Der Ausdruck der Arbeit, welche die durch die Verschiebungen erzeugten Kräfte für eine Verrückung leisten, bei denen ξ, η, ω, ψ und $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\omega$, $\delta\psi$ wachsen, also der Ausdruck von

$$\delta\int_0^l F\,ds,$$

wo 0 und l als die den Enden des Stabes entsprechenden Werthe von s angenommen sind, ist dann der Gleichung 4) zufolge

$$- E\int_0^l ds \left(\varkappa_1 \frac{d^2\xi}{ds^2}\frac{d^2\delta\xi}{ds^2} + \varkappa_2 \frac{d^2\eta}{ds^2}\frac{d^2\delta\eta}{ds^2} + \varrho \frac{d\psi}{ds}\frac{d\delta\psi}{ds}\right.$$

$$\left. + \lambda\sigma\left(\frac{d\delta\omega}{ds} + \frac{d\xi}{ds}\frac{d\delta\xi}{ds} + \frac{d\eta}{ds}\frac{d\delta\eta}{ds}\right)\right).$$

Durch partielle Integrationen lässt sich derselbe in die folgende Form bringen:

$$\begin{aligned}
&- E\int_0^l ds \left(\varkappa_1 \frac{d^4\xi}{ds^4} - \lambda \frac{d}{ds}\left(\sigma \frac{d\xi}{ds}\right)\right)\delta\xi \\
&- E\varkappa_1 \left[\frac{d^2\xi}{ds^2}\frac{d\delta\xi}{dz}\right]_0^l + E\left[\left(\varkappa_1 \frac{d^3\xi}{ds^3} - \lambda\sigma \frac{d\xi}{ds}\right)\delta\xi\right]_0^l \\
&- E\int_0^l ds \left(\varkappa_2 \frac{d^4\eta}{ds^4} - \lambda \frac{d}{ds}\left(\sigma \frac{d\eta}{ds}\right)\right)\delta\eta \\
&- E\varkappa_2 \left[\frac{d^2\eta}{ds^2}\frac{d\delta\eta}{ds}\right]_0^l + E\left[\left(\varkappa_2 \frac{d^3\eta}{ds^3} - \lambda\sigma \frac{d\eta}{ds}\right)\delta\eta\right]_0^l \\
&+ E\lambda\int_0^l ds \frac{d\sigma}{ds}\,\delta\omega \\
&- E\lambda \Big[\sigma\,\delta\omega\Big]_0^l \\
&+ E\varrho\int_0^l ds \frac{d^2\psi}{ds^2}\,\delta\psi \\
&- E\varrho \left[\frac{d\psi}{ds}\,\delta\psi\right]_0^l.
\end{aligned} \qquad 6)$$

Den Variationen $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\frac{d\xi}{ds}$, $\delta\frac{d\eta}{ds}$, $\delta\omega$, $\delta\psi$ wollen wir nun die Beschränkung auflegen, dass sie für $s = 0$ verschwinden, und einen Ausdruck für die Arbeit der Druckkräfte bilden, welche von Aussen auf das Ende des Stabes wirken, für welches $s = l$ ist. Mit Hülfe des Ausdruckes 24) und der Gleichungen 18) und 19) der fünften Vorlesung, so wie der Gleichungen 12) der vorigen finden wir diese Arbeit

$$= X'\delta\xi + Y'\delta\eta + Z'\delta\omega - M_x'\delta\frac{d\eta}{ds} + M_y'\delta\frac{d\xi}{ds} + M_z'\delta\psi, \qquad 7)$$

wo die Variationen für $s = l$ zu nehmen sind, die Zeichen X', Y', M_x', M_y', M_z' dieselbe Bedeutung, wie im vorigen § haben und Z' die Summe der Componenten nach der z-Achse der Druckkräfte bedeutet, auf welche jene Zeichen sich beziehen.

Die Bedingung für das Gleichgewicht ist die, dass die Summe der Ausdrücke 6) und 7) verschwindet, welches auch die willkürlich gebliebenen Werthe der in ihnen vorkommenden Variationen

sind. Die hieraus folgenden Gleichungen enthalten die im vorigen § für einen isotropen Stab abgeleiteten Resultate, sind aber insofern allgemeiner, als sie auch den dort ausgeschlossenen Fall umfassen.

Für die Torsion ψ ergiebt sich hier derselbe Ausdruck, der dort gefunden wurde. Es folgt ferner, dass σ constant, und zwar durch die Gleichung

$$E\lambda\sigma = Z' \tag{8}$$

bestimmt ist. Mit Hülfe dieses Werthes von σ ist jede der Grössen ξ, η, welche die Biegung bestimmen, aus der für sie geltenden Differentialgleichung und den zugehörigen Grenzbedingungen zu berechnen. Ist das geschehen, so lehrt die Gleichung 5) $\frac{d\omega}{ds}$ und, wenn man noch festsetzt, dass ω mit s verschwindet, ω selbst kennen.

Die Differentialgleichung für ξ ist

$$E\varkappa_1 \frac{d^4\xi}{ds^4} - Z' \frac{d^2\xi}{ds^2} = 0; \tag{9}$$

dazu kommen die Grenzbedingungen, dass für $s = 0$

$$\xi = 0, \qquad \frac{d\xi}{ds} = 0 \tag{10}$$

und für $s = l$

$$E\varkappa_1 \frac{d^2\xi}{ds^2} = M_y', \qquad E\varkappa_1 \frac{d^3\xi}{ds^3} - Z' \frac{d\xi}{ds} = - X' \tag{11}$$

ist.

Wenn Z' nicht unendlich gross gegen X' ist, so ist das zweite Glied der linken Seite der letzten dieser Gleichungen unendlich klein gegen ihre rechte Seite; die genannte Gleichung kann daher geschrieben werden

$$E\varkappa_1 \frac{d^3\xi}{ds^3} = - X'.$$

Vorausgesetzt, dass $\frac{d^3\xi}{ds^3}$ und $\frac{d\xi}{ds}$ von derselben Grössenordnung sind, folgt zugleich, dass Z' unendlich klein gegen $E\varkappa_1$ ist und hieraus wieder, dass die Gleichung 9) sich schreiben lässt

$$\frac{d^4\xi}{ds^4} = 0.$$

Daraus ergiebt sich dann derselbe Werth von ξ, der im vorigen § abgeleitet ist.

Aehnliche Betrachtungen, wie über ξ, lassen sich über η anstellen.

§ 3.

Um die allgemeineren, im vorigen § für die Biegung aufgestellten Formeln auf ein Beispiel anzuwenden, behandeln wir eine Methode zur Bestimmung der Elasticitätscoefficienten, die für dünne Drähte sehr bequem ist und von s'Gravesande herrührt. Die Methode ist diese: es wird der Draht horizontal zwischen 2 Klemmen ausgespannt, an seine Mitte ein Gewicht gehängt und die Senkung beobachtet, die dadurch diese Mitte erfährt. Eine Hälfte des Drahtes sehen wir als den Stab an, auf den unsere Formeln sich beziehen, den Punkt, welcher das Gewicht trägt, als das Ende $s = 0$; die ξ-Achse nehmen wir vertical aufwärts gekehrt an. Der Stab befindet sich dann in der $\xi\zeta$-Ebene, es ist $\eta = 0$, l die halbe Länge des Drahtes, ξ für $s = l$ die beobachtete Senkung und X' die Grösse des angehängten Gewichtes. M_y' und Z' sind hier nicht direct gegeben; zur Bestimmung dieser Grössen hat man die Bedingungen, dass für $s = l$

$$\frac{d\xi}{ds} = 0 \quad \text{und} \quad \omega = \omega'$$

ist, wenn ω' die Verlängerung bedeutet, die die Hälfte des Drahtes erfuhr, als dieser zwischen den Klemmen ausgespannt wurde.

Man setze

$$h^2 = \frac{Z'}{E\varkappa_1}$$

oder, was nach 8) dasselbe ist,

$$h^2 = \frac{\lambda}{\varkappa_1}\sigma; \tag{12}$$

die Gleichung 9) wird dann

$$\frac{d^4\xi}{ds^4} = h^2 \frac{d^2\xi}{ds^2}.$$

Das Integral derselben, das den für $s = 0$ zu erfüllenden Bedingungen 10) genügt, ist

$$\xi = A\,(e^{hs} - hs - 1) + B\,(e^{-hs} + hs - 1),$$

wo A und B willkürliche Constanten sind. Die Bedingungen 11) geben für diese

$$E\varkappa_1 h^3 A\,(e^{hl} + e^{-hl}) = hM_y' - e^{-hl}X'$$

$$E\varkappa_1 h^3 B\,(e^{hl} + e^{-hl}) = hM_y' + e^{hl}X',$$

während daraus, dass $\frac{d\xi}{ds}$ für $s = l$ verschwindet,

$$A\,(e^{hl} - 1) + B\,(-e^{-hl} + 1) = 0$$

folgt. Aus diesen 3 Gleichungen ergiebt sich

$$h M_y' (e^{\frac{hl}{2}} + e^{-\frac{hl}{2}}) = -(e^{\frac{hl}{2}} - e^{-\frac{hl}{2}}) X'$$

$$E\varkappa_1 h^3 A (e^{\frac{hl}{2}} + e^{-\frac{hl}{2}}) = -e^{-\frac{hl}{2}} X'$$

$$E\varkappa_1 h^3 B (e^{\frac{hl}{2}} + e^{-\frac{hl}{2}}) = e^{\frac{hl}{2}} X'.$$

Bezeichnet man den Werth von ξ für $s = l$ durch ξ' und setzt zur Abkürzung

$$\frac{hl}{2} = p,$$

so findet man hieraus

$$\xi' = \frac{X' l^3}{4 E \varkappa_1} \frac{1}{p^2} \left(1 - \frac{1}{p} \frac{e^p - e^{-p}}{e^p + e^{-p}}\right). \tag{13}$$

Um nach dieser Gleichung den Elasticitätscoefficienten E berechnen zu können, muss man p noch ermitteln. Aus 5) und 12) folgt

$$4p^2 \frac{\varkappa_1}{\lambda} = \omega' l + \frac{l}{2} \int_0^l \left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 ds.$$

Es ist aber

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{X' l^2}{4 E \varkappa_1} \frac{1}{p^2} \left(1 - \frac{e^{p\left(\frac{2s}{l}-1\right)} + e^{-p\left(\frac{2s}{l}-1\right)}}{e^p + e^{-p}}\right);$$

hiernach wird die letzte Gleichung, wenn man das durch 13) bestimmte ξ' einführt,

$$4p^2 \frac{\varkappa_1}{\lambda} = \omega' l + \frac{\xi'^2}{2} \frac{e^{2p} + e^{-2p} + 4 - \frac{3}{2}\frac{1}{p}(e^{2p} - e^{-2p})}{\left(e^p + e^{-p} - \frac{1}{p}(e^p - e^{-p})\right)^2}. \tag{14}$$

Der Factor von ξ'^2 ist stets positiv, ω' nehmen wir als positiv an. Hieraus folgt, dass, wenn eine der Grössen $\omega' l$ und ξ'^2 unendlich gross gegen $\frac{\varkappa_1}{\lambda}$ ist, oder, wenn beide es sind, p unendlich gross sein muss. Dieser Fall ist bei den in Rede stehenden Versuchen näherungsweise verwirklicht. Für sie ist daher nach 13) und 14) in erster Näherung

$$\xi' = \frac{X' l^3}{4 E \varkappa_1} \frac{1}{p^2}, \quad 4p^2 \frac{\varkappa_1}{\lambda} = \omega' l + \frac{\xi'^2}{2},$$

also

$$E\lambda \xi' \left(\omega' l + \frac{\xi'^2}{2}\right) = X' l^3.$$

Will man die Glieder nächstkleinerer Ordnung berücksichtigen, so hat man hierzu die Gleichungen

$$\xi' = \frac{X' l^3}{4 E \varkappa_1} \frac{1}{p^2} \left(1 - \frac{1}{p}\right), \quad 4p^2 \frac{\varkappa_1}{\lambda} = \omega' l + \frac{\xi'^2}{2} \left(1 + \frac{1}{2p}\right)$$

zu benutzen, deren zweite p kennen lehrt, wenn man in ihrer rechten Seite für p seinen ersten Näherungswerth setzt.

Wir merken noch Folgendes an. Der Factor von ξ'^2 in der Gleichung 14) wird für keinen endlichen Werth von p unendlich; daraus folgt, dass, wenn $\omega' l$ und ξ'^2 unendlich klein gegen $\frac{\varkappa_1}{\lambda}$ sind, p unendlich klein sein muss. In diesem Falle giebt daher die Gleichung 13)

$$\xi' = \frac{X' l^3}{12 E \varkappa_1}.$$

§ 4.

Wir wollen nun ein Beispiel für das Gleichgewicht eines Stabes behandeln, auf dessen Theile *Kräfte* wirken. Einen Draht denken wir uns horizontal zwischen zwei Klemmen ausgespannt und suchen die Biegung, die er erleidet, wenn auf seine Theile die Schwere wirkt.

Die ξ-Achse sei vertikal abwärts gekehrt, g die Schwere, μ die Dichtigkeit des Drahtes; aus dem Ausdruck 6) folgt dann

$$\varkappa_1 \frac{d^4 \xi}{ds^4} - \lambda \sigma \frac{d^2 \xi}{ds^2} = \frac{\mu \lambda g}{E}, \quad \frac{d\sigma}{ds} = 0;$$

ist für die Enden des Drahtes $s = l$ und $s = -l$, so soll für diese Werthe von s

$$\xi = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\xi}{ds} = 0$$

sein; bedeutet ω' die Verlängerung, welche eine Drahthälfte bei dem Ausspannen erlitten hat, so ist endlich

$$\sigma = \frac{\omega'}{l} + \frac{1}{2l}\int_0^l ds \left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2.$$

Diese Gleichungen lassen sich in ganz ähnlicher Weise behandeln, wie die Gleichungen, die wir im vorigen § entwickelt haben. Wir wollen uns hier aber auf die Betrachtung der Grenzfälle beschränken, der Fälle, dass $\varkappa_1$ gegen $\lambda\sigma$ (oder gegen $\lambda l^2 \sigma$, was dasselbe ist, da wir l als endlich ansehen) unendlich gross oder unendlich klein ist.

Ist $\varkappa_1$ unendlich gross gegen $\lambda\sigma$, so wird die für ξ aufgestellte Differentialgleichung

$$\frac{d^4 \xi}{ds^4} = \frac{\mu \lambda g}{E \varkappa_1},$$

vorausgesetzt, dass $\frac{d^2 \xi}{ds^2}$ nicht unendlich gross gegen $\frac{d^4 \xi}{ds^4}$ ist. Ihr und den 4 Grenzbedingungen wird genügt durch

$$\xi = \frac{\mu \lambda g}{24 E \varkappa_1} (l^2 - s^2)^2.$$

Es wird $\varkappa_1$ unendlich gross gegen $\lambda \sigma$, wenn $\sqrt{\omega'}$ und ξ unendlich klein sind gegen die Dimensionen des Querschnittes des Drahtes.

Ist eine der Grössen $\sqrt{\omega'}$ und ξ dagegen unendlich gross gegen die Dimensionen des Querschnittes, oder sind es beide, so ist $\varkappa_1$ unendlich klein gegen $\lambda \sigma$ und die Differentialgleichung für ξ wird

$$\frac{d^2 \xi}{d s^2} = - \frac{\mu g}{E \sigma},$$

vorausgesetzt, dass nicht $\frac{d^4 \xi}{d s^4}$ unendlich gross gegen $\frac{d^2 \xi}{d s^2}$ ist. Das Integral dieser Gleichung, das der Bedingung genügt, dass ξ für $s = \pm l$ verschwindet, ist

$$\xi = \frac{\mu g}{2 E \sigma} (l^2 - s^2).$$

Der Bedingung, dass für die Enden des Drahtes auch $\frac{d \xi}{d s}$ verschwindet, kann dasselbe nicht angepasst werden; unendlich nahe an den Enden ändert sich $\frac{d \xi}{d s}$ unendlich schnell, hier ist $\frac{d^4 \xi}{d s^4}$ unendlich gross gegen $\frac{d^2 \xi}{d s^2}$ und es gilt nicht die vereinfachte Differentialgleichung. Zur Bestimmung von σ ergiebt sich die Gleichung

$$\sigma = \frac{\omega'}{l} + \frac{l^2}{6} \left(\frac{\mu g}{E \sigma} \right)^2.$$

§ 5.

Die folgenden Betrachtungen sollen sich auf die *Schwingungen* eines unendlich dünnen Stabes beziehen. Wir beschränken dieselben auf den Fall, dass die Schwingungen unendlich klein sind und der Stab ursprünglich gerade und isotrop ist. Die Differentialgleichungen der Bewegung findet man leicht mit Hülfe des Hamilton'schen Princips aus dem Ausdrucke 6) und der Gleichung 27) der vorigen Vorlesung. Bei der letzteren hat man zunächst zu beachten, dass bei unseren jetzigen Annahmen nach 25) der vorigen Vorlesung

$$R = \frac{\partial \beta_1}{\partial t},$$

oder, wenn wir wieder ψ für β_1 schreiben,

$$R = \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

ist; setzen wir ferner wieder

$$\zeta = s + \omega$$

zu benutzen, deren zweite p kennen lehrt, wen ... nd x_2 ein, so wird
Seite für p seinen ersten Näherungswerth se

Wir merken noch Folgendes an. ... $+ (x_1 + x_2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2\Big\}$.
Gleichung 14) wird für keinen endlic

daraus folgt, dass, wenn $\omega' l$ un

sind, p unendlich klein sein m
Gleichung 13) ... t $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\omega$, $\delta\psi$ gleich Null

$$\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\delta\xi + \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\delta\eta + \frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}\delta\omega\right) \quad 15)$$

$$\ldots + x_2)\int\int ds\,dt\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\delta\psi.$$

Wir woll ...
behandeln, ... hen specielle Fälle. Zuerst nehmen wir an, dass
wir uns ... einer Bewegung gerade bleibt, d. h. wir setzen
die B ...

$$\xi = 0 \quad \text{und} \quad \eta = 0.$$

wird ... ch 5)

$$\sigma = \frac{\partial\omega}{\partial s}$$

... liefert das Hamilton'sche Princip die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} = \frac{E}{\mu}\frac{\partial^2\omega}{\partial s^2}$$

und

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{E\varrho}{\mu(x_1 + x_2)}\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}.$$

Die erste von diesen bestimmt die *Longitudinal-Schwingungen*, die zweite die *Torsions-Schwingungen* des Stabes. Beide sind von derselben Form, einer Form, die wir schon in der dreiundzwanzigsten Vorlesung zu behandeln gehabt haben. Sie stellen Wellen dar, die theils in der Richtung, in der s wächst, theils in der entgegengesetzten Richtung mit einer constanten Geschwindigkeit sich fortpflanzen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen ist

$$\sqrt{\frac{E}{\mu}},$$

die der Torsionswellen

$$\sqrt{\frac{E\varrho}{\mu(x_1 + x_2)}}.$$

Sowohl durch longitudinale, als durch Torsions-Schwingungen kann der Stab einfache Töne geben; es ist leicht, die Schwingungszahlen derselben und die Lage der *Knoten*, die ihnen entsprechen, zu berechnen. Es wird ausreichen, das für die Longitudinalschwingungen zu zeigen, da die Torsionsschwingungen sich von diesen in der

?echnung nur durch einen andern Werth der Fortpflanzungsgeschwin-
·keit unterscheiden. Wir schreiben die Differentialgleichung der
·gung

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2},$$

·r mit a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer longitudi-
·e bezeichnen, und setzen

$$\omega = u \sin 2\pi n t,$$

ction der einen Variabeln s sein soll; n ist dann die
.ahl des Tones. Für u ergiebt sich dabei die gewöhn-
.erentialgleichung

$$\frac{d^2 u}{d s^2} = -\left(\frac{2\pi n}{a}\right)^2 u;$$

das allgemeine Integral derselben ist

$$u = A \sin \frac{2\pi n}{a} s + B \cos \frac{2\pi n}{a} s,$$

wo A und B willkürliche Constanten bedeuten. Es sind nun 3 Fälle zu unterscheiden: der Fall, dass beide Enden fest, der Fall, dass beide Enden frei sind, und der Fall, dass das eine Ende fest, das andere frei ist. Für ein festes Ende ist immer

$$\omega = 0, \quad \text{also} \quad u = 0,$$

für ein freies, wie aus dem Ausdruck 6) hervorgeht,

$$\frac{\partial \omega}{\partial s} = 0, \quad \text{also} \quad \frac{du}{ds} = 0.$$

Für die Enden des Stabes sei

$$s = 0 \quad \text{und} \quad s = l.$$

Sind beide Enden fest, so genügt man den für u geltenden Bedingungen, wenn man

$$u = A \sin \frac{2\pi n}{a} s$$

$$n = h \frac{a}{2l}$$

setzt, wo h eine ganze Zahl bedeutet; sind beide Enden frei, so hat man

$$u = B \cos \frac{2\pi n}{a} s,$$

während n denselben Werth besitzt; ist das erste Ende fest, das zweite frei, so ist

$$u = A \sin \frac{2\pi n}{a} s$$

$$n = (2h - 1) \frac{a}{4l}.$$

und führen die durch 3) definirten Constanten $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ ein, so wird die genannte Gleichung

$$T = \frac{\mu}{2}\int ds \left\{\lambda \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2\right) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2\right) + (\varkappa_1 + \varkappa_2)\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2\right\}.$$

Daraus folgt für

$$\delta \int T dt,$$

wenn man für die Grenzen der Zeit $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\omega$, $\delta\psi$ gleich Null setzt, der Ausdruck

$$\begin{aligned} &-\mu\lambda \int\int ds\, dt \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\,\delta\xi + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\,\delta\eta + \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}\,\delta\omega\right) \\ &-\mu(\varkappa_1 + \varkappa_2)\int\int ds\, dt\, \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\,\delta\psi. \end{aligned} \qquad 15)$$

Wir untersuchen specielle Fälle. Zuerst nehmen wir an, dass der Stab bei seiner Bewegung gerade bleibt, d. h. wir setzen

$$\xi = 0 \quad \text{und} \quad \eta = 0.$$

Da dann nach 5)

$$\sigma = \frac{\partial \omega}{\partial s}$$

ist, so liefert das Hamilton'sche Princip die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = \frac{E}{\mu}\frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2}$$

und

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{E\varrho}{\mu(\varkappa_1 + \varkappa_2)}\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2}.$$

Die erste von diesen bestimmt die *Longitudinal-Schwingungen*, die zweite die *Torsions-Schwingungen* des Stabes. Beide sind von derselben Form, einer Form, die wir schon in der dreiundzwanzigsten Vorlesung zu behandeln gehabt haben. Sie stellen Wellen dar, die theils in der Richtung, in der s wächst, theils in der entgegengesetzten Richtung mit einer constanten Geschwindigkeit sich fortpflanzen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen ist

$$\sqrt{\frac{E}{\mu}},$$

die der Torsionswellen

$$\sqrt{\frac{E\varrho}{\mu(\varkappa_1 + \varkappa_2)}}.$$

Sowohl durch longitudinale, als durch Torsions-Schwingungen kann der Stab einfache Töne geben; es ist leicht, die Schwingungszahlen derselben und die Lage der *Knoten*, die ihnen entsprechen, zu berechnen. Es wird ausreichen, das für die Longitudinalschwingungen zu zeigen, da die Torsionsschwingungen sich von diesen in der

Rechnung nur durch einen andern Werth der Fortpflanzungsgeschwindigkeit unterscheiden. Wir schreiben die Differentialgleichung der Bewegung

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2},$$

indem wir mit a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer longitudinalen Welle bezeichnen, und setzen

$$\omega = u \sin 2\pi n t,$$

wo u eine Function der einen Variabeln s sein soll; n ist dann die Schwingungszahl des Tones. Für u ergiebt sich dabei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u}{d s^2} = -\left(\frac{2\pi n}{a}\right)^2 u;$$

das allgemeine Integral derselben ist

$$u = A \sin \frac{2\pi n}{a} s + B \cos \frac{2\pi n}{a} s,$$

wo A und B willkürliche Constanten bedeuten. Es sind nun 3 Fälle zu unterscheiden: der Fall, dass beide Enden fest, der Fall, dass beide Enden frei sind, und der Fall, dass das eine Ende fest, das andere frei ist. Für ein festes Ende ist immer

$$\omega = 0, \quad \text{also} \quad u = 0,$$

für ein freies, wie aus dem Ausdruck 6) hervorgeht,

$$\frac{\partial \omega}{\partial s} = 0, \quad \text{also} \quad \frac{du}{ds} = 0.$$

Für die Enden des Stabes sei

$$s = 0 \quad \text{und} \quad s = l.$$

Sind beide Enden fest, so genügt man den für u geltenden Bedingungen, wenn man

$$u = A \sin \frac{2\pi n}{a} s$$

$$n = h \frac{a}{2l}$$

setzt, wo h eine ganze Zahl bedeutet; sind beide Enden frei, so hat man

$$u = B \cos \frac{2\pi n}{a} s,$$

während n denselben Werth besitzt; ist das erste Ende fest, das zweite frei, so ist

$$u = A \sin \frac{2\pi n}{a} s$$

$$n = (2h - 1) \frac{a}{4l}.$$

Bei jeder dieser Schwingungsarten giebt es Punkte, für welche $u = 0$ ist, die also in Ruhe bleiben; es sind dieses die *Knoten*; für dieselben ist in den 3 unterschiedenen Fällen, wenn k eine ganze Zahl bedeutet,

$$s = l\frac{k}{h}$$

$$s = l\frac{2k-1}{2h}$$

und

$$s = l\frac{2k}{2h-1}\,.$$

§ 6.

Wir lassen jetzt die Voraussetzung fallen, dass der Stab gerade bleibt, machen aber die Annahme, dass $\psi = 0$ und $\eta = 0$ ist. Ebenso, wie dieser Fall, wäre der zu behandeln, dass $\psi = 0$ und $\xi = 0$.

Aus den Ausdrücken 15), 6) und 5) folgt mit Hülfe des Hamilton'schen Principes

$$\begin{aligned}
&\mu\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + E\frac{\varkappa_1}{\lambda}\frac{\partial^4\xi}{\partial s^4} - E\frac{\partial}{\partial s}\left(\sigma\frac{\partial\xi}{\partial s}\right) = 0\\
&\mu\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} - E\frac{\partial\sigma}{\partial s} = 0 \qquad\qquad 16)\\
&\sigma = \frac{\partial\omega}{\partial s} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial s}\right)^2.
\end{aligned}$$

Hierzu kommen gewisse für die Enden des Stabes, $s = 0$ und $s = l$, geltende Bedingungen, die aus dem Ausdruck 6) abzulesen sind.

Man erhält eine particuläre Lösung des vorgelegten Problems, wenn man

$$\omega = 0 \quad \text{und} \quad \sigma = 0$$

setzt. Dabei ergiebt sich aus 16) für ξ die partielle Differentialgleichung

$$\mu\lambda\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -E\varkappa_1\frac{\partial^4\xi}{\partial s^4}\,;$$

für ein freies Ende muss nach 6)

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^3\xi}{\partial s^3} = 0,$$

für ein Ende, das so befestigt ist, dass es sich weder verschieben, noch drehen kann,

$$\xi = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial\xi}{\partial s} = 0$$

sein.

Wir nehmen an, dass der Stab einen einfachen Ton von der Schwingungszahl n giebt, und setzen

$$\xi = u \sin 2\pi n t, \tag{17}$$

wo u eine Function von s bedeutet, die der Differentialgleichung

$$\frac{d^4 u}{ds^4} = \frac{\mu \lambda}{E \varkappa_1} (2\pi n)^2 u$$

genügt. Führt man eine Constante p durch die Gleichung

$$\frac{\mu \lambda}{E \varkappa_1} (2\pi n)^2 = \left(\frac{p}{l}\right)^4 \tag{18}$$

ein, so ist das allgemeine Integral derselben

$$u = A \cos \frac{ps}{l} + B \sin \frac{ps}{l} + C \frac{e^{\frac{ps}{l}} + e^{-\frac{ps}{l}}}{2} + D \frac{e^{\frac{ps}{l}} - e^{-\frac{ps}{l}}}{2},$$

wo A, B, C, D willkürliche Constanten bedeuten. Die 4 Grenzbedingungen bestimmen 3 von diesen und geben für p eine transcendente Gleichung, deren Wurzeln bei Rücksicht auf 18) die Werthe kennen lehren, die n haben kann.

Das Ende $l = 0$ sei frei; die beiden hier zu erfüllenden Bedingungen geben dann

$$C = A, \qquad D = B,$$

also

$$u = A \left(\cos \frac{ps}{l} + \frac{e^{\frac{ps}{l}} + e^{-\frac{ps}{l}}}{2}\right) + B \left(\sin \frac{ps}{l} + \frac{e^{\frac{ps}{l}} - e^{-\frac{ps}{l}}}{2}\right). \tag{19}$$

Ist auch das Ende $s = l$ frei, so müssen hiernach die Gleichungen

$$A\left(\frac{e^p + e^{-p}}{2} - \cos p\right) + B\left(\frac{e^p - e^{-p}}{2} - \sin p\right) = 0$$

$$A\left(\frac{e^p - e^{-p}}{2} + \sin p\right) + B\left(\frac{e^p + e^{-p}}{2} - \cos p\right) = 0$$

bestehen. Sie bestimmen das Verhältniss $A : B$ und geben für p die Gleichung

$$\left(\frac{e^p + e^{-p}}{2} - \cos p\right)^2 - \left(\frac{e^p - e^{-p}}{2}\right)^2 + \sin^2 p = 0,$$

d. h. die Gleichung

$$\cos p \, \frac{e^p + e^{-p}}{2} = 1.$$

Die Wurzeln derselben sind die Werthe von x, die den Durchschnittspunkten der Curven entsprechen, deren Gleichungen

$$y = \cos x \quad \text{und} \quad y = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

sind. Die Discussion dieser Gleichungen zeigt, dass $p = 0$ eine Wurzel, und zwar eine 4-fache, ist, dass die nächstgrössere Wurzel etwas grösser als $\frac{3\pi}{2}$, die folgende etwas kleiner als $\frac{5\pi}{2}$ u. s. f. ist, und

dass die Wurzeln um so mehr einem ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ sich nähern, je grösser ihre Ordnungszahl wird. $p = 0$ entspricht einer unendlichen Schwingungsdauer, also keinem Tone; für den tiefsten Ton des Stabes, für seinen *Grundton*, ist näherungsweise $p = \frac{3\pi}{2}$, d. h. $= 4{,}712$; einen genaueren Näherungswerth erhält man, wenn man p aus der Gleichung

$$\cos p = \frac{2}{e^{\frac{3\pi}{2}} + e^{-\frac{3\pi}{2}}}$$

berechnet, aus der $p = 4{,}730$ sich ergiebt. Durch ein ähnliches Verfahren kann man alle Wurzeln der in Rede stehenden Gleichung mit beliebiger Genauigkeit finden.

Die *Knoten* sind durch die Gleichung

$$u = 0$$

bestimmt; setzt man

$$\frac{s}{l} = x,$$

so ist dieselbe

$$\left(\frac{e^p - e^{-p}}{2} - \sin p\right)\left(\frac{e^{px} + e^{-px}}{2} + \cos px\right)$$
$$= \left(\frac{e^p + e^{-p}}{2} - \cos p\right)\left(\frac{e^{px} - e^{-px}}{2} + \sin px\right).$$

Nach der Rechnung von Strehlke*) sind die Werthe von x für die ersten Töne

Ton 1.	Ton 2.	Ton 3.
0,2242	0,1321	0,0944
0,7758	0,5	0,3585
	0,8679	0,6415
		0,9056

Ist das Ende $s = l$ fest, während das Ende $s = 0$ frei ist, so gilt auch die Gleichung 19), aber zur Bestimmung von $A : B$ und p hat man

$$A\left(\frac{e^p + e^{-p}}{2} + \cos p\right) + B\left(\frac{e^p - e^{-p}}{2} + \sin p\right) = 0$$
$$A\left(\frac{e^p - e^{-p}}{2} - \sin p\right) + B\left(\frac{e^p + e^{-p}}{2} + \cos p\right) = 0,$$

woraus

$$\cos p \frac{e^p + e^{-p}}{2} = -1$$

*) Dove's Repertorium der Physik III, 110.

sich ergiebt. Die kleinste positive Wurzel dieser Gleichung ist etwas grösser als $\frac{\pi}{2}$ (genauer 1,875), die folgende etwas kleiner als $\frac{3\pi}{2}$, die nächste etwas grösser als $\frac{5\pi}{2}$ u. s. f.

Für die Knoten ist, wenn wieder $\frac{s}{l} = x$ gesetzt wird,

$$\left(\frac{e^p - e^{-p}}{2} + \sin p\right)\left(\frac{e^{px} + e^{-px}}{2} + \cos px\right)$$
$$= \left(\frac{e^p + e^{-p}}{2} + \cos p\right)\left(\frac{e^{px} - e^{-px}}{2} + \sin px\right).$$

Wir wollen noch den Fall betrachten, dass, während das Ende $s = 0$ frei ist, das Ende $s = l$ in einer gewissen periodischen Bewegung erhalten wird. Es sei für $s = l$

$$\xi = \alpha \sin 2\pi n t, \quad \frac{\partial \xi}{\partial s} = \beta \sin 2\pi n t, \tag{20}$$

wo α, β und n gegebene Constanten sind. Der für ξ geltenden partiellen Differentialgleichung und den für $s = 0$ zu erfüllenden Grenzbedingungen genügt man auch dann durch die Gleichungen 17) und 19), wenn man p aus 18) berechnet; die für $s = l$ aufgestellten Bedingungen geben

$$\alpha = A\left(\frac{e^p + e^{-p}}{2} + \cos p\right) + B\left(\frac{e^p - e^{-p}}{2} + \sin p\right)$$
$$\frac{l}{p}\beta = A\left(\frac{e^p - e^{-p}}{2} - \sin p\right) + B\left(\frac{e^p + e^{-p}}{2} + \cos p\right),$$

zwei Gleichungen, die im Allgemeinen A und B vollständig bestimmen. Nur wenn die Determinante der Coefficienten von A und B verschwindet, d. h. wenn p und n einem der Töne entsprechen, die der Stab bei einem freien und einem befestigten Ende geben kann, werden A und B unbestimmt, falls das Verhältniss $\alpha : \beta$ einen gewissen Werth hat, unendlich bei andern Werthen dieses Verhältnisses.

In ganz ähnlicher Weise lässt sich der Fall behandeln, dass statt der Gleichungen 20) die Gleichungen

$$\xi = \alpha' \cos 2\pi n t, \quad \frac{\partial \xi}{\partial s} = \beta' \cos 2\pi n t$$

für $s = l$ bestehen sollen. Setzt man ξ gleich der Summe der Ausdrücke, die in diesen beiden Fällen für ξ gelten, so lernt man die Bewegung des Stabes in dem Falle kennen, dass für $s = l$

$$\xi = \alpha \sin 2\pi n t + \alpha' \cos 2\pi n t$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial s} = \beta \sin 2\pi n t + \beta' \cos 2\pi n t$$

ist.

§ 7.

Wir wollen jetzt particuläre Lösungen der Gleichungen 16) aufsuchen, bei denen nicht ω und σ verschwinden und die auf die Transversalschwingungen der *Saiten* sich beziehen. Man nennt einen gespannten Stab eine *Saite*, wenn seine Querdimensionen hinreichend klein sind auch gegen die Verschiebungen seiner Theile. In dem zweiten Gliede der ersten der Gleichungen 16) kommt der Factor $\frac{\varkappa_1}{l}$ vor; dieser Factor ist von der Ordnung des Querschnitts; wir werden annehmen, dass der Querschnitt so klein ist gegen die Verschiebungen, die stattfinden, dass das genannte Glied unendlich klein ist gegen das dritte Glied derselben Gleichung. Die Gleichungen 16) sind dann

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{E}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma}{\partial s}\frac{\partial \xi}{\partial s} + \sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} \\ \frac{\mu}{E}\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma}{\partial s} \\ \sigma &= \frac{\partial \omega}{\partial s} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial s}\right)^2 . \end{aligned} \tag{21}$$

Wir fügen die Bedingungen hinzu, dass

$$\begin{array}{llll} \text{für} & s = 0 & \xi = 0 & \omega = 0 \\ \text{für} & s = l & \xi = 0 & \omega = \omega' \end{array}$$

ist, wo ω' eine gegebene Constante bedeutet; hierdurch ist ausgesprochen, dass die beiden Enden der Saite befestigt sind; der Werth von ω' bestimmt die *Spannung*, die ihr gegeben ist.

Wir wollen nur solche Bewegungen aufsuchen, bei welchen $\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}$ unendlich klein gegen $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ ist. Bei dieser Annahme folgt aus den beiden ersten der Gleichungen 21), dass $\frac{\partial \sigma}{\partial s}$ unendlich klein gegen $\frac{\partial \sigma}{\partial s}\frac{\partial \xi}{\partial s} + \sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2}$ ist; es ist aber $\frac{\partial \sigma}{\partial s}\frac{\partial \xi}{\partial s}$ unendlich klein gegen $\frac{\partial \sigma}{\partial s}$, es muss also $\sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2}$ unendlich gross gegen $\frac{\partial \sigma}{\partial s}$ und um so mehr unendlich gross gegen $\frac{\partial \sigma}{\partial s}\frac{\partial \xi}{\partial s}$ sein. Hiernach ist die erste der Gleichungen 21)

$$\frac{\mu}{E}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} . \tag{22}$$

Daraus, dass $\frac{\partial \sigma}{\partial s}$ unendlich klein gegen $\sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2}$ ist, folgt, dass $\frac{\partial \sigma}{\partial s}$ um so mehr unendlich klein gegen σ, dass also σ unabhängig von s ist; nach der dritten der Gleichungen 21) hat man daher

$$\sigma = \frac{\omega'}{l} + \frac{1}{2l}\int_0^l \left(\frac{\partial \xi}{\partial s}\right)^2 ds\,,$$

und also nach 22)

$$\frac{\mu}{E}\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \left(\frac{\omega'}{l} + \frac{1}{2l}\int_0^l \left(\frac{\partial \xi}{\partial s}\right)^2 ds\right)\frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2}\,. \tag{23}$$

Diese Gleichung vereinfacht sich sehr wesentlich, wenn die Spannung der Saite gross genug ist, wenn nämlich ω' so gross gegen ξ ist, dass das zweite Glied des Factors von $\frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2}$ gegen das erste vernachlässigt werden kann. Bevor wir auf die Betrachtung dieses Falles näher eingehen, wollen wir gewisse particuläre Lösungen der Gleichung 23) ableiten, welche gelten, wie klein auch die Spannung sein möge.

Wir setzen

$$\xi = u \sin \frac{ms}{l}\,\pi\,,$$

wo m eine ganze Zahl, u eine zu bestimmende Function von t bedeutet; den Bedingungen, die ξ für $s = 0$ und $s = l$ zu erfüllen hat, wird dadurch genügt; es wird auch der Gleichung 23) genügt, wenn man u aus der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \frac{E}{\mu}\, u \left(\frac{\omega'}{l} + \left(\frac{m\pi}{2l}\right)^2 u^2\right) \tag{24}$$

bestimmt. Das allgemeine Integral dieser ist

$$u = a \cos \operatorname{am} h\,(t - t_0)\,, \quad \text{mod. } \varkappa\,,$$

wo a und t_0 zwei willkürliche Constanten sind, h und $\varkappa$ zwei Constanten, die in gewisser Weise von a abhängen. Aus dieser Annahme für u ergiebt sich nämlich

$$\frac{\partial^2 u}{dt^2} = -h^2 u \left(1 - 2\varkappa^2 + \frac{2\varkappa^2}{a^2}\, u^2\right)$$

und diese Gleichung wird mit 24) identisch, wenn man

$$2\varkappa^2 = \frac{m^2\pi^2 a^2}{m^2\pi^2 a^2 + 4\,l\,\omega'}\,,$$

$$h^2 = \frac{m^2\pi^2}{4\,l^4}\,\frac{E}{\mu}\left(m^2\pi^2 a^2 + 4\,l\,\omega'\right)$$

macht.

§ 8.

Wir wenden uns zur Erörterung des Falles, auf den schon hingewiesen wurde, dass die Spannung der Saite so gross ist, dass in der Gleichung 23) das zweite Glied des Factors von $\frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2}$ gegen das erste vernachlässigt werden kann. Die genannte Gleichung ist dann

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\mu} \frac{\omega'}{l} \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2}.$$

Dazu kommen die Bedingungen, dass ξ für $s = 0$ und für $s = l$ verschwindet.

Dieselbe Differentialgleichung haben wir schon mehrmals zu behandeln gehabt, zuletzt bei der Untersuchung der Longitudinal- und Torsions-Schwingungen eines elastischen Stabes; unter den dort betrachteten Fällen befindet sich auch der, dass dieselben Grenzbedingungen, wie hier, zu erfüllen sind. Die für diesen Fall angegebenen particulären Lösungen gelten auch hier, und auch hier gilt, was dort über die möglichen einfachen Töne und die entsprechenden Knoten gesagt ist. Aus den bezeichneten particulären Lösungen wollen wir nun für die transversal schwingende Saite allgemeinere zusammensetzen. Um die Formeln etwas zu kürzen, führen wir dabei solche Einheiten der Länge und der Zeit ein, dass $l = \pi$ und die Dauer einer einfachen Schwingung beim Grundton $= \pi$ wird. Eine particuläre Lösung ist dann

$$\xi = \sin mt \sin ms,$$

eine andere

$$\xi = \cos mt \sin ms,$$

wo m irgend eine positive ganze Zahl bedeutet; eine Lösung ist daher auch

$$\xi = \sum \left(A_m \sin mt + B_m \cos mt\right) \sin ms,$$

wo A_m, B_m willkürliche Constanten sind und die Summe in Bezug auf m von $m = 1$ bis $m = \infty$ zu nehmen ist. Diese Lösung lässt sich der Bedingung anpassen, dass ξ und $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ für $t = 0$ und für die ganze Saite beliebig gegebene Functionen von s sind. Gesetzt, es sei für $t = 0$

$$\xi = U, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = U',$$

wo U und U' Functionen von s bedeuten, die von $s = 0$ bis $s = \pi$ beliebig gegeben sind, so wird erfordert, dass für dieses Intervall

$$\begin{aligned} U &= \sum B_m \sin ms \\ U' &= \sum m A_m \sin ms \end{aligned} \qquad 25)$$

ist. Vorausgesetzt, dass die Functionen U und U' in dieser Weise darstellbar sind, lassen sich die Werthe, die den Constanten A_m und B_m zu geben sind, leicht finden mit Hülfe des Satzes, dass, wenn m und m' zwei verschiedene ganze Zahlen sind,

$$\int_0^\pi \sin ms \sin m's\, ds = 0\,,$$

und, wenn m eine beliebige ganze Zahl ist,

$$\int_0^\pi \sin^2 ms\, ds = \frac{\pi}{2}$$

ist. Man beweist diesen Satz leicht, indem man benutzt, dass

$$2 \sin ms \sin m's = \cos (m - m')\, s - \cos (m + m')\, s$$
$$2 \sin^2 ms = 1 - \cos 2\, ms$$

ist. Mit seiner Hülfe findet man aus 25)

$$B_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi U \sin ms\, ds$$

$$m A_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi U' \sin ms\, ds.$$

Dass U und U' immer in der gedachten Weise darstellbar sind, hat zuerst Dirichlet*) streng bewiesen, indem er gezeigt hat, dass die unendliche Reihe (eine sogenannte Fourier'sche Reihe)

$$\sum C_m \sin ms\,,$$

in der die Coefficienten durch die Gleichung

$$C_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(s) \sin ms\, ds$$

bestimmt sind, wo $f(s)$ eine beliebige überall einwerthige, endliche und stetige Function von s bedeutet, für alle Werthe von s zwischen 0 und π gegen $f(s)$ convergirt.

Wir erwähnen noch eine andere Form der Lösung des behandelten Problems der Saitenschwingungen. Behalten wir die zuletzt gebrauchten Einheiten der Länge und der Zeit bei, d. h. setzen wir wieder die Länge der Saite und die Dauer einer einfachen Schwingung des Grundtons $= \pi$, so ist die Differentialgleichung für die Verrückung ξ

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2}$$

und das allgemeine Integral derselben

$$\xi = \varphi(t + s) + \psi(t - s)\,,$$

*) Dove's Repertorium der Physik I, 152; Crelle's Journal, Bd. 4, p. 157.

wo φ und ψ zwei willkürliche Functionen der beigesetzten Argumente bedeuten. Aus der Bedingung, dass für $s = 0$ immer ξ verschwindet, folgt

$$0 = \varphi(t) + \psi(t),$$

also

$$\xi = \varphi(t + s) - \varphi(t - s),$$

und aus der Bedingung, dass auch für $s = \pi$ immer $\xi = 0$ ist,

$$\varphi(t + \pi) = \varphi(t - \pi)$$

oder

$$\varphi(x + 2\pi) = \varphi(x);$$

d. h. φ ist eine um 2π periodische Function. Es würde hiernach φ, und damit ξ, vollständig bestimmt sein, wenn $\varphi(x)$ für das Intervall von $x = -\pi$ bis $x = +\pi$ ermittelt wäre. Hierzu führt die Kenntniss des Anfangszustandes der Saite. Es sei für $t = 0$ wieder

$$\xi = U, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = U',$$

wo U und U' Functionen von s bedeuten, die von $s = 0$ bis $s = \pi$ gegeben sind. Es muss dann für dieses Intervall

$$U = \varphi(s) - \varphi(-s)$$
$$U' = \varphi'(s) - \varphi'(-s)$$

sein, wenn φ' den nach dem Argumente genommenen Differentialquotienten der Function φ bedeutet. Multiplicirt man die letzte Gleichung mit ds und integrirt sie, so erhält man

$$\int^{s} U' ds = \varphi(s) + \varphi(-s),$$

wo die untere Grenze des Integrals eine willkürliche Constante ist, und dann weiter

$$\varphi(s) = \tfrac{1}{2} U + \tfrac{1}{2}\int^{s} U' ds$$
$$\varphi(-s) = -\tfrac{1}{2} U + \tfrac{1}{2}\int^{s} U' ds.$$

Durch diese Gleichungen ist $\varphi(s)$ für das Integral von $s = -\pi$ bis $s = +\pi$, und somit allgemein, bestimmt bis auf eine additive Constante; der Werth dieser ist aber ohne Einfluss auf den Werth von ξ, da dieses der Differenz zweier Werthe von φ gleich ist.

Dreissigste Vorlesung.

(Gleichgewicht und Bewegung einer unendlich dünnen, ursprünglich ebenen, isotropen Platte. Dilatationen eines kleinen Theiles der Platte. Potential der durch die Dilatationen erzeugten Kräfte. Unendlich kleine Formänderung. Gleichgewicht bei longitudinalen Verrückungen. Differentialgleichungen für die Transversalschwingungen einer freien Platte. Integration derselben für den Fall, dass die Platte kreisförmig ist. Transversalschwingungen einer gespannten Membran.)

§ 1.

Aehnliche Betrachtungen, wie wir sie in Bezug auf einen unendlich dünnen, elastischen Stab in den letzten Vorlesungen durchgeführt haben, lassen sich auch in Bezug auf eine unendlich dünne, elastische Platte anstellen. Mit dem Gleichgewicht und der Bewegung einer solchen Platte wollen wir uns jetzt beschäftigen, dabei aber allein den Fall ins Auge fassen, dass dieselbe in ihrem natürlichen Zustande eben ist.

In der *Mittelfläche* der Platte, d. h. in der Fläche, die in der Mitte zwischen den parallelen Oberflächen derselben sich befindet, denken wir uns bei dem natürlichen Zustande ein rechtwinkliges Coordinatensystem und nennen s_1 und s_2 die Coordinaten eines Punktes P der Mittelfläche in Bezug auf dieses. Wir stellen uns ferner 3 Linienelemente, 1, 2, 3, vor, welche von dem Punkte P ausgehen, und von denen die beiden ersten den Achsen der s_1 und s_2 parallel sind, während das dritte senkrecht auf diesen steht. Nach der Formänderung der Platte sollen diese Linienelemente die Achsen eines rechtwinkligen Coordinatensystems bestimmen, auf welches wir die Punkte in der Nähe von P beziehen; P soll der Anfangspunkt sein, das Linienelement 1 in der x-Achse liegen und die Ebene der Elemente 1 und 2 die xy-Ebene bilden; die letztere berührt dann die durch die Formänderung gekrümmte Mittelfläche im Punkte P, und die y-Achse bildet einen unendlich kleinen Winkel mit dem Element 2, die z-Achse einen unendlich kleinen Winkel mit dem Element 3. In Bezug auf dieses Coordinatensystem seien $x+u$, $y+v$, $z+w$ die Coordinaten eines materiellen Punktes der Platte nach der Formänderung, während x, y, z die Coordinaten desselben materiellen Punktes in Bezug auf dasselbe Coordinatensystem sein sollen, wenn die Platte in ihrem natürlichen Zustande und in *der* Lage sich befindet, bei der die Linienelemente 1, 2, 3 in die Achsen

der x, y, z fallen. Es sind dann u, v, w solche Functionen von x, y, z, dass für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \qquad 1)$$

wird. Ferner seien wieder ξ, η, ζ die Coordinaten des Punktes P nach der Formänderung in Bezug auf ein beliebiges im Raume festes Coordinatensystem und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ die Cosinus der Winkel, welche die Achsen der x, y, z mit den Achsen der ξ, η, ζ bilden, so dass die Indices 1, 2, 3 den Buchstaben x, y, z, die Buchstaben α, β, γ den Buchstaben ξ, η, ζ entsprechen. In Bezug auf das System der ξ, η, ζ sind die Coordinaten des materiellen Punktes, der durch die Werthe von $s_1 + x$, $s_2 + y$, z charakterisirt ist, nach der Formänderung

$$\begin{aligned}
&\xi + \alpha_1 (x + u) + \alpha_2 (y + v) + \alpha_3 (z + w) \\
&\eta + \beta_1 (x + u) + \beta_2 (y + v) + \beta_3 (z + w) \qquad 2) \\
&\zeta + \gamma_1 (x + u) + \gamma_2 (y + v) + \gamma_3 (z + w).
\end{aligned}$$

Es sind diese Grössen Functionen von $s_1 + x$ und $s_2 + y$ und daher sind ihre Differentialquotienten nach x gleich denen nach s_1 und ihre Differentialquotienten nach y gleich denen nach s_2. So ergeben sich die beiden folgenden Systeme von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial x} + \alpha_3 \frac{\partial w}{\partial x} &= \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial s_1} + \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial s_1} + \alpha_3 \frac{\partial w}{\partial s_1} \\
&\quad + \frac{\partial \xi}{\partial s_1} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_1}(x + u) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial s_1}(y + v) + \frac{\partial \alpha_3}{\partial s_1}(z + w) \\
\beta_1 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \beta_2 \frac{\partial v}{\partial x} + \beta_3 \frac{\partial w}{\partial x} &= \beta_1 \frac{\partial u}{\partial s_1} + \beta_2 \frac{\partial v}{\partial s_1} + \beta_3 \frac{\partial w}{\partial s_1} \\
&\quad + \frac{\partial \eta}{\partial s_1} + \frac{\partial \beta_1}{\partial s_1}(x + u) + \frac{\partial \beta_2}{\partial s_1}(y + v) + \frac{\partial \beta_3}{\partial s_1}(z + w) \\
\gamma_1 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \gamma_2 \frac{\partial v}{\partial x} + \gamma_3 \frac{\partial w}{\partial x} &= \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial s_1} + \gamma_2 \frac{\partial v}{\partial s_1} + \gamma_3 \frac{\partial w}{\partial s_1} \\
&\quad + \frac{\partial \zeta}{\partial s_1} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial s_1}(x + u) + \frac{\partial \gamma_2}{\partial s_1}(y + v) + \frac{\partial \gamma_3}{\partial s_1}(z + w)
\end{aligned}$$

und 3)

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial y} + \alpha_2 \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \alpha_3 \frac{\partial w}{\partial y} &= \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial s_2} + \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial s_2} + \alpha_3 \frac{\partial w}{\partial s_2} \\
&\quad + \frac{\partial \xi}{\partial s_2} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_2}(x + u) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial s_2}(y + v) + \frac{\partial \alpha_3}{\partial s_2}(z + w) \\
\beta_1 \frac{\partial u}{\partial y} + \beta_2 \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \beta_3 \frac{\partial w}{\partial y} &= \beta_1 \frac{\partial u}{\partial s_2} + \beta_2 \frac{\partial v}{\partial s_2} + \beta_3 \frac{\partial w}{\partial s_2} \\
&\quad + \frac{\partial \eta}{\partial s_2} + \frac{\partial \beta_1}{\partial s_2}(x + u) + \frac{\partial \beta_2}{\partial s_2}(y + v) + \frac{\partial \beta_3}{\partial s_2}(z + w) \\
\gamma_1 \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma_2 \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \gamma_3 \frac{\partial w}{\partial y} &= \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial s_2} + \gamma_2 \frac{\partial v}{\partial s_2} + \gamma_3 \frac{\partial w}{\partial s_2} \\
&\quad + \frac{\partial \zeta}{\partial s_2} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial s_2}(x + u) + \frac{\partial \gamma_2}{\partial s_2}(y + v) + \frac{\partial \gamma_3}{\partial s_2}(z + w).
\end{aligned}$$

Die Gleichungen eines jeden dieser beiden Systeme multiplicire man einmal mit α_1, β_1, γ_1, dann mit α_2, β_2, γ_2, dann mit α_3, β_3, γ_3 und addire jedesmal. Dabei setze man

$$1 + \sigma_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial s_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial s_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial s_1}\right)^2}$$

$$1 + \sigma_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial s_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial s_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial s_2}\right)^2}. \qquad 4)$$

Es verhalten sich aber $\frac{\partial \xi}{\partial s_1} : \frac{\partial \eta}{\partial s_1} : \frac{\partial \zeta}{\partial s_1}$ wie die Cosinus der Winkel, die das Linienelement 1 nach der Formänderung mit den Achsen der ξ, η, ζ bildet, und da dieses Linienelement auch nach der Formänderung in die x-Achse fällt, so ist

$$\frac{\partial \xi}{\partial s_1} : \frac{\partial \eta}{\partial s_1} : \frac{\partial \zeta}{\partial s_1} = \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 .$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial \xi}{\partial s_1} = \alpha_1 (1 + \sigma_1), \quad \frac{\partial \eta}{\partial s_1} = \beta_1 (1 + \sigma_1), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial s_1} = \gamma_1 (1 + \sigma_1). \qquad 5)$$

Bezeichnet man durch $(2, \xi)$, $(2, \eta)$, $(2, \zeta)$ die Winkel, die das Linienelement 2 nach der Formänderung mit den Achsen der ξ, η, ζ bildet, so hat man

$$\frac{\partial \xi}{\partial s_2} : \frac{\partial \eta}{\partial s_2} : \frac{\partial \zeta}{\partial s_2} = \cos (2, \xi) : \cos (2, \eta) : \cos (2, \zeta),$$

und daher

$$\frac{\partial \xi}{\partial s_2} = (1 + \sigma_2) \cos (2, \xi), \; \frac{\partial \eta}{\partial s_2} = (1 + \sigma_2) \cos (2, \eta), \; \frac{\partial \zeta}{\partial s_2} = (1 + \sigma_2) \cos (2, \zeta).$$

Die Cosinus der Winkel, welche das Linienelement 2 nach der Formänderung mit den Achsen der x, y, z bildet, findet man aber aus den Gleichungen 7) der zehnten Vorlesung bei Rücksicht auf die Gleichungen 27a) der eilften (in denen u, v, w für ξ, η, ζ gesetzt zu denken ist) bei Vernachlässigung von Grössen, die von höherer Ordnung unendlich klein sind, als die stattfindenden Dilatationen

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0, \quad 1, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0,$$

wo $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0$ und $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0$ die Werthe bedeuten, die $\frac{\partial u}{\partial y}$ und $\frac{\partial w}{\partial y}$ für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ erhalten. Der zweite von diesen Werthen verschwindet nach 1); bezeichnet man den ersten mit τ, wo dann τ den unendlich kleinen Winkel bedeutet, um den der Winkel zwischen den Linienelementen 1 und 2 nach der Formänderung von einem rechten sich unterscheidet, so folgt hieraus

$$\cos (2, \xi) = \alpha_2 + \alpha_1 \tau, \quad \cos (2, \eta) = \beta_2 + \beta_1 \tau, \quad \cos (2, \zeta) = \gamma_2 + \gamma_1 \tau$$

und daher

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial s_2} &= (\alpha_2 + \alpha_1 \tau)(1 + \sigma_2) \\
\frac{\partial \eta}{\partial s_2} &= (\beta_2 + \beta_1 \tau)(1 + \sigma_2) \\
\frac{\partial \zeta}{\partial s_2} &= (\gamma_2 + \gamma_1 \tau)(1 + \sigma_2).
\end{aligned} \tag{6}$$

Setzt man ferner

$$\begin{aligned}
p_1 &= \alpha_3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial s_1} + \beta_3 \frac{\partial \beta_2}{\partial s_1} + \gamma_3 \frac{\partial \gamma_2}{\partial s_1} \\
q_1 &= \alpha_1 \frac{\partial \alpha_3}{\partial s_1} + \beta_1 \frac{\partial \beta_3}{\partial s_1} + \gamma_1 \frac{\partial \gamma_3}{\partial s_1} \\
r_1 &= \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_1} + \beta_2 \frac{\partial \beta_1}{\partial s_1} + \gamma_2 \frac{\partial \gamma_1}{\partial s_1} \\
p_2 &= \alpha_3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial s_2} + \beta_3 \frac{\partial \beta_2}{\partial s_2} + \gamma_3 \frac{\partial \gamma_2}{\partial s_2} \\
q_2 &= \alpha_1 \frac{\partial \alpha_3}{\partial s_2} + \beta_1 \frac{\partial \beta_3}{\partial s_2} + \gamma_1 \frac{\partial \gamma_3}{\partial s_2} \\
r_2 &= \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_2} + \beta_2 \frac{\partial \beta_1}{\partial s_2} + \gamma_2 \frac{\partial \gamma_1}{\partial s_2},
\end{aligned} \tag{7}$$

so werden die auf die angegebene Weise aus den Gleichungen 3) gebildeten Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial s_1} + q_1 (z + w) - r_1 (y + v) + \sigma_1 \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial s_1} + r_1 (x + u) - p_1 (z + w) \\
\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial s_1} + p_1 (y + v) - q_1 (x + u)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial s_2} + q_2 (z + w) - r_2 (y + v) + \tau (1 + \sigma_2) \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial s_2} + r_2 (x + u) - p_2 (z + w) + \sigma_2 \\
\frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial s_2} + p_2 (y + v) - q_2 (x + u).
\end{aligned}$$

Betrachtungen, die mit denen übereinstimmen, welche wir an die entsprechenden Gleichungen bei der Untersuchung eines unendlich dünnen Stabes geknüpft haben, zeigen, dass diese Gleichungen in die folgenden sich vereinfachen lassen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= q_1 z - r_1 y + \sigma_1 & \frac{\partial u}{\partial y} &= q_2 z - r_2 y + \tau \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= r_1 x - p_1 z & \frac{\partial v}{\partial y} &= r_2 x - p_2 z + \sigma_2 \\
\frac{\partial w}{\partial x} &= p_1 y - q_1 x & \frac{\partial w}{\partial y} &= p_2 y - q_2 x.
\end{aligned}$$

Hier tritt aber noch eine weitere Vereinfachung ein; die für

$\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$ und $\frac{\partial w}{\partial y}$ aufgestellten Ausdrücke müssen die nach x und y genommenen Differentialquotienten derselben Functionen sein; daraus folgt

$$r_1 = 0\,, \quad r_2 = 0\,, \quad p_1 + q_2 = 0$$

und also

$$\frac{\partial u}{\partial x} = q_1 z + \sigma_1 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -p_1 z + \tau$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -p_1 z \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -p_2 z + \sigma_2$$
$$\frac{\partial w}{\partial x} = p_1 y - q_1 x \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = p_2 y + p_1 x.$$

Durch Integration findet man hieraus

$$u = u_0 - p_1 y z + q_1 z x + \sigma_1 x + \tau y$$
$$v = v_0 - p_2 y z - p_1 z x + \sigma_2 y$$
$$w = w_0 - \frac{q_1}{2} x^2 + [illegible]\, x y + \frac{p_2}{2} y^2,$$

wo u_0, v_0, w_0 die Werthe sind, die u, v, w für $x = 0$ und $y = 0$ annehmen. Man hat hiernach

$$\begin{aligned} x_x &= q_1 z + \sigma_1 & y_z &= \frac{dv_0}{dz} \\ y_y &= -p_2 z + \sigma_2 & z_x &= \frac{du_0}{dz} \\ z_z &= \frac{dw_0}{dz} & x_y &= -2 p_1 z + \tau. \end{aligned} \tag{8)}$$

Alle diese Grössen sind von x und y unabhängig; dieselbe Eigenschaft haben daher auch die Druckcomponenten X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y, und die Gleichungen 8) der achtundzwanzigsten Vorlesung werden

$$\frac{dX_z}{dz} = 0 \qquad \frac{dY_z}{dz} = 0 \qquad \frac{dZ_z}{dz} = 0.$$

Nun wollen wir annehmen, dass auf die beiden Oberflächen der Platte Druckkräfte von solcher Grössenordnung wirken, dass sie bei einem Körper, dessen Dimensionen alle von gleicher Ordnung sind, nur Dilatationen erzeugen würden, die unendlich klein sind gegen die Dilatationen, die in der Platte stattfinden. Man darf dann, zunächst für die Oberflächen der Platte, und dann in Folge der abgeleiteten Gleichungen allgemein

$$X_z = 0, \quad Y_z = 0, \quad Z_z = 0 \tag{9)}$$

setzen; man vernachlässigt dabei in den Dilatationen und in dem Ausdrucke des Potentials der durch diese erzeugten Kräfte, den wir zu bilden haben werden, nur Glieder, welche unendlich klein sind gegen die beibehaltenen.

Die Gleichungen 9) führen in Verbindung mit der Bedingung, dass u_0, v_0, w_0 für $z = 0$ verschwinden, die aus 1) sich ergiebt, zur Bestimmung von u_0, v_0, w_0. Ist die Substanz der Platte, wie wir voraussetzen wollen, isotrop, so sind diese Gleichungen

$$x_z = 0, \quad y_z = 0, \quad z_z + \frac{\theta}{1+\theta}(x_x + y_y) = 0,$$

oder

$$\frac{du_0}{dz} = 0, \quad \frac{dv_0}{dz} = 0, \quad \frac{dw_0}{dz} = \frac{\theta}{1+\theta}\Big((p_2 - q_1)\,z - \sigma_1 - \sigma_2\Big),$$

und es ergiebt sich aus 8)

$$\begin{aligned} x_x &= q_1 z + \sigma_1 & y_z &= 0 \\ y_y &= -p_2 z + \sigma_3 & z_x &= 0 \\ z_z &= \frac{\theta}{1+\theta}\Big((p_2 - q_1)\,z - \sigma_1 - \sigma_2\Big) & x_y &= -2p_1 z + \tau. \end{aligned}$$

Da

$$f = -K\left\{x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \tfrac{1}{2}y_z^2 + \tfrac{1}{2}z_x^2 + \tfrac{1}{2}x_y^2 + \theta(x_x + y_y + z_z)^2\right\},$$

so folgt hieraus

$$f = -K\left\{(q_1 z + \sigma_1)^2 + (p_2 z - \sigma_2)^2 + \tfrac{1}{2}(2p_1 z - \tau)^2 \right.$$
$$\left. + \frac{\theta}{1+\theta}\Big((p_2 - q_1)\,z - \sigma_1 - \sigma_2\Big)^2\right\}.$$

Wir schreiben die Gleichungen der Oberflächen der Platte

$$z = h \quad \text{und} \quad z = -h$$

und setzen

$$F = \int_{-h}^{+h} f\,dz;$$

dann wird

$$F = -\tfrac{2}{3}Kh^3\Big(q_1^2 + p_2^2 + 2p_1^2 + \frac{\theta}{1+\theta}(q_1 - p_2)^2\Big)$$
$$-2Kh\Big(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \tfrac{1}{2}\tau^2 + \frac{\theta}{1+\theta}(\sigma_1 + \sigma_2)^2\Big),$$

und das Integral

$$\int F\,ds_1\,ds_2,$$

ausgedehnt über die Mittelfläche der Platte, ist das Potential der durch die Formänderung dieser erzeugten Kräfte. Die 6 unbekannten Grössen σ_1, σ_2, τ, p_1, p_2, q_1, welche Functionen von s_1, s_2 sind und in dem Ausdrucke von F vorkommen, sind alle durch die Differentialquotienten von ξ, η, ζ nach s_1 und s_2 ausdrückbar: σ_1 und σ_2 sind durch die Gleichungen 4) bestimmt, τ ergiebt sich aus der Gleichung

$$(1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2)\,\tau = \frac{\partial \xi}{\partial s_1}\frac{\partial \xi}{\partial s_2} + \frac{\partial \eta}{\partial s_1}\frac{\partial \eta}{\partial s_2} + \frac{\partial \zeta}{\partial s_1}\frac{\partial \zeta}{\partial s_2}, \qquad 10)$$

die aus den Gleichungen 5) und 6) folgt, wenn man diese mit einander multiplicirt und addirt; die Gleichungen 5) lehren dann weiter α_1, β_1, γ_1, und die Gleichungen 6) α_2, β_2, γ_2 kennen; aus diesen sechs Cosinus sind die Cosinus α_3, β_3, γ_3 nach bekannten Formeln zu berechnen; die Gleichungen 7) erlauben dann endlich p_1, p_2, q_1 auszudrücken.

Ist die Platte endlich gekrümmt, so hat man bei der Berechnung der Gestalten, die sie haben kann, statt der Gleichungen 4) und 10), da σ_1, σ_2, τ unendlich klein sind, die Gleichungen

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial s_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial s_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial s_1}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial s_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial s_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial s_2}\right)^2 = 1$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial s_1}\frac{\partial \xi}{\partial s_2} + \frac{\partial \eta}{\partial s_1}\frac{\partial \eta}{\partial s_2} + \frac{\partial \zeta}{\partial s_1}\frac{\partial \zeta}{\partial s_2} = 0$$

zu setzen, welche aussprechen, dass σ_1, σ_2, τ verschwinden, d. h. dass die Elemente der Mittelfläche keine Deformation erleiden. Eine Fläche, die dieser Bedingung genügt, nennt man eine *abwickelbare* Fläche. Um die Beziehungen zwischen der Gestalt der Platte und den Kräften und Druckkräften zu finden, die auf die Platte wirken müssen, um Gleichgewicht hervorzubringen, kann man von dem Princip der virtuellen Verrückungen ausgehen; auch dabei darf man $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$, $\tau = 0$ annehmen, weil bei dieser Annahme den Gleichungen genügt werden kann, welche das Princip der virtuellen Verrückungen ergiebt. In dem Falle, dass die Platte endlich gekrümmt ist, darf man daher

$$F = -\tfrac{2}{3} K h^3 \left(q_1^2 + p_2^2 + 2p_1^2 + \frac{\theta}{1+\theta}(q_1 - p_2)^2\right)$$

setzen. Auf diesen Fall gehen wir nicht näher ein, sondern verweisen in Bezug auf ihn auf die „Theorie der Elasticität fester Körper“ von Clebsch, der zuerst die endlichen Formänderungen unendlich dünner Platten untersucht hat.

§ 2.

Wenn die Platte unendlich wenig gekrümmt ist, so handelt es sich darum, die unendlich kleinen Verrückungen zu finden, die die Punkte ihrer Mittelfläche erlitten haben, und hierbei darf man im Allgemeinen die Grössen σ_1, σ_2, τ nicht vernachlässigen. Wir wollen nun für diesen Fall den Werth von F bilden. Dabei möge x und y für s_1 und s_2 geschrieben werden.

Das Achsensystem der ξ, η, ζ denken wir uns so gewählt, dass ζ unendlich klein, ξ unendlich wenig von x, η unendlich wenig von y verschieden ist, und setzen

$$\xi = x + u, \qquad \eta = y + v.$$

Wir verfolgen zuerst die Annahme, dass u, v und ζ auch gegen die Dicke der Platte, d. h. gegen h unendlich klein sind, eine Annahme, die deshalb eine wesentliche ist, weil von den beiden Gliedern, aus denen F sich zusammensetzt, das eine den Factor h^3, das andere nur den Factor h hat. Bei dieser Annahme ist es ausreichend, in beiden Gliedern nur die ersten Potenzen der Differentialquotienten von u, v, ζ zu berücksichtigen. Die Gleichungen 4) und 10) geben dann

$$\sigma_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \sigma_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \tau = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

die Gleichungen 5) und 6)

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = 1 & \alpha_2 = -\frac{\partial v}{\partial x} & \alpha_3 = -\frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \beta_1 = \frac{\partial v}{\partial x} & \beta_2 = \quad 1 & \beta_3 = -\frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \gamma_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \gamma_2 = \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \gamma_3 = \quad 1, \end{array}$$

und endlich die Gleichungen 7)

$$p_1 = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \, \partial y} \quad p_2 = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \quad q_1 = -\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}.$$

Lassen wir die Voraussetzung fallen, dass u, v, ζ auch gegen h unendlich klein sind, so können wir für p_1, p_2, q_1, die nur in dem mit h^2 multiplicirten Gliede von F vorkommen, immer noch die eben abgeleiteten Ausdrücke setzen; bei der Berechnung von σ_1, σ_2, τ, die in dem Gliede von F vorkommen, das den Factor h enthält, müssen aber gewisse Terme höherer Ordnung berücksichtigt werden. Es werden in F nur Glieder vernachlässigt, welche unendlich klein gegen die beibehaltenen sind, wenn man

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 \\ \sigma_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 \\ \tau &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} \end{aligned} \tag{11}$$

setzt.

Wir berechnen nun die Arbeit der durch die Dilatationen erzeugten Kräfte für eine unendlich kleine Aenderung derselben, d. h. die Variation

$$\delta \iint F \, dx \, dy; \tag{12}$$

dieselbe besteht aus zwei Theilen, von denen der erste den Factor h^3, der zweite den Factor h enthält; wir entwickeln zuerst jenen Theil. Er ist

$$-\tfrac{1}{3} K h^3 \delta \int\int dx\, dy \left\{ \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\, \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)^2 + \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)^2 \right\}. \qquad 12\text{a)}$$

Mit jedem der Glieder, in welche dieser Ausdruck sich spalten lässt, können Transformationen nach dem Muster derer vorgenommen werden, die für das erste Glied angegeben werden sollen. Es ist

$$\delta \int\int dx\, dy \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right)^2 = 2\int\int dx\, dy\, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \delta\zeta}{\partial x^2}$$

$$= 2\int\int dx\, dy \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\frac{\partial \delta\zeta}{\partial x}\right) - \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}\frac{\partial \delta\zeta}{\partial x}\right)$$

$$= 2\int\int dx\, dy \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\frac{\partial \delta\zeta}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}\delta\zeta\right) + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4}\delta\zeta\right).$$

Nennt man dl ein Element des Umfanges der Mittelfläche der Platte, und n die nach dem Innern dieser gerichtete Normale von dl, so ist derselbe Ausdruck

$$= 2\int\int dx\, dy\, \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4}\delta\zeta - 2\int dl \cos(nx)\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\frac{\partial \delta\zeta}{\partial x} - \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}\delta\zeta\right).$$

Mit dem ersten Theile des hier vorkommenden einfachen Integrals nehmen wir noch eine Umformung vor. Wir schreiben dem Elemente dl eine von den beiden Richtungen zu, die wir ihm zuschreiben können, und zwar diejenige, die die x-Achse erhält, wenn die Coordinatenachsen so gedreht werden, dass die y-Achse der Normale n parallel wird; wir nennen ferner φ den Winkel, den eine Linie beschreibt, wenn sie aus einer Lage, in der sie der x-Achse parallel ist, in *dem* Sinne gedreht wird, bis sie parallel mit n ist, in dem sie um einen rechten Winkel gedreht werden muss, um der y-Achse parallel zu werden, wenn sie der x-Achse parallel war. Es ist dann

$$\frac{\partial \delta\zeta}{\partial x} = \frac{\partial \delta\zeta}{\partial l}\sin\varphi + \frac{\partial \delta\zeta}{\partial n}\cos\varphi, \quad \cos(nx) = \cos\varphi.$$

Benutzt man ferner, dass, da die Integration nach l über eine geschlossene Linie auszudehnen,

$$\int dl\, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\sin\varphi\cos\varphi\,\frac{\partial \delta\zeta}{\partial l} = -\int dl\, \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\sin\varphi\cos\varphi\right)\delta\zeta$$

ist, so findet man

$$\delta\int\int dx\, dy\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right)^2 = 2\int\int dx\, dy\,\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4}\delta\zeta - 2\int dl\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\cos^2\varphi\,\frac{\partial \delta\zeta}{\partial n} + 2\int dl\left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}\cos\varphi + \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\sin\varphi\cos\varphi\right)\right)\delta\zeta.$$

Transformirt man in entsprechender Weise die übrigen von den Gliedern, in die der Ausdruck 12a) sich zerlegen lässt, so findet man diesen Ausdruck

$$= -\tfrac{1}{3} K h^3 \frac{1+2\theta}{1+\theta} \int\!\!\int dx\, dy \left(\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4}\right) \delta\zeta$$

$$+ \tfrac{1}{3} K h^3 \int dl \left\{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \cos^2\varphi + 2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \sin\varphi \cos\varphi + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \sin^2\varphi + \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)\right\} \frac{\partial \delta\zeta}{\partial n} \qquad 13)$$

$$- \tfrac{1}{3} K h^3 \int dl \left\{\frac{\partial}{\partial l}\left(\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right) \sin\varphi\cos\varphi + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)\right) + \frac{1+2\theta}{1+\theta}\left(\left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \partial y^2}\right)\cos\varphi + \left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial y^3}\right)\sin\varphi\right)\right\} \delta\zeta .$$

Er bildet den einen Theil der durch 12) definirten Arbeit. Der andere Theil derselben, der den Factor h enthält, findet sich bei Rücksicht auf die Gleichungen 4) und 10)

$$= 4 K h \int\!\!\int dx\, dy \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\theta}{1+\theta}\frac{\partial(\sigma_1+\sigma_2)}{\partial x}\right) \delta u$$

$$+ 4 K h \int dl \left(\sigma_1 \cos\varphi + \tfrac{1}{2}\tau \sin\varphi + \frac{\theta}{1+\theta}(\sigma_1+\sigma_2)\cos\varphi\right) \delta u$$

$$+ 4 K h \int\!\!\int dx\, dy \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial y} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\theta}{1+\theta}\frac{\partial(\sigma_1+\sigma_2)}{\partial y}\right) \delta v$$

$$+ 4 K h \int dl \left(\sigma_2 \sin\varphi + \tfrac{1}{2}\tau \cos\varphi + \frac{\theta}{1+\theta}(\sigma_1+\sigma_2)\sin\varphi\right) \delta v \qquad 14)$$

$$+ 4 K h \int\!\!\int dx\, dy \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\sigma_1 + \tfrac{1}{2}\frac{\partial \zeta}{\partial y}\tau + \frac{\theta}{1+\theta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}(\sigma_1+\sigma_2)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\sigma_2 + \tfrac{1}{2}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\tau + \frac{\theta}{1+\theta}\frac{\partial \zeta}{\partial y}(\sigma_1+\sigma_2)\right)\right\} \delta\zeta$$

$$+ 4 K h \int dl \left\{\cos\varphi\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\sigma_1 + \tfrac{1}{2}\frac{\partial \zeta}{\partial y}\tau + \frac{\theta}{1+\theta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}(\sigma_1+\sigma_2)\right) + \sin\varphi\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\sigma_2 + \tfrac{1}{2}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\tau + \frac{\theta}{1+\theta}\frac{\partial \zeta}{\partial y}(\sigma_1+\sigma_2)\right)\right\} \delta\zeta.$$

Von den Ausdrücken 13) und 14), deren Summe die Arbeit der durch die Dilatationen erzeugten Kräfte für die durch die Werthe von δu, δv, $\delta\zeta$ bestimmten Verrückungen ist, wollen wir nun einige Anwendungen machen.

§ 3.

Wir denken uns eine Platte, auf die keine Kräfte und keine Druckkräfte wirken; die Punkte ihres Randes sind so befestigt, dass für sie $\zeta = 0$ ist, u und v gegebene Werthe haben; es sollen u, v, ζ für den Fall des Gleichgewichtes gefunden werden.

Den Gleichungen, welche das Princip der virtuellen Verrückungen giebt, wird genügt, wenn man

$$\zeta = 0$$

macht und u, v aus den Gleichungen

$$2(1+2\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1+\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(1+3\theta)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=0$$
$$2(1+2\theta)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+(1+\theta)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+(1+3\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=0 \qquad 15)$$

so bestimmt, dass sie für den Rand die gegebenen Werthe annehmen.

Eine Platte die unter den gedachten Verhältnissen sich befindet, nennt man *gespannt*; im Allgemeinen ist sie, wie man sagt, ungleichmässig gespannt; sie heisst *gleichmässig* gespannt, wenn

$$u=ax,\quad v=ay$$

ist, wo a eine Constante bedeutet, durch welche Ausdrücke den Gleichungen 15) offenbar genügt wird.

§ 4.

Die weiteren Anwendungen, die wir von den Ausdrücken 13) und 14) machen wollen, sollen sich auf die Schwingungen, und zwar die sogenannten *Transversalschwingungen* einer Platte beziehen. Wir machen dabei von dem Hamilton'schen Principe Gebrauch und bemerken zunächst, dass, wenn T die lebendige Kraft, μ die Dichtigkeit der Platte bedeutet,

$$T=\mu h\int\int dx\,dy\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2\right)$$

ist, die Integration über die Fläche der Platte ausgedehnt. Hieraus folgt

$$\delta\int T\,dt=-2\mu h\int\int\int dt\,dx\,dy\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u+\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\delta v+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\delta\zeta\right). \qquad 16)$$

Wir nehmen an, dass der Rand der Platte entweder fest oder frei ist, so dass keine Arbeit geleistet wird von Druckkräften, die auf diesen Rand wirken; dann ist das Hamilton'sche Princip durch die Gleichung

$$\delta\int T\,dt+\delta\int\int\int F\,dt\,dx\,dy=0 \qquad 17)$$

ausgesprochen, deren Glieder die durch 16), 13) und 14) bestimmten Werthe haben.

Wir wollen zuerst voraussetzen, dass der Rand der Platte frei und ζ auch gegen die Dicke der Platte unendlich klein ist; wir dürfen dann annehmen, dass u und v gleich Null sind; indem wir das thun, gelangen wir zu den Gleichungen für die *Transversalschwingungen* der Platte. Diese sind

$$0=\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}+\frac{4}{3}\,\frac{1+2\theta}{1+\theta}\,\frac{h^2K}{\mu}\left(\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4\zeta}{\partial y^4}\right)$$

und für den Rand

$$0 = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\cos^2\varphi + 2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\sin^2\varphi + \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial l}\left(\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)\right) \qquad 18)$$

$$+ \frac{1+2\theta}{1+\theta}\left(\left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \partial y^2}\right)\cos\varphi + \left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial y^3}\right)\sin\varphi\right).$$

Die Lösungen derselben zu finden, ist bis jetzt nur für den Fall, dass die Platte eine kreisförmige ist, gelungen. Man gelangt zu ihnen für diesen Fall auf dem folgenden Wege.

Man setze

$$\frac{2}{3}\,\frac{1+2\theta}{1+\theta}\,\frac{h^2 K}{\mu} = a^2$$

$$\zeta = U \sin(4\lambda^2 a t),$$

wo U eine Function von x und y, λ eine Constante bedeutet. Diese Annahme entspricht dem Falle, dass die Platte einen einfachen Ton giebt; die Dauer einer Doppelschwingung desselben ist

$$\frac{\pi}{2\lambda^2 a}.$$

Für U ergiebt sich dabei die partielle Differentialgleichung

$$16\lambda^4 U = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4};$$

zu dieser treten *die* Grenzbedingungen, die aus 18) entstehen, indem man U an Stelle von ζ schreibt. Die partielle Differentialgleichung lässt sich durch die zwei Gleichungen

$$4\lambda^2 V = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

$$4\lambda^2 U = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

ersetzen, und diese geben, wenn man sie addirt und subtrahirt und

$$U = S + D, \quad V = S - D$$

macht,

$$4\lambda^2 S = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}$$

$$-4\lambda^2 D = \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}.$$

Nun führe man statt der rechtwinkligen Coordinaten Polarcoordinaten r, ψ ein, so dass

$$x = r\cos\psi, \quad y = r\sin\psi$$

ist; dann erhält man

$$4\lambda^2 S = \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 S}{\partial \psi^2}$$

$$-4\lambda^2 D = \frac{\partial^2 D}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial D}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 D}{\partial \psi^2}.$$

Diesen Gleichungen wird genügt durch

$$S = A \cos n\psi X, \quad D = B \cos n\psi Y,$$

wenn n eine ganze Zahl, A und B willkürliche Constanten, X und Y Functionen von r bedeuten, die die Gleichungen

$$\frac{d^2 X}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dX}{dr} - \left(\frac{n^2}{r^2} + 4\lambda^2\right) X = 0$$

$$\frac{d^2 Y}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dY}{dr} - \left(\frac{n^2}{r^2} - 4\lambda^2\right) Y = 0$$

erfüllen. Setzt man

$$\lambda r = x,$$

so werden diese

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dX}{dx} - \left(\frac{n^2}{x^2} + 4\right) X = 0$$

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dY}{dx} - \left(\frac{n^2}{x^2} - 4\right) Y = 0.$$

Ein particuläres Integral der ersten von diesen Gleichungen findet man, indem man

$$X = A_0 x^\varkappa + A_2 x^{\varkappa+2} + A_4 x^{\varkappa+4} + \cdots$$

setzt; dann ist

$$\frac{dX}{dx} = \varkappa A_0 x^{\varkappa-1} + (\varkappa + 2) A_2 x^{\varkappa+1} + (\varkappa + 4) A_4 x^{\varkappa+3} + \cdots$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = \varkappa(\varkappa-1) A_0 x^{\varkappa-2} + (\varkappa+2)(\varkappa+1) A_2 x^\varkappa + (\varkappa+4)(\varkappa+3) A_4 x^{\varkappa+2} + \cdots$$

und die genannte Gleichung wird

$$\begin{aligned} 0 = & A_0\left(\varkappa^2 - n^2\right) x^{\varkappa-2} && - 4 A_0 x^\varkappa \\ & + A_2\left((\varkappa + 2)^2 - n^2\right) x^\varkappa && - 4 A_2 x^{\varkappa+2} \\ & + A_4\left((\varkappa + 4)^2 - n^2\right) x^{\varkappa+2} && - 4 A_4 x^{\varkappa+4} \\ & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

Man erfüllt sie, wenn man

$$\varkappa^2 - n^2 = 0$$

$$A_2\left((\varkappa + 2)^2 - n^2\right) = 4 A_0$$

$$A_4\left((\varkappa + 4)^2 - n^2\right) = 4 A_2$$

macht. Wir genügen diesen Gleichungen, indem wir

$$\varkappa = n$$

$$A_2 = \frac{A_0}{1 . n + 1}, \quad A_4 = \frac{A_2}{2 . n + 2}, \quad A_6 = \frac{A_4}{3 . n + 3}, \cdots$$

setzen und über A_0 nach Willkür verfügen. Ein particuläres Integral, das wir X_n nennen wollen, der für X aufgestellten Differentialgleichung ist daher

$$X_n = \frac{x^n}{1.2.3..n}\left(1 + \frac{x^2}{1.n+1} + \frac{x^4}{1.2.n+1.n+2} + \cdot\cdot\right)$$

und ein entsprechendes der für Y aufgestellten Differentialgleichung

$$Y_n = \frac{x^n}{1.2.3..n}\left(1 - \frac{x^2}{1.n+1} + \frac{x^4}{1.2.n+1.n+2} - \cdot\cdot\right).$$

Man sieht leicht, dass diese beiden unendlichen Reihen für jeden Werth ihres Argumentes convergiren.

Andere particuläre Werthe von X und Y mögen noch erwähnt werden, obwohl sie bei dem vorliegenden Probleme eine Anwendung nicht finden. Man setze

$$X = W X_n,$$

also

$$\frac{dX}{dx} = W\frac{dX_n}{dx} + X_n\frac{dW}{dx}$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} = W\frac{d^2X_n}{dx^2} + 2\frac{dX_n}{dx}\frac{dW}{dx} + X_n\frac{d^2W}{dx^2}.$$

Diese Gleichungen multiplicire man der Reihe nach mit

$$-\left(\frac{n^2}{x^2} + 4\right), \quad \frac{1}{x}, \quad 1$$

und addire sie dann; da X und X_n Integrale der in Rede stehenden Differentialgleichung sind, so erhält man dadurch

$$X_n\frac{d^2W}{dx^2} + \left(\frac{X_n}{x} + 2\frac{dX_n}{dx}\right)\frac{dW}{dx} = 0$$

oder, wenn

$$\frac{dW}{dx} = W'$$

gesetzt wird,

$$\frac{dW'}{W'} + \left(\frac{1}{x} + 2\frac{\frac{dX_n}{dx}}{X_n}\right)dx = 0,$$

d. h.

$$\lg W' + \lg x + 2\lg X_n = \text{Const.}$$

oder

$$W' = \text{Const.}\frac{1}{xX_nX_n},$$

also

$$W = \text{Const.}\int^x \frac{dx}{xX_nX_n},$$

wo die untere Grenze des Integrales beliebig gewählt werden kann. Ein zweiter particulärer Werth von X ist daher

$$X = X_n\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{xX_nX_n}$$

und einer von Y

$$Y = Y_n \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x Y_n Y_n},$$

wo x_0 eine willkürliche Constante ist. Diese Werthe von X und Y werden aber, wie aus den Ausdrücken von X_n und Y_n hervorgeht, für $x = 0$, d. h. für $r = 0$ unendlich und können daher keine Anwendung finden, wenn die Platte, wie wir voraussetzen, eine volle Kreisfläche bildet.

Wir setzen also

$$S = A \cos n\psi X_n, \quad D = B \cos n\psi Y_n$$

und suchen nun die Constanten A, B, λ so zu bestimmen, dass den beiden Grenzbedingungen genügt wird.

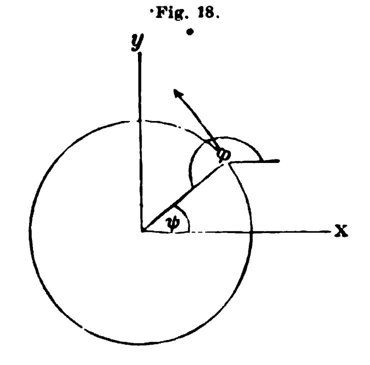


Fig. 18.

Wir nennen den Radius der Platte a. Bei Rücksicht auf die Bestimmungen, die wir bei Ableitung des Ausdruckes 13) getroffen haben über den Sinn, in dem l wächst, und über den Winkel φ, haben wir dann, wie ein Blick auf die nebenstehende Figur lehrt,

$$l = a\psi \quad \text{und} \quad \varphi = 180^0 + \psi.$$

Mit Hülfe hiervon werden die aus 18) herzuleitenden Grenzbedingungen

$$0 = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2}\right)$$

$$0 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \psi} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \psi}\right) + \frac{1+2\theta}{1+\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2}\right),$$

oder, wenn man benutzt, dass

$$4\lambda^2 V = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2}$$

ist,

$$0 = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + 4\lambda^2 \frac{\theta}{1+\theta} V$$

$$0 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 U}{\partial r \partial \psi^2} - \frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} + 4\lambda^2 \frac{1+2\theta}{1+\theta}\frac{\partial V}{\partial r}.$$

Nun drücke man U und V durch S und D, diese durch X_n, Y_n, und die zweiten Differentialquotienten von X_n und Y_n, die dann auftreten, mit Hülfe der für diese Functionen aufgestellten Differentialgleichungen durch sie selbst und ihre ersten Differentialquotienten aus. Setzt man noch

$$\frac{1+2\theta}{1+\theta} = \gamma,$$

so findet man dann als die für $r = \alpha$, d. h. $x = \lambda\alpha$ zu erfüllenden Gleichungen

$$0 = A\left(n^2 X_n - x\,(n^2 - 4\gamma x^2)\,\frac{dX_n}{dx}\right) + B\left(n^2 Y_n - x\,(n^2 + 4\gamma x^2)\,\frac{dY_n}{dx}\right)$$

$$0 = A\left((n^2 + 4\gamma x^2)\,X_n - x\,\frac{dX_n}{dx}\right) + B\left((n^2 - 4\gamma x^2)\,Y_n - x\,\frac{dY_n}{dx}\right).$$

Nennt man die Determinante derselben $\varDelta$, so hat man aus der transcendenten Gleichung

$$\varDelta = 0$$

λ zu bestimmen und dann aus einer von ihnen das Verhältniss $A : B$.

Ist λ_{nm} eine Wurzel jener Gleichung und setzt man

$$W_{nm} = X_n\left[(n^2 - 4\gamma x^2)\,Y_n - x\,\frac{dY_n}{dx}\right]x = \alpha\lambda_{nm}$$
$$- Y_n\left[(n^2 + 4\gamma x^2)\,X_n - x\,\frac{dX_n}{dx}\right]x = \alpha\lambda_{nm},$$

so ist

$$\zeta = C \cdot \sin\,(4\lambda^2{}_{nm}\,a t)\;W_{nm}\cos n\psi,$$

wo C eine willkürliche Constante bedeutet. Die *Knotenlinien*, die dem durch λ_{nm} bestimmten Tone entsprechen, haben zu Gleichungen

$$\cos n\psi = 0 \quad \text{und} \quad W_{nm} = 0;$$

die erste von diesen stellt ein System von n Durchmessern dar, die gleiche Winkel mit einander bilden, die zweite ein System von concentrischen Kreisen. In Bezug auf die numerische Berechnung der Töne und Knotenkreise möge auf die unten genannte Abhandlung*) verwiesen werden.

§ 5.

Wir wollen schliesslich die Differentialgleichung für die Transversalschwingungen einer *gespannten Membran* aufstellen. Wir gelangen zu dieser, indem wir uns eine Platte vorstellen, die, nachdem ihren Theilen Verrückungen in ihrer Ebene, u und v, ertheilt sind, die den Gleichungen 15) genügen, an ihrem Rande befestigt ist. Diese Verrückungen sollen so gross gegen die Dicke der Platte sein, dass bei der Bildung der Gleichung 17) der Ausdruck 13) gegen den Ausdruck 14) vernachlässigt werden kann, und so gross gegen ζ, dass die Gleichungen 11)

$$\sigma_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \sigma_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \tau = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

*) Kirchhoff, Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe; Crelle's Journal, Bd. 40.

geschrieben werden können. Die Gleichung 17) wird dann erfüllt, wenn man u und v als unabhängig von der Zeit annimmt und ζ aus der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{2K}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)$$
$$+ \frac{2K}{\mu}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)$$

und der Bedingung bestimmt, dass es am Rande verschwindet.

Die Verrückungen u, v müssen den Differentialgleichungen 15) genügen, können dabei aber noch sehr mannichfaltige Functionen von x und y sein. In dem Falle, auf den oben schon hingewiesen wurde, dass die Membran *gleichmässig gespannt* ist, kann man

$$u = ax, \qquad v = ay$$

setzen, wo a eine Constante bezeichnet; dann wird die Differentialgleichung für ζ

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{2K}{\mu}\frac{1+3\theta}{1+\theta}\, a \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)$$

Ohne Schwierigkeit lässt sich dieselbe lösen, wenn die Membran rechteckig oder kreisförmig ist; die Töne, die die Membran geben kann, und die diesen entsprechenden Knotenlinien lassen sich dann leicht berechnen. Bei der rechteckigen Gestalt hat man es dabe nur mit trigonometrischen Functionen, bei der kreisförmigen mit *den* Functionen zu thun, die wir bei der Untersuchung der Schwingungen einer kreisförmigen Platte durch Y bezeichnet haben; das sind die sogenannten Bessel'schen Functionen. Die Knotenlinien der rechteckigen Membran sind gerade Linien, die ihren Seiten parallel sind, die der kreisförmigen Durchmesser, die gleiche Winkel mit einander bilden, und mit ihrem Rande concentrische Kreise.

